

المحاضرة العاشرة

الفروق المركزية الوسطى

Central differences

يرمز للفروق المركزية بالرمز δ وتعرف

معادلة الفروق بالصيغة التالية

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)$$

وان المعادلة العامة للفروق المركزية هي

$$\delta^{2k} y_i = \sum_{j=0}^{2k-1} y_{i+\frac{1}{2}} - \sum_{j=0}^{2k-1} y_{i-\frac{1}{2}}$$

$$n = 2k$$

عندما

$$i = 0, \bar{1}, \bar{2}, \dots$$

وكذلك

$$\sum_{j=0}^{2k+1} y_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{2k} y_{i+1} - \sum_{j=0}^{2k} y_{i+1}$$

$$\sum_{j=0}^{2k} y_{i-\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{2k} y_i - \sum_{j=0}^{2k} y_{i-1}$$

عندما

$$n = 2k+1$$

$$i = 0, \bar{1}, \bar{2}, \dots$$

فمثلاً

$$\Delta y_{\frac{1}{2}} = y_1 - y_0$$

$$\Delta y_{\frac{1}{2}} = y_0 - y_1$$

$$\Delta^2 y_{\frac{1}{2}} = \Delta y_1 - \Delta y_0$$

أمثلة $f(x) = x^2$ عند $\Delta f(x)$

مثال

$$\Delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)$$

الحل

$$= \left(x + \frac{h}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{h}{2}\right)^2$$

$$= x^2 + \frac{2}{2} xh + \frac{h^2}{4} - \left(x^2 - \frac{2}{2} xh + \frac{h^2}{4}\right)$$

$$= \cancel{x^2} + \underline{xh} + \cancel{\frac{h^2}{4}} - \cancel{x^2} + \underline{xh} - \cancel{\frac{h^2}{4}}$$

$$= 2xh$$

جدول الفروق المركزية

X_i	y_i	$\sum y_i$	$\sum^2 y_i$	$\sum^3 y_i$	$\sum^4 y_i$	$\sum^5 y_i$	$\sum^6 y_i$
X_{-3}	y_{-3}	$\sum y_{-\frac{5}{2}}$	$\sum^2 y_{-2}$	$\sum^3 y_{-\frac{3}{2}}$	$\sum^4 y_{-1}$	$\sum^5 y_{-\frac{1}{2}}$	$\sum^6 y_0$
X_{-2}	y_{-2}	$\sum y_{-\frac{3}{2}}$	$\sum^2 y_{-1}$	$\sum^3 y_{-\frac{1}{2}}$	$\sum^4 y_0$	$\sum^5 y_{\frac{1}{2}}$	$\sum^6 y_1$
X_{-1}	y_{-1}	$\sum y_{-\frac{1}{2}}$	$\sum^2 y_0$	$\sum^3 y_{\frac{1}{2}}$	$\sum^4 y_1$		
X_0	y_0	$\sum y_{\frac{1}{2}}$	$\sum^2 y_1$	$\sum^3 y_{\frac{3}{2}}$			
X_1	y_1	$\sum y_{\frac{3}{2}}$	$\sum^2 y_2$				
X_2	y_2	$\sum y_{\frac{5}{2}}$					
X_3	y_2						

سؤال

احسب الفروق الامامية للدالة

$$y = x^3 - 5x^2 + 2$$

عندما

$$x = -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
-1	-4	6				
0	+2	-4	-10	6		
1	-2	-8	-4	6	0	
2	-10	-6	2	6	0	0
3	-16	2	8			
4	-14					

سؤال

أحسب الفروق الأمامية الأولى

والثانية للدالة

$$y_s = s(s-1)(s-2)$$

الحل

$$y_s = (s^2 - s)(s - 2)$$

$$= s^3 - 2s^2 - s^2 + 2s$$

$$= s^3 - 3s^2 + 2s$$

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$= f(x_1) - f(x_0)$$

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

$$\Delta y_0 = (s+h)^3 - 3(s+h)^2 + 2(s+h) - (s^3 - 3s^2 + 2s)$$

$$= (s+h)(s^2 + 2sh + h^2) - 3(s^2 + 2sh + h^2) + 2s + 2h -$$

$$s^3 + 3s^2 - 2s$$

$$= \cancel{s^3} + \underline{hs^2} + \underline{2s^2h} + \underline{2sh^2} + \underline{h^2s} + \underline{h^3} - \cancel{3s^2} - \cancel{6sh} - \cancel{3h^2}$$

$$+ \cancel{2s} + 2h - \cancel{s^3} + \cancel{3s^2} - \cancel{2s}$$

$$= 3hs^2 + 3h^2s + h^3 - \cancel{6sh} - 3h^2 + 2h$$

$$= h(3s^2 + 3hs + h^2 - 6s - 3h + 2)$$

الفروق الأمامية
الأولى