فصل الأول

①

(4-4-1) **Discrete Uniform Distribution:** (دالة التوزيع المنتظم المتقطع والمتصل) $X \sim DU(N)$

Suppose that a r.v. X takes an a finite set of areal number $(a, a+1, a+2, \dots, N+a-1=b)$ and have the probability mass function as given bellows:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} & , X = a, a+1, a+2, \dots, N+a-1=b \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

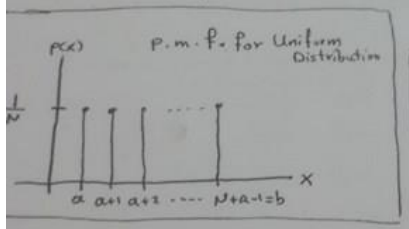
المكونات للتوزيع

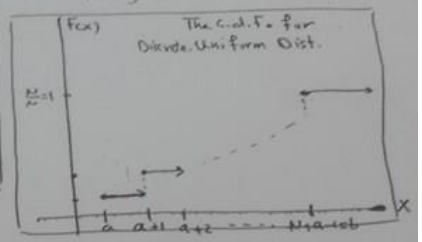
1- اسم التوزيع :: التوزيع المنتظم المتقطع . والتقدير ↑

2- المختصر له $X \sim DU(N)$

3- الميزة الاساسية التي يمتاز بها هذا التوزيع هو ان X تمثل الحوادث التي لها نفس الفرصة بالظهور
r.v. X = equally likely

4- رسم الدالة Diagram





(مجموع واحد)

نلاحظ بان دالة الكتلة الاحتمالية p.m.f. للتوزيع المنتظم المتقطع تكون ثابتة لجميع قيم X كما موضح في الشكل اعلاه

ان دالة الكتلة الاحتمالية للتوزيع المنتظم المتقطع تحقق شروط الدالة الاحتمالية.

① $0 \le p(x) \le 1$

② $\sum_{x=a}^{b} p(x) = 1$

$= p(X=a) + p(X=a+1) + p(X=a+2) + \dots + p(X=N+a-1)$

$= \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N}$

$= \frac{N}{N} = \boxed{1}$

ex.1: one dice is throwne once, let X r.v. be the number that show on the dice. (i) what is the p.m.f. and the c.d.f. of X. and drawing it

(ii) which is the name of distribution.

and write the p.m.f and the c.d.f. of X.

(i) هو نفس المثال الأول، كيف نحصل على p.m.f و c.d.f من الشكل الرسم وكذلك الرسم.

(ii) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $n(S) = 6$

$N = 6$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} & , x = a, a+1, \dots, N+a-1 = b \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & , x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

X = الرقم الذي يظهر من الزار 1, 2, 3, 4, 5, 6

X	event الحدث	prob الاحتمال
1	1	1/6
2	2	1/6
3	3	1/6
4	4	1/6
5	5	1/6
6	6	1/6
		1

كل واحد من الأرقام يحتمل الظهور بنفس الاحتمال $\frac{1}{6}$

هذا يقال بالتوزيع التشبيهي

كل رقم حوله نفس الفرصة بالظهور أي $\frac{1}{6}$

X = الرقم الذي يظهر على الزار

The p.m.f. for Discrete Uniform dist.

properties

(1) $0 \le p(1) = \frac{1}{6}, p(2) = \frac{1}{6}, \dots, p(6) = \frac{1}{6} \le 1$ موجبة.

(2) $\sum_{x=1}^{6} p(x) = 1$

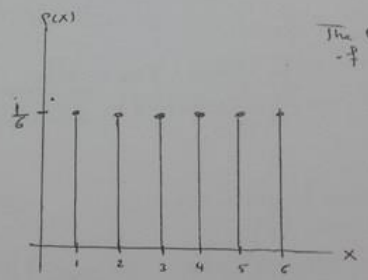
$= p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6)$ مجموع الاحتمالات تساوي الواحد

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$

The c.d.f. of X.

$$p(x) = \begin{cases} 1/6 & x = 1 \\ 1/6 & x = 2 \\ 1/6 & x = 3 \\ 1/6 & x = 4 \\ 1/6 & x = 5 \\ 1/6 & x = 6 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

The Diagram of p.m.f.



The c.d.f. of X is

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{6} & 1 \le x < 2 \\ 2/6 & 2 \le x < 3 \\ 3/6 & 3 \le x < 4 \\ 4/6 & 4 \le x < 5 \\ 5/6 & 5 \le x < 6 \\ \frac{6}{6} = 1 & 6 \le x \end{cases}$$

Diagram of c.d.f.

4-4-2: Bernoulli Distribution:

Suppose that a trail hase outcomes can be classified as either a (success) or as (a failure) is performed. let X be a r.v. taking value 1 if the outcome is success and 0 if it is failure, the X is said to be a Bernoulli random variable and its p.m.f. is given by:

$$p(x) = \begin{cases} p^{x}(1-p)^{1-x} & , x = 0,1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

or

$$p(x) = \begin{cases} p^{x} q^{1-x} & , x = 0,1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

تجربة عشوائية معينة يمكن تصنيف
نتيجتها إلى إحدى فئتين
إما حدوث الحادثة، وعادة
يطلق على ظهور الحادثة المرغوبة (النجاح) (success)
وعدم ظهور الحادثة بالفشل (failure)
وكلمة نجاح تستخدم فقط وليست تعني الحدث
وإن X يمثل متغير عشوائي بأخذ قيمة واحد $(X=1)$
إذا كانت النتيجة نجاح
وبأخذ قيمة صفر $(X=0)$ إذا كانت النتيجة فشل
أي أن $X = 0,1$

التجربة ثنائية إما نجاح أو فشل

1- اسم التوزيع توزيع برنولي ودالته هي ↑

2- المختصر لهذا التوزيع $X \sim Bor(1,p)$

3- المتغير العشوائي X يأخذ القيم $(X=0,1)$ (قيمتين واحد، اثنين) فإنه يأخذ صفر $X=0$ إذا كانت الحادثة فشل
ويأخذ القيمة واحد $(X=1)$ إذا حدثت الحادثة نجاحها.

4) أي عند حدوث الحادثة (نجاحها) فإن $X=1$ ← وهذا يعني $p(X=1) = p$ نجاح.

وعند عدم حدوث الحادثة (فشلها) فإن $X=0$ ← وهذا يعني $p(X=0) = q = 1-p$ فشل.

5) أن p = «probability of success»
تمثل احتمالية النجاح

وأن احتمالية الفشل مرمز لها بالرمز q (probability of failure)
$q = 1-p$

6) وأن دالة الكتلة الاحتمالية p.m.f. لهذا التوزيع هي

$$p(x) = \begin{cases} \underbrace{p^{x}}_{\text{احتمالية النجاح } p(x=1)} \underbrace{(1-p)^{1-x}}_{\text{احتمالية الفشل } p(x=0)} & , x = 0,1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

7) احتمال النجاح (p)، واحتمال الفشل $q = 1-p$

Ex. 16 Consider the experiment of tossing a fair die, and we assume that the appearence of 2 or 3 as a (success), Here $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

ملاحظة: الملاحظة هي نجاح يعني الاول بالحالة اذا ظهر الرقم (2 او 3) فهو نجاح ، وبالتالي النتيجة تحقق الشرط، فهذا هو النموذج له.

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad n(S) = 6.$

success $\Rightarrow \{2,3\} \Rightarrow X = 1$ (نجاح) $\Rightarrow P(X=1) = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3} = p}$

failure $\Rightarrow \{1,4,5,6\} \Rightarrow X = 0$ (فشل) $\Rightarrow P(X=0) = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3} = 1-p}$

$$\because \quad P(X) = \begin{cases} p^{X}(1-p)^{1-X} & , X = 0,1 \\ 0 & , o.w \end{cases}$$

$$P(X) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{X}\left(\frac{2}{3}\right)^{1-X} & , X = 0,1 \\ 0 & , o.w \end{cases}$$

where $P(X=0) = \left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{1-0} = \boxed{\frac{2}{3}}$ احتمال الفشل

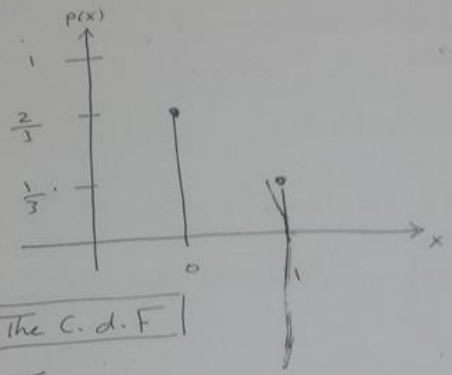
$P(X=1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{0} = \boxed{\frac{1}{3}}$ احتمال النجاح.

properties:

① $\sum_{X=0}^{1} P(X) = P(0) + P(1) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = \boxed{1}$ ✓

② $0 \leq P(0), P(1) \leq 1$ موجبة

The Diagram of p.m.f for Bernoulli Dist.



In general

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & , x = 0 \\ \frac{1}{3} & , x = 1 \\ 0 & , o.w \end{cases}$$

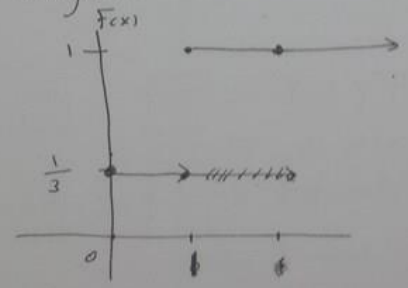
Diagram for Bernoulli

$\boxed{\text{p.m.f}}$

$\boxed{\text{The C.d.F}}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{3} = 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

The diagram.



3- Binomial Distribution : توزيع ثنائي الحدين

Consider a series of n independent Bernoulli trials (n is a finite integer) in which the probability of success p in each trial is constant, then $q=1-p$ is the prob. of failure in each trial, let X be denote the number of success in n trials, Then X can take the values $0,1,2,\dots,n$ with non-zero prob. and X is said to be a binomial random variable with parameter, n, p, It's p.m.f. is given by:

$$p(x) = \begin{cases} C^n_x \, p^x \, (1-p)^{n-x} & , \; x=0,1,2,\dots,n \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$X \sim Bin(n, p)$$

معلمات المجتمع

1- اسم التوزيع «التوزيع ثنائي الحدين» والدالة هي ↑

2- المختصر له $X \sim Bin(n,p)$

3- يمثل هذا التوزيع الحالة العامة لتوزيع بيرنوكي لتجربة تحتوي n من المحاولات المستقلة لبيرنوكي وان نتائج التجربة تعتمد اما النجاح p او الفشل $q=1-p$

4- توزيع ثنائي الحدين يمثل n من محاولات بيرنوكي المستقلة (حيث n هي محددة) وان p تمثل احتمال النجاح و q يمثل احتمال الفشل لكل محاولة واما X فهو متغير عشوائي يمثل عدد المحاولات الناجحة لـ n من محاولات بيرنوكي.

5- توزيع بيرنوكي يعتمد على مؤشر واحد هو (p = النجاح أو $q=1-p$ = الفشل)
اما توزيع ثنائي الحدين فهو يعتمد على مؤشرين (N = حجم العينة و p = احتمال الفشل)

6- X : يمثل عدد حالات النجاح number of success

- تعريف آخر : يستخدم هذا التوزيع في التجارب المتكررة n من المرات والمستقلة والتي تصنف نتائجها الى صنفين اما نجاح «ظهور الحادث» بمعنى النجاح p او الفشل (عدم ظهور الحادث» بمعنى الفشل q بحيث $(q=1-p)$ وان X متغير عشوائي يشير الى عدد مرات النجاح. لذلك فان احتمال ظهور الحادث X عدد من المرات من n من التجارب او المحاولات يمكن حسابه بقانون توزيع ثنائي الحدين وان المتغير X يقال له متغير ذو توزيع ثنائي الحدين $X \sim B(n, p)$

ex. a fair coin is tossed 3 times, let x be the number of heads. what is the p.m.f. of x and the name of the distribution. find the c.d.f. of x and draw it.

او يمكن تطبيق القانون لتوزيع ثنائي الحد مباشرة - هيك :

① x = no. of heads.

عدد محاولات النجاح تمثل ظهور الصورة.

وكل محاولة من المحاولات الثلاثة هي اما صورة او كتابة.

وهذا يعني بان $\boxed{p=\frac{1}{2}}$ النجاح

$q=\frac{1}{2}$ الفشل.

$S=\{H,T\}$ ..... $P(H)=\frac{1}{2}$, $P(T)=\frac{1}{2}$

② اي هي تمثل محاولة من محاولات بيرنولي المستقل فاذا نجاح (1) او لا فشل (0).

ويتم تكرارها n من المرات وهنا $\boxed{n=3}$ عدد المرات

① وبذلك صدونا $n=3$ و $p=\frac{1}{2}$

وان $x=0,1,2,3$

يعني اما تظهر صورة او ولا صورة او صورتين او ثلاث صور.

④ ول الصيغة المستخدمة هي توزيع ثنائي الحد:

$$p(x)=\begin{cases} C^n_x\, p^x (1-p)^{n-x} & x=0,1,2,\dots,n \\ 0 & ,o.w \end{cases}$$

وبذلك كان $n=3$

$$p(x)=C^3_x\, p^x (1-p)^{3-x} \quad , x=0,1,2,3$$

وان $p=\frac{1}{2}$

$$p(x)=\begin{cases} C^3_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-x} & , x=0,1,2,3 \\ 0 & ,o.w \end{cases}$$

$$x \sim Bin\left(3,\frac{1}{2}\right)$$

عدد المحاولات

نجاح

and p.m.f. of $X = 0, 1, 2, 3$

$$p(X=0) = C^3_0 \left(\tfrac{1}{2}\right)^0 \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

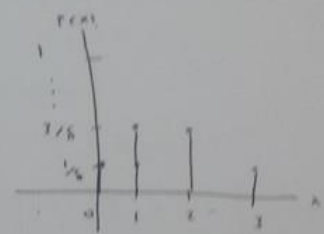
$$p(X=1) = C^3_1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{3!}{2!\,1!} \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = 3 \cdot \frac{1}{8} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

$$p(X=2) = C^3_2 \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 = \frac{3!}{2!\,1!} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = 3 \cdot \frac{1}{8} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

$$p(X=3) = C^3_3 \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \left(\tfrac{1}{2}\right)^0 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \boxed{\frac{1}{8}}$$

then p.m.f for Binomial dist is

$$p(X) = \begin{cases} 1/8 & , x = 0 \\ 3/8 & , x = 1 \\ 3/8 & , x = 2 \\ 1/8 & , x = 3 \\ 0 & , o.w \end{cases}$$

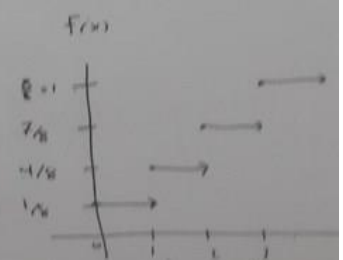


p.m.f for Binomial dis

the c.d.F. for Binomial dist.

$X = 0, 1, 2, 3$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/8 & 0 \le x < 1 \\ 4/8 & 1 \le x < 2 \\ 7/8 & 2 \le x < 3 \\ \frac{8}{8} = 1 & 3 \le x \end{cases}$$



c.d.F for Binom. Dist.

if he want.

(i) Find the prob. that exactly two heads occur.

$p(X=2)$

$$b(x=2, 3, \tfrac{1}{2}) = C^3_2 \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{3-2}$$

$$= C^3_2 \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \left(\tfrac{1}{2}\right)^1$$

$$= 3 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \boxed{\tfrac{3}{8}}$$

او اذا حسبنا عن p.m.f عبارة تذهب الى دالة $p(x)$ وبين ان $x=2$
و نكتب الاحتمال له.

$$p(X) = \tfrac{3}{8} \quad , X = 2$$

(ii) Find the prob. that at least 2 heads

$X = 2 \ , \ X = 3.$

$$p(X \geq 2) = p(X=2) + p(X=3) = Bin(3, \tfrac{1}{2}) + Bin(3, \tfrac{1}{2})$$

$$= C^n_2 p^2 (1-p)^{n-2} + C^n_3 p^3 (1-p)^{n-3}$$

$$= C^3_2 \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{3-2} + C^3_3 \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{3-3}$$

$$= 3 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \left(\tfrac{1}{2}\right) + (1) \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \left(\tfrac{1}{2}\right)^0$$

$$= \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{8} = \boxed{\tfrac{4}{8}}$$

or $p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - [p(X=0) + p(X=1)]$

$$= 1 - \left[\tfrac{1}{8} + \tfrac{3}{8}\right] = 1 - \tfrac{4}{8} = \boxed{\tfrac{4}{8}}$$

p.m.f دالة

(iii) Find the prob. of no heads.

$X = 0$ (1) ما هو احتمال ان لا يكون هيدز

$p(X=0) = \frac{1}{8}$

(2) ان لا يكون هيدز فانا نتكلم بالتوزيع ثنائي

$x = 0 \quad , \quad p = \frac{1}{2} \quad , \quad n = 3$ حيث

$X \sim Bin(\frac{1}{2}, n=3)$

$$p(X=0) = C^n_0 \, p^0 (1-p)^{n-0}$$

$$= C^3_0 (\tfrac{1}{2})^0 (1-\tfrac{1}{2})^{3-0} = (\tfrac{1}{2})^3 = \boxed{\tfrac{1}{8}}$$

EX/ 3-Coins are thrown once, let X be the numb
heads, find the p.m.f and C.d.f.

$X = 0, 1, 2, 3$

$X \sim B(3, \frac{1}{2} = p)$

اكمل نفس الشكل السابق

4- Poisson Distribution

The poisson distribution appears in amany natural and physical phenomena, such as,

1- The number of misprints per page in a large text.

2- The number of accedents per unit of time [hour), (day (week), or (month)] on a highway.

3. The number of telephone calls per unit of time received some switchboard.

The poisson dist. can be derived as a limiting case of Binomial dist. under the following conditions,

1- The number of trails n is very large

2- The probab. of successes of each trial p is s

The p.m.f of poisson dist. is given as follows:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!} & , x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & , o.w \end{cases}$$

$$X \sim Po(\lambda)$$

λ is the parameter of the distrib.

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} & , x = 0, 1, 2, \ldots, \infty \\ 0 & , o.w \end{cases}$$

where λ = parameter . معلمة التوزيع

λ = averag number of success . متوسط عدد النجاحات

X = no. of success. عدد النجاحات.

$e = 2.71828$

$$\boxed{X \sim Po(\lambda)}$$ ويختصر

$$\boxed{\lambda = np}$$

ان التجارب التي تعطينا عدد النجاحات في فترة زمنية او منطقة محددة تسمى تجارب بواسون
والفترة الزمنية يمكن ان تكون ثانية دقيقة يوم اسبوع شهر . او ربما المنطقة المحددة ممكن ان تكون
في بعض الاحيان قد يحدث المتغير العشوائي صفحة من كتاب
في جزء من فترة زمنية او وقت محدد . هو متر مربع .
او في منطقة صغيرة . او سم مكعب

مثل //

عدد المكالمات الهاتفية التي تصل الى المكتب كل عشرة دقائق .

① عدد المكالمات التليفونية في الساعة المستقبلة من قبل دائرة ما .

② عدد او معدل ايام تعطل المدارس بسبب سقوط الثلج .

③ عدد العيب المؤجلة في كرة القدم بسبب الامطار .

④ عدد الفئران بالدونم في حقول الذرة // او عدد الرجبان في متر مربع من ما

⑤ عدد البكتريا في محلول معين .

⑥ عدد الاخطاء عند طبع صفحة معينة / عدد الاخطاء المطبعية في صفحة

⑦ معدل او عدد الاصطدامات في الشهر // عدد حوادث السيارات على طريق

⑧ عدد الزبائن الذين يدخلون الى مكتب البريد كل خمس دقائق .

Poiss-1

ex. The average number of claims filed against an insurance company is 2 claims per day. what is the prob. that on any given day:

(i) ماهو احتمال انه يأتي طلب واحد الشركة او الكلي المدلي 2.

(ii) ماهو احتمال ولا طلب يأتي .

(iii)

$\boxed{e = 2.718}$

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} & x = 0, 1, 2, \dots, \infty \\ 0 & o.w \end{cases}$$

(i) exacly one claim is filed against the insurence company?

(i) That we have 1 claim per day? , $x = 1$, $\lambda = 2$

$$p(X=1) = \frac{e^{-2} \cdot 2^{1}}{1!} = 2e^{-2} = 2(2.71828)^{-2} = \boxed{0.27067}$$

(ii) no claim is filed against the insur. comp.

(ii) That we donot have any claim per day? $x = 0$, $\lambda = 2$

$$p(X=0) = \frac{e^{-2}\, 2^{0}}{0!} = e^{-2} = (2.718)^{-2} = \boxed{0.13534}$$

(iii) Exarly 2-claims are filed against the insurence company ?

(iii) That we have 3-claim per day.

$$p(X=3) = \frac{e^{-2}\, 2^{3}}{3!} = \frac{8e^{-2}}{6} = \frac{8}{6(2.71828)^{2}} = \boxed{0.18045}$$

(ii) That we have 3 claim at two days.

$\lambda = 2 * 2 = 4$

$$p(X=3) = \frac{e^{-4}\, 4^{3}}{3!} = 0.195$$

5- Geometric Distribution

Suppose that independent trials, each having probability p of being a success, are performed until the first success occurs. If X denotes the number of failure trials, then,

$$p(x) = \begin{cases} p\,q^{x-1} & , x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & , \ldots \omega \end{cases}$$

p is the parameter of distribution.

③

⑥ يجب هذا التوزيع لدينا نوعين من الدوال .

① X عدد محاولات الفشل .

$$\boxed{X \sim Ge(p)}$$

$$\boxed{P(X) = \begin{cases} p\,q^{x} & , x = 0,1,2,\dots,\infty \\ 0 & , o.w \end{cases}}$$

X = no. of failure to get the first success

عدد محاولات الفشل للوصول الى اول نجاح .

② وهذا يعني :

if $[X=0] = [S] = q^0 p = p$

$[X=1] = [fS] = qp$

$[X=2] = [ffS] = q^2 p$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$[X=x] = [ff\dots fS] = q^x p$

③ وهي دالة احتمالية :

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(x) = 1$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} p\,q^{x} = 1$$

$$= \left[p q^0 + p q^1 + p q^2 + \dots\right] = p\left[q^0 + q^1 + \dots\right]$$

$$= p \cdot \left[\frac{1}{1-q}\right]$$

$$= \cancel{p} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{p}}\right) = 1$$

$$\sum P(x) = 1$$

Hence $\therefore$ $P(x)$ is p.m.f.

16

(4)

(7) ثانياً:

① X عدد المحاولات حتى الحصول على أول حالة نجاح

X = no. of trials to get the first success.

$$\boxed{\begin{array}{l} X \sim G(p). \\ X = 1, 2, 3, \ldots, \infty \end{array}}$$

$$\boxed{p(X) = \begin{cases} p\,q^{x-1} & , x = 1,2,3,\ldots \\ 0 & , \text{o.w.} \end{cases}}$$

② لا يهم أن الصفر لأننا نحاول مرة ومرتين وأكثر لكن نحن حالة النجاح لذلك لا توجد محاولة صفر (X=0) أي {X=1} فاكر.

$$[X=1] = [S] = q^{1-1}p = \boxed{p}$$

حالة نجاح

$$[X=2] = [fS] = q^{2-1}p = qp$$

$$[X=3] = [ffS] = q^{3-1}p = q^2p$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

③ أيضاً هذه الدالة هي دالة احتمالية p.m.f.

$$\sum_{x=1}^{\infty} p(x) = 1$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} p\,q^{x-1} = p\sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} = p\left[q^0+q^1+q^2+\cdots\right] = p\left(\frac{1}{1-q}\right)$$

$$= \cancel{p}\left(\frac{1}{\cancel{p}}\right) = 1$$

Hence $p(x)$ is p.m.f.

3) A Coin is throwen mor than one

(i) what is the prb. of getting the first head at the third triales.

if $X=3$, $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$

$$P(X=3) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{8}}$$

$X \sim G(p=\frac{1}{2})$

(ii) " " at the sex triales

$X = 6$.

$$P(X=6) = q^{6-1}p = \left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)$$

(iii) what is the prb. of getting the first heads at the seven triales

$X = 7$

$$P(X=7) = q^{7-1}p = \left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right).$$

6- The negative Binomial dist.

In the geometric distribution we are interested in the first success. If we are interested in the r-th success instead of the first, in this case we apply the negative Binomial distribution, with p.m.f is:

$$p(x) = \begin{cases} \binom{r+x-1}{r-1} p^r q^x & x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$X \sim NB(r, p)$$

r : the no. of success.

r.v. X = The number of failure to get (r) success.

p = The prob. of each individual trial results in success

q = The prob. of failure.

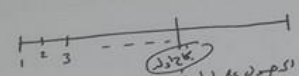
في النموذج الهندسي يتم التركيز على أول حالة نجاح.

أما إذا كان المطلوب التركيز على (r) من حالات النجاح.

فإننا هنا نستخدم نموذج ثنائي الحدين السالب.

(1) ان توزيع ذي الحدين السالب NBd. او توزيع باسكال يعتبر الحالة العامة للتوزيع الهندسي Geo.

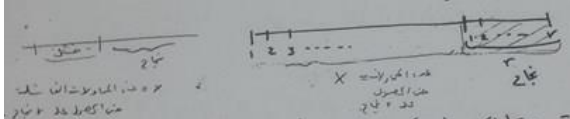
في التوزيع الهندسي.



X = عدد المحاولات حتى الحصول على اول نجاح

$X = 1, 2, 3, \ldots$ غير محدد.

اما في توزيع ثنائي الحدين السالب فان:



X = عدد المحاولات حتى الحصول على r من النجاحات.

$r = 1, 2, 3, \ldots$

$X = r, r+1, r+2, \ldots$

(2) لدينا لهذا التوزيع نوعين من دالة الاحتمال.

First] X = The number of trials need to get the (r) success, trial

$$p(X) = \begin{cases} C^{X-1}_{r-1}\, p^{r} q^{X-r} & X = r, r+1, r+2, \ldots \\ & r = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & o.w \end{cases}$$

if r=1 Then p(x) distributed as Geometric dist.

$$p(X) = C^{X-1}_{1-1}\, p^{1} q^{X-1}, \quad X = 1, 2, 3, \ldots$$

$$= C^{X-1}_{0}\, p q^{X-1} = \frac{(X-1)!}{0!\,(X-1)!}\, p q^{X-1} = p q^{X-1}$$

$$\boxed{p(X) = p q^{X-1}} \quad X = 1, 2, \ldots$$

(A)

Second.

r.v.x = The number of failure trials before getting r success trials

عدد المحاولات الفاشلة قبل الحصول على (r) من النجاح.

$$p(x) = \begin{cases} C^{x+r-1}_{r-1}\, p^r q^x & , x = 0,1,2,\dots \\ 0 & , \text{o.w.} \end{cases}$$

$$\boxed{r > 0}$$

وعندما $r = 1$ فان هذا التوزيع يصبح التوزيع الهندسي.

if $r=1$ then.

$$p(x) = C^{x+1-1}_{1-1}\, p^1 q^x = C^x_0\, p q^x = \cancel{\frac{x!}{x!(x-x)!}} \cdot p q^x = p q^x$$

$$p(x) = p q^x$$

$$p(x) \sim G(p)$$

$$p(x=0) = C^{0+r-1}_{r-1}\, p^r q^0 \qquad x = 0 \Rightarrow \{SSSS\}$$ مكونات 24

$$p(x=1) = C^{1+r-1}_{r-1}\, p^r q^1 = C^r_{r-1}\, p^r q = \frac{r!}{(r-1)!(1!)} p^r q \Rightarrow \{FSS\cdots S\}, \quad x=1$$ فشلة واحد

$$p(x=2) = C^{2+r-1}_{r-1}\, p^r q^2 = C^{r+1}_{r-1}\, p^r q^2 = \frac{(r+1)!}{(r-1)!(2!)} p^r q^2 \Rightarrow \{FFS\cdots S\}, \quad x=2$$ فشلتين

$$\vdots$$

$$p(x=x) = C^{x+r-1}_{r-1}\, p^r q^x = \frac{(x+r-1)!}{(r-1)!(x!)} p^r q^x \longrightarrow \{FF\cdots FSS\cdots S\}, \quad x=x$$ x حالة فشل

$$\vdots \qquad \vdots$$

(4)

Second.

r.v.x = The number of failure trials before getting (r) success trials

عدد المحاولات الفاشلة قبل الحصول على (r) من النجاح.

$$\boxed{p(x) = \begin{cases} C^{x+r-1}_{r-1}\, p^r q^x & , x = 0,1,2,\dots \\ 0 & , \text{ow} \end{cases}}$$

$$\boxed{r > 0}$$

وعندما $r = 1$ فان هذا التوزيع يصبح التوزيع الهندسي.

if $r=1$ then.

$$p(x) = C^{x+1-1}_{1-1}\, p^1 q^x = C^x_0\, p q^x = \cancel{\frac{x!}{0!(x-0)!}} = p q^x = p q^x$$

$$p(x) = p q^x$$

$$p(x) \sim G(p)$$

(3) هكل حالات نجاح.

$$p(x=0) = C^{0+r-1}_{r-1}\, p^r q^0 \qquad x = 0 \Rightarrow \{ssss\}$$

$$p(x=1) = C^{1+r-1}_{r-1}\, p^r q^1 = C^r_{r-1}\, p^r q = \frac{r!}{(r-1)!(1!)} p^r q \Rightarrow \{fss\cdots s\} \quad , x=1 \text{ فشلة واحدة}$$

$$p(x=2) = C^{2+r-1}_{r-1}\, p^r q^2 = C^{r+1}_{r-1}\, p^r q^2 = \frac{(r+1)!}{(r-1)!(2!)} p^r q^2 \Rightarrow \{ffs\cdots s\} \quad , x=2 \text{ فشلتين}$$

$$\vdots$$

$$p(x=x) = C^{x+r-1}_{r-1}\, p^r q^x = \frac{(x+r-1)!}{(r-1)!(x!)} p^r q^x \longrightarrow \{ff\cdots fss\cdots s\} \quad , x=x \text{ x حالة فشل}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Ex: Suppose we flip a fair coin until we get four heads. Let x be the number of failure trials to get four heads. Find the p.m.f of x?

sol

$r = 4$

$p(H) = p(T) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad p(x) = \begin{cases} C^{x+x-1}_{r-1} \, p^r q^x & , x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & , o.w \end{cases}$$

$$p(x) = \begin{cases} C^{x+x-1}_{4-1} \, p^4 q^x & , x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & , o.w \end{cases}$$

$$= \begin{cases} C^{x+4-1}_{4-1} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^x & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$p(x) = \begin{cases} C^{x+3}_{3} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^x & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$x \sim NB(r = 4, p = \tfrac{1}{2})$$

تمرين 34 (22)

ex) A Machine produces certain items with 0.04 defect we selecte one item at ~~least~~ a time from daily output of this machine, Let X be the number of non-def. until we obtain 3 def. Find the p.m.f of X? and c.d.f of X?

r.v. X = number of non def.v. until we ~~get~~ obtain 3 d

$r = 3$, $p = 0.04$, $q = 0.96$

~~$X = 3, 4, 5,$~~

either

p.m.f

$$p(x) = \begin{cases} C^{x+r-1}_{r-1}\, p^r q^x & , x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & , o.w \end{cases}$$

$$p(x) = \begin{cases} C^{x+3-1}_{3-1}\, (0.04)^3 (0.96)^x & , x = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 0 \end{cases}$$

Know: if X = no. of trials to get 3 def

$$p(x) = \begin{cases} C^{x-1}_{r-1}\, p^r q^{x-r} & , x = r, r+1, r+2, \dots \\ & x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & , o.w \end{cases}$$

$r = 3$

$$p(x) = \begin{cases} C^{x-1}_{3-1}\, (0.04)^3 (0.96)^{x-3} & , x = 3, 4, 5, \dots, \infty \\ 0 & o.w \end{cases}$$

مكينة تنتج منتجات بنسبة تلف (0.04) اخترنا واحد بعد الآخر من المخرجات (المنتوجات) لهذه المكينة. حيث X يمثل غير السالبة عدد مرات الفشل) عن الحصول على تالف بعد (3).

أوجد مرات الفشل عن الحصول على 3 ، 2 تالف.

فهنا ① لدينا X يمثل عدد مرات الفشل عن 3 من التالفات

② لدينا X يمثل عدد المحاولات عن نفس الشيء 3 التالفات.

7- Hyper geomatric Distribution

Suppose that we have a population of N objects, D of one type and $N-D$ of a second type, A random sample of size n is drawn from the population without replacement. Then if we let X denote the number of objects of the first type selected then; the p.m.f is:

$$p(X) = \begin{cases} \dfrac{C^{D}_{x} \cdot C^{N-D}_{n-x}}{C^{N}_{n}} & , x = a, a+1, \dots, b \\ & a = \max\{0, n-N+D\} \\ & b = \min\{n, D\}. \\ 0 & , o.w \end{cases}$$

مختصر:

$$X \sim HG(n, N, D)$$

- The experiment without replacement.
- C^{D}_{x} = all the ways (~~to get the first type~~) of choosing x object of the first type
- C^{N-D}_{n-x} : all the ways of choosing $n-x$ objects of the second type
- C^{N}_{n} ; ways of choosing a sample of size n from the population of N objects.
- X : number of success from first type

(24)

$$p(x) = P(X=x) = \frac{\text{No. of different objects of first type sample with } x}{C^N_n}$$

$$\Rightarrow \quad p(x) = \frac{C^D_x \, C^{N-D}_{n-x}}{C^N_n} \quad , \quad x = a, a+1, \ldots, b$$

where (i) $0 \le x \le D$

(ii) $0 \le n-x \le N-D$.

(iii) $a = \max(0, n-N+D)$

$b = \min(n, D)$

with $a < b$.

Hypergeomatric satisfies the Condition of p.m.f.

(1) $p(x)$ is non-negative.

$$\sum_{x=a}^{b} p(x) = 1.$$

$$\sum_{x=a}^{b} \frac{C^{N-D}_{n-x} \, C^D_x}{C^N_n} = 1 \quad \Rightarrow \text{ must prove. } \sum_{x=a}^{b} C^{N-D}_{n-x} C$$

Ex/ A box contains $\boxed{20}$ radio tubes of which (12) are defectives, we select a random sample of (10) items and let X be the number of defectives in the sample, find the prob. fun. of X.

$N = 20$

Defective $D = 12$ | non Defective $N - D = 8$

$n = 10$

X = no. of defective of sample

$N = 20$, $D = 12$, $N - D = 8$, $n = 10$

$X \sim Hg(N, D, n)$

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{C^{D}_{x}\, C^{N-D}_{n-x}}{C^{N}_{n}} & (x = a, a+1, \dots, b) \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$a = \max\{0, n - N + D\}$
$= 10 - 20 + 12 = \boxed{2}$

$a = \max\{0, 2\}$

$\boxed{a = 2}$

$b = \min\{n, D\}$
$= \min\{10, 12\}$

$\boxed{b = 10}$

$\Rightarrow$ Hence $x = 2, 3, 4, \dots, 10$

$$\Rightarrow p(x) = \begin{cases} \dfrac{C^{12}_{x}\, C^{8}_{10-x}}{C^{20}_{10}} & , x = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$