المحاضرة (1) / لوحة الأوساط الحسابية المتحركة

1- مقدمة في لوحات سيطرة وتقنيات إحصائية أخرى:

كما سبق ذكره يعود ظهور لوحة شيوارت وتطبيقاتها الى أوائل القرن العشرين ، وظهرت بعدها محاولات عديدة لتطوير ما بدأ به شيوارت ، و ظهر علماء كثر في هذا المجال وتم التركيز على ما يعاب على لوحة شيوارت من انها اقل حساسية في كشف التغيرات الصغيرة المستمرة والمتوسطة وبالذات تغير متوسط العملية ومحاولة خفض حدود السيطرة الى اقل من ثلاث انحرافات معيارية من خلال استخدام طرائق علمية وبالذات اتجه العلماء الى طرائق المتوسطات المتحركة والموزونة لخفض حدود السيطرة كونها تساعد على تقليل التذبذبات والاختلافات بين القيم مما يساعد على خفض انحرافاتها ، ويتم التركيز على الطرائق التي استخدمت أسلوب المجموع التراكمي ، الأوساط المتحركة سواء كانت حسابية ، هندسية او اسية.

سؤال (1): ما هو العيب المشخص في لوحات شيوارت ، والذي عالجته لوحات الأوساط المتحركة والمجموع المتراكم؟

الجواب: من العيوب التي يتم تحديدها على الخرائط السابقة ، انها تظهر فقط الانحرافات الكبيرة ولا تظهر الانحرافات المتوسطة أو الانحرافات الصغيرة وعلى هذا الاساس يتم التفكير بطريقة تقرب حدي السيطرة الادنى (LCL) والاعلى (UCL) الى حد السيطرة المركزي (CCL) ولكون المتوسطات المتحركة يمكن ان تساهم في تقليل التذبذبات ، فقد استخدمت لهذا الغرض ومن بينها أسلوب المجموع التراكمي ، المتوسطات المتحركة او المتوسطات الهندسية المتحركة.

2- لوحة الأوساط الحسابية المتحركة

من اهم وظائف المتوسطات المتحركة عندما تؤخذ لمجموعة من القيم المساهمة في تقليل الاختلافات وخفض قيم الانحرافات عن وسطها الحسابي وهذا المبدأ يمكن ان يساهم في خفض حدود السيطرة في كشف التغيرات الصغيرة ، وفي هذه الحالة نستخدم لوحة الأوساط الحسابية المتحركة لمراقبة متوسط مخرجات العملية سواء كانت المشاهدات فردية او مجاميع جزئية (عينات).

ان تعبير المتحرك جاء من خلال اخذ متوسط مجموعة قيم ثم تترك الفترة الاقدم وتضاف فترة لاحقة ويؤخذ المتوسط وهكذا حتى انتهاء جميع القيم ويعتمد عدد المفردات (ويسمى طول الفترة w) التي يؤخذ لها المتوسط المتحرك على مستوى التغير المراد كشفه ويفضل ان يكون طول الفترة كبيراً كلما كانت الحاجة لكشف تغيرات صغيرة ، أي ان العلاقة عكسية بين طول الفترة وطبيعة التغيرات المراد كشفها.

3- خطوات إيجاد الأوساط الحسابية المتحركة

يرمز للوسط الحسابي المتحرك بالرمز μ_i الموزون بمقلوب طول الفترة w

اذا كان لدينا k من العينات وان طول الفترة هو 3 ، هذا يعني بأن:

العينات	الأوساط الحسابية المتحركة	الصيغة للأوساط الحسابية المتحركة عندما يكون w=3
العينة 1	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 1	$\mu_1 = \frac{\bar{x}_1}{1}$
العينة 2	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 2	$\mu_2 = \frac{\bar{x}_2 + \bar{x}_1}{2}$
العينة 3	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 3	$\mu_3 = \frac{\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1}{3}$
العينة 4	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 4	$\mu_4 = \frac{\bar{x}_4 + \bar{x}_3 + \bar{x}_2}{3}$
العينة 5	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 5	$\mu_5 = \frac{\bar{x}_5 + \bar{x}_4 + \bar{x}_3}{3}$
العينة 6	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 6	$\mu_6 = \frac{\bar{x}_6 + \bar{x}_5 + \bar{x}_4}{3}$
العينة 7	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 7	$\mu_7 = \frac{\bar{x}_7 + \bar{x}_6 + \bar{x}_5}{3}$
⋮	⋮	⋮
العينة k	الوسط الحسابي المتحرك للعينة k	$\mu_k = \frac{\bar{x}_k + \bar{x}_{k-1} + \bar{x}_{k-2}}{3}$

نستنتج بأنهُ يمكن إيجاد الوسط الحسابي المتحرك وفق الصيغتين التالية:

$$\boldsymbol{\mu_t = \frac{\bar{x}_t + \bar{x}_{t-1} + \cdots + \bar{x}_1}{t} \qquad \text{if } i < w \qquad (1)}$$

$$\boldsymbol{\mu_t = \frac{\bar{x}_t + \bar{x}_{t-1} + \cdots + \bar{x}_{t-w+1}}{w} \qquad \text{if } i \geq w \qquad (2)}$$

ملاحظة: ان قيمة طول الفترة w تعطى في السؤال وعادة ما تكون قيمتها (3-5) كما تم اقتراحها من قبل بيسل (Bissell 1994).

ملاحظة: يتم تحديد $\boldsymbol{\mu_t}$ كنقاط في لوحة الاوساط المتحركة قد تكون داخل او خارج حدود السيطرة.

4- حدود السيطرة للوحة الأوساط الحسابية المتحركة

1- يتم حساب $(3\sigma_{\bar{X}})$ بالاعتماد على صيغة الثوابت $\boxed{3\sigma_{\bar{X}} = A_1\bar{S} = A_2\bar{R}}$

2- يتم حساب $3\sigma_{\mu_t}$ لكل عينة فسنلاحظ ان القيم تكون متساوية عند الوصول الى العينة المقابلة لطول الفترة (w). أي ان $\boxed{3\sigma_{\mu_t} = \frac{3\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{w}}}$

3- يتم حساب الحد الادنى **LCL لكل عينة** ، والحد الاعلى **UCL لكل عينة ايضاً** بالاعتماد على الصيغ في الادنى ، فسنلاحظ ان القيم تكون متساوية عند الوصول الى العينة المقابلة لطول الفترة (w).

$$UCL = \bar{\bar{X}} + 3\sigma_{\mu_t} = \bar{\bar{X}} + \frac{3\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{w}} = \boxed{\bar{\bar{X}} + \frac{A_1\bar{S}}{\sqrt{w}}} = \boxed{\bar{\bar{X}} + \frac{A_2\bar{R}}{\sqrt{w}}}$$

$$CCL = \bar{\bar{X}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - 3\sigma_{\mu_t} = \bar{\bar{X}} - \frac{3\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{w}} = \boxed{\bar{\bar{X}} - \frac{A_1\bar{S}}{\sqrt{w}}} = \boxed{\bar{\bar{X}} - \frac{A_2\bar{R}}{\sqrt{w}}}$$

حيث ان:

A_1 : قيمة جدولية ، يتم استخراجها بالاعتماد على حجم العينة وفي حالة اعطاء قيم الانحراف المعياري في السؤال او متوسط الانحراف المعياري للعينات.

A_2 : قيمة جدولية ، يتم استخراجها بالاعتماد على حجم العينة وفي حالة اعطاء قيم المدى في السؤال او متوسط المدى للعينات.

س/ اثبت الصيغة $\boxed{\sigma_{\mu_t} = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{w}}}$

الاثبات:

$$\because \sigma^2_{\mu_t} = \frac{\sigma^2}{nw}$$

$$\therefore \sigma_{\mu_t} = \frac{\sigma}{\sqrt{nw}} = \frac{1}{\sqrt{w}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\because \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\boxed{\sigma_{\mu_t} = \frac{\sigma}{\sqrt{nw}} = \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{w}}}$$

مثــال (1): مــن انتــاج احــدى المــواد الصــناعية اخــذت (20) عينــة بأوقــات منتظمــة ، وبحجــم (n=5) وحدات ، وتم تسجيل البيانات التالية:

	X1	X2	X3	X4	X5
Sample1	**469**	**468**	**470**	**469**	**468**
Sample2	**478**	**467**	**460**	**469**	**468**
Sample3	**467**	**478**	**462**	**469**	**468**
Sample4	**471**	**469**	**470**	**460**	**459**
Sample5	**467**	**468**	**459**	**460**	**470**
Sample6	**469**	**471**	**468**	**469**	**461**
Sample7	**469**	**470**	**469**	**469**	**470**
Sample8	**469**	**469**	**468**	**469**	**472**
Sample9	**459**	**466**	**469**	**469**	**459**
Sample10	**468**	**469**	**469**	**465**	**469**
Sample11	**469**	**470**	**469**	**471**	**469**
Sample12	**468**	**472**	**470**	**469**	**469**
Sample13	**466**	**469**	**471**	**459**	**468**
Sample14	**469**	**469**	**468**	**469**	**468**
Sample15	**459**	**469**	**469**	**468**	**468**
Sample16	**460**	**468**	**469**	**468**	**459**
Sample17	**469**	**466**	**468**	**470**	**469**
Sample18	**470**	**459**	**468**	**461**	**471**
Sample19	**467**	**468**	**470**	**469**	**469**
Sample20	**466**	**468**	**469**	**469**	**470**

المطلــوب: حــدد اذا كانــت العمليــة تحــت الســيطرة مســتخدماً لوحــة الأوســاط الحســابية المتحركــة بأخــذ (w=5).

الحل: للبيانات المعطاة في السؤال يمكن إيجاد الوسط الحسابي والمدى للعينات وكما في الجدول الآتي :

	X1	X2	X3	X4	X5	Mean	Max	Min	Range
Sample1	**469**	**468**	**470**	**469**	**468**	**468.8**	**470**	**468**	**2**
Sample2	**478**	**467**	**460**	**469**	**468**	**468.4**	**478**	**460**	**18**
Sample3	**467**	**478**	**462**	**469**	**468**	**468.8**	**478**	**462**	**16**
Sample4	**471**	**469**	**470**	**460**	**459**	**465.8**	**471**	**459**	**12**
Sample5	**467**	**468**	**459**	**460**	**470**	**464.8**	**470**	**459**	**11**
Sample6	**469**	**471**	**468**	**469**	**461**	**467.6**	**471**	**461**	**10**
Sample7	**469**	**470**	**469**	**469**	**470**	**469.4**	**470**	**469**	**1**
Sample8	**469**	**469**	**468**	**469**	**472**	**469.4**	**472**	**468**	**4**
Sample9	**459**	**466**	**469**	**469**	**459**	**464.4**	**469**	**459**	**10**
Sample10	**468**	**469**	**469**	**465**	**469**	**468**	**469**	**465**	**4**
Sample11	**469**	**470**	**469**	**471**	**469**	**469.6**	**471**	**469**	**2**
Sample12	**468**	**472**	**470**	**469**	**469**	**469.6**	**472**	**468**	**4**
Sample13	**466**	**469**	**471**	**459**	**468**	**466.6**	**471**	**459**	**12**
Sample14	**469**	**469**	**468**	**469**	**468**	**468.6**	**469**	**468**	**1**
Sample15	**459**	**469**	**469**	**468**	**468**	**466.6**	**469**	**459**	**10**
Sample16	**460**	**468**	**469**	**468**	**459**	**464.8**	**469**	**459**	**10**
Sample17	**469**	**466**	**468**	**470**	**469**	**468.4**	**470**	**466**	**4**
Sample18	**470**	**459**	**468**	**461**	**471**	**465.8**	**471**	**459**	**12**
Sample19	**467**	**468**	**470**	**469**	**469**	**468.6**	**470**	**467**	**3**
Sample20	**466**	**468**	**469**	**469**	**470**	**468.4**	**470**	**466**	**4**
متوسط المقاييس						467.6			7.5

$$\mu_t = \frac{\bar{x}_t + \bar{x}_{t-1} + \cdots + \bar{x}_1}{t} \qquad \text{if } i < w \qquad (1)$$

$$\mu_t = \frac{\bar{x}_t + \bar{x}_{t-1} + \cdots + \bar{x}_{t-w+1}}{w} \qquad \text{if } i \geq w \qquad (2)$$

$$\mu_1 = \frac{\bar{x}_1}{1} = 468.8$$

$$\mu_2 = \frac{\bar{x}_2 + \bar{x}_1}{2} = \frac{468.4 + 468.8}{2} = 468.6$$

$$\mu_3 = \frac{\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1}{3} = \frac{468.8 + 468.4 + 468.8}{3} = 468.7$$

$$\mu_4 = \frac{\bar{x}_4 + \bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1}{4} = \frac{465.8 + 468.8 + 468.4 + 468.8}{4} = 468$$

$$\mu_5 = \frac{\bar{x}_5 + \bar{x}_4 + \bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1}{5} = \frac{464.8 + 465.8 + 468.8 + 468.4 + 468.8}{5} = 467.3$$

$$\mu_6 = \frac{\bar{x}_6 + \bar{x}_5 + \bar{x}_4 + \bar{x}_3 + \bar{x}_2}{5} = \frac{467.6 + 464.8 + 465.8 + 468.8 + 468.4}{5} = 467.1$$

$$\mu_7 = \frac{\bar{x}_7 + \bar{x}_6 + \bar{x}_5 + \bar{x}_4 + \bar{x}_3}{5} = \frac{469.4 + 467.6 + 464.8 + 465.8 + 468.8}{5} = 467.3$$

$$\mu_8 = \frac{\bar{x}_8 + \bar{x}_7 + \bar{x}_6 + \bar{x}_5 + \bar{x}_4}{5} = \frac{469.4 + 469.4 + 467.6 + 464.8 + 465.8}{5} = 467.4$$

$$\mu_9 = \frac{\bar{x}_9 + \bar{x}_8 + \bar{x}_7 + \bar{x}_6 + \bar{x}_5}{5} = \frac{464.4 + 469.4 + 469.4 + 467.6 + 464.8}{5} = 467.1$$

$$\mu_{10} = \frac{\bar{x}_{10} + \bar{x}_9 + \bar{x}_8 + \bar{x}_7 + \bar{x}_6}{5} = \frac{468 + 464.4 + 469.4 + 469.4 + 467.6}{5} = 467.8$$

وهكذا لبقية العينات ، سيتم توضيحها في الجدول الاتي:

ولايجاد حدود السيطرة نجد الآتي :

$$n = 5 \sim A_2 = 0.577 \Rightarrow 3\sigma_{\bar{X}} = A_2\bar{R} = (0.577)(7.5) \cong \boxed{4.328}$$

$$UCL = \bar{\bar{X}} + \frac{A_2\bar{R}}{\sqrt{w}}$$

$$CCL = \bar{\bar{X}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - \frac{A_2\bar{R}}{\sqrt{w}}$$

ملاحظة : تطبق حدود السيطرة لكل عينة من العينات وتتساوى القيم عندما نصل لطول الفترة (w=5) وكما معطى في السؤال.

حدود السيطرة للعينة (1)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{1}}} = 467.6 + 4.328 \cong 471.9$$

$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{1}}} = 467.6 - 4.328 \cong 463.3$$

حدود السيطرة للعينة (2)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{2}}} = 467.6 + 3.06 \cong 470.7$$

$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{2}}} = 467.6 - 3.06 \cong 464.6$$

حدود السيطرة للعينة (3)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{3}}} = 467.6 + 2.499 \cong 470.1$$

$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{3}}} = 467.6 - 2.499 \cong 465.1$$

حدود السيطرة للعينة (4)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{4}}} = 467.6 + 2.164 \cong 469.8$$

$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{4}}} = 467.6 - 2.164 \cong 465.5$$

حدود السيطرة للعينة (5)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{5}}} = 467.6 + 1.936 \cong 469.6$$

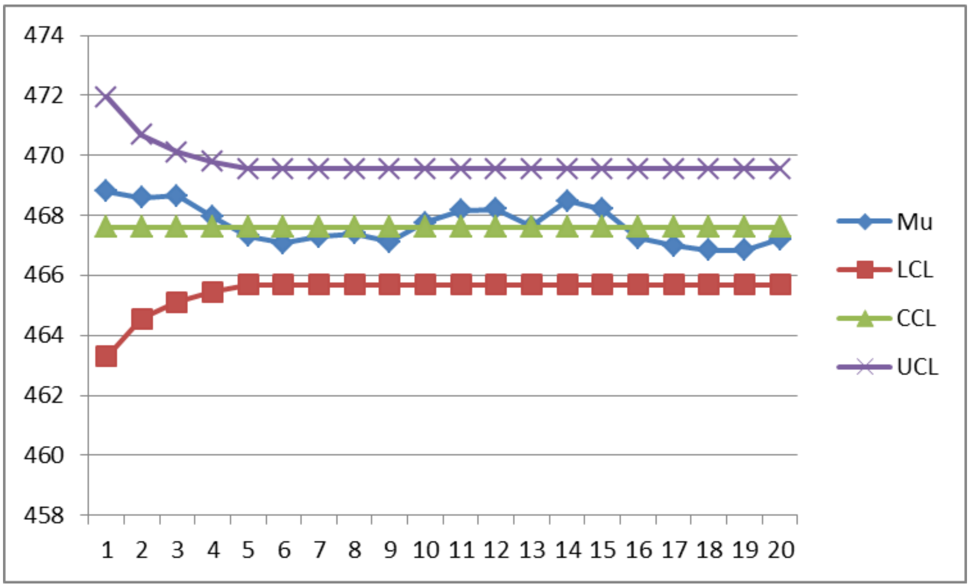
$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{5}}} = 467.6 - 1.936 \cong 465.7$$

اما حدود السيطرة لبقية العينات فتتساوى قيمها مع حدود السيطرة للعينة (5) ، وكما موضح بالجدول الآتي :

	Mu	LCL	CCL	UCL
Sample1	468.8	463.3	467.6	471.9
Sample2	468.6	464.6	467.6	470.7
Sample3	468.7	465.1	467.6	470.1
Sample4	468	465.5	467.6	469.8
Sample5	467.3	465.7	467.6	469.6
Sample6	467.1	465.7	467.6	469.6
Sample7	467.3	465.7	467.6	469.6
Sample8	467.4	465.7	467.6	469.6
Sample9	467.1	465.7	467.6	469.6
Sample10	467.8	465.7	467.6	469.6
Sample11	468.2	465.7	467.6	469.6
Sample12	468.2	465.7	467.6	469.6
Sample13	467.6	465.7	467.6	469.6
Sample14	468.5	465.7	467.6	469.6
Sample15	468.2	465.7	467.6	469.6
Sample16	467.2	465.7	467.6	469.6
Sample17	467.0	465.7	467.6	469.6
Sample18	466.8	465.7	467.6	469.6
Sample19	466.8	465.7	467.6	469.6
Sample20	467.2	465.7	467.6	469.6

وباستعمال احد البرامج الجاهزة يمكن رسم حدود السيطرة للوحة الأوساط الحسابية المتحركة.



لوحة الأوساط الحسابية المتحركة

القرار: الإنتاج تحت السيطرة

تمــرين (1): مــن انتــاج احــدى المــواد الصــناعية اخــذت (10) عينــات بأوقــات منتظمــة ، وبحجــم (n=6) وحــدات وكــان الوسط الحسابي والمدى للعينات العشرة هو:

العينات	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\overline{X}$	22.1	36.4	29.1	30.3	25.2	30	28.6	30.2	23.3	26.2
R	14	13	21	18	16	16	19	24	20	21

حـدد اذا كـان الانتـاج تحـت السـيطرة مسـتخدماً لوحـة المتوسـطات المتحركـة (MA – chart) ، علمـاً ان طـول الفتـرة هـو : $(\mathbf{w = 3})$.

تمــرين (2): للبيانــات التاليــة ، حــدد اذا كانــت العمليــة تحــت الســيطرة مســتخدماً لوحــة الأوســاط الحســابية المتحركــة بأخذ (w=4).

	X1	X2	X3	X4	X5	Mean	S.D.
Sample1	**469**	**468**	**470**	**469**	**468**	**468.8**	**0.837**
Sample2	**478**	**467**	**460**	**469**	**468**	**468.4**	**6.427**
Sample3	**467**	**478**	**462**	**469**	**468**	**468.8**	**5.805**
Sample4	**471**	**469**	**470**	**460**	**459**	**465.8**	**5.805**
Sample5	**467**	**468**	**459**	**460**	**470**	**464.8**	**4.970**
Sample6	**469**	**471**	**468**	**469**	**461**	**467.6**	**3.847**
Sample7	**469**	**470**	**469**	**469**	**470**	**469.4**	**0.548**
Sample8	**469**	**469**	**468**	**469**	**472**	**469.4**	**1.517**
Sample9	**459**	**466**	**469**	**469**	**459**	**464.4**	**5.079**
Sample10	**468**	**469**	**469**	**465**	**469**	**468**	**1.732**
Sample11	**469**	**470**	**469**	**471**	**469**	**469.6**	**0.894**
Sample12	**468**	**472**	**470**	**469**	**469**	**469.6**	**1.517**
Sample13	**466**	**469**	**471**	**459**	**468**	**466.6**	**4.615**
Sample14	**469**	**469**	**468**	**469**	**468**	**468.6**	**0.548**
Sample15	**459**	**469**	**469**	**468**	**468**	**466.6**	**4.278**
Sample16	**460**	**468**	**469**	**468**	**459**	**464.8**	**4.868**
Sample17	**469**	**466**	**468**	**470**	**469**	**468.4**	**1.517**
Sample18	**470**	**459**	**468**	**461**	**471**	**465.8**	**5.450**
Sample19	**467**	**468**	**470**	**469**	**469**	**468.6**	**1.140**
Sample20	**466**	**468**	**469**	**469**	**470**	**468.4**	**1.517**
متوسط المقاييس						467.6	3.146

المحاضرة (2) / لوحة الأوساط الحسابية المتحركة الموزونة اسياً

1- لوحة الأوساط الحسابية المتحركة الموزونة اسياً

و يرمزلها بالرمز $(EWMA)$ ، وتسمى ايضاً بـ لوحة الوسط الهندسي المتحرك **(The Geometric Moving Average Chart)** وتمثل النوع الثاني من خرائط المتوسطات المتحركة التي تعتمد على وزن نسبي يرمز لهُ بـ (λ) ويمثل ثابت قيمتهُ تكون بين الصفر والواحد اي ان $0 \leq (\lambda) \leq 1$ ، ويتم استخراج الوسط الهندسي وفق الصيغة التالية:

$$Z_t = \lambda \bar{X}_t + (1-\lambda) Z_{t-1} \quad , \text{where } Z_0 = \bar{\bar{X}}$$

ولرسم الخريطة يتم استخراج الانحراف المعياري للمتوسطات الهندسية وفق الصيغة التالية:

$$3\sigma_{Z_t} = 3\sigma_{\bar{X}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}\left(1-(1-\lambda)^{2t}\right)} \qquad , if\ t \leq 5$$

يتم تطبيق الصيغة أعلاه للعينات (1) ، و (2) ، و (3) ، و (4) ، و (5)

ملاحظة: عندما تكون t كبيرة (اي ان $t \to \infty$) فأن $(1-r)^{2t} = (1-r)^{2\infty} = 0$ ، يمكن اختصار صيغة الانحراف المعياري للمتوسطات الهندسية (عندما نصل للعينة السادسة) وعلى النحو التالي:

$$3\sigma_{Z_t} = 3\sigma_{\bar{X}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \qquad , if\ t \geq 6$$

وعند هذهِ النقطة تأخذ حدود السيطرة خطاً مستقيماً أي ان:

$$3\sigma_{Z_6} = 3\sigma_{Z_7} = \cdots = 3\sigma_{Z_k}$$

2- حدود السيطرة للوحة الأوساط الحسابية المتحركة الموزونة اسياً

ويتم استخراج حدود السيطرة وفق الصيغ التالية:

$$UCL = \bar{\bar{X}} + 3\sigma_{Z_t} = \boxed{\bar{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}\left(1-(1-\lambda)^{2t}\right)}}$$

$$CCL = \bar{\bar{X}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - 3\sigma_{Z_t} = \boxed{\bar{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}\left(1-(1-\lambda)^{2t}\right)}}$$

نستنتج ان:

$$UCL_6 = UCL_7 = \cdots = UCL_k$$

$$LCL_6 = LCL_7 = \cdots = LCL_k$$

ملاحظة: يتم حساب $(3\sigma_{\bar{X}})$ بالاعتماد على صيغة الثوابت $\boxed{3\sigma_{\bar{X}} = A_1\bar{S} = A_2\bar{R}}$

مثـــال (1): مـــن انتـــاج احـــدى المـــواد الصـــناعية اخـــذت (20) عينـــة بأوقـــات منتظمـــة ، وبحجـــم (n=5) وحدات ، وتم تسجيل البيانات التالية:

	X1	X2	X3	X4	X5
Sample1	**469**	**468**	**470**	**469**	**468**
Sample2	**478**	**467**	**460**	**469**	**468**
Sample3	**467**	**478**	**462**	**469**	**468**
Sample4	**471**	**469**	**470**	**460**	**459**
Sample5	**467**	**468**	**459**	**460**	**470**
Sample6	**469**	**471**	**468**	**469**	**461**
Sample7	**469**	**470**	**469**	**469**	**470**
Sample8	**469**	**469**	**468**	**469**	**472**
Sample9	**459**	**466**	**469**	**469**	**459**
Sample10	**468**	**469**	**469**	**465**	**469**
Sample11	**469**	**470**	**469**	**471**	**469**
Sample12	**468**	**472**	**470**	**469**	**469**
Sample13	**466**	**469**	**471**	**459**	**468**
Sample14	**469**	**469**	**468**	**469**	**468**
Sample15	**459**	**469**	**469**	**468**	**468**
Sample16	**460**	**468**	**469**	**468**	**459**
Sample17	**469**	**466**	**468**	**470**	**469**
Sample18	**470**	**459**	**468**	**461**	**471**
Sample19	**467**	**468**	**470**	**469**	**469**
Sample20	**466**	**468**	**469**	**469**	**470**

المطلـــوب: حـــدد اذا كانـــت العمليـــة تحـــت الســـيطرة مســـتخدماً لوحـــة الأوســـاط الحســـابية المتحركـــة الموزونة اسياً بأخذ (λ=0.3).

الحل: للبيانات المعطاة في السؤال يمكن إيجاد الوسط الحسابي والمدى للعينات وكما في الجدول الآتي :

	X1	X2	X3	X4	X5	Mean	Max	Min	Range
Sample1	469	468	470	469	468	468.8	470	468	2
Sample2	478	467	460	469	468	468.4	478	460	18
Sample3	467	478	462	469	468	468.8	478	462	16
Sample4	471	469	470	460	459	465.8	471	459	12
Sample5	467	468	459	460	470	464.8	470	459	11
Sample6	469	471	468	469	461	467.6	471	461	10
Sample7	469	470	469	469	470	469.4	470	469	1
Sample8	469	469	468	469	472	469.4	472	468	4
Sample9	459	466	469	469	459	464.4	469	459	10
Sample10	468	469	469	465	469	468	469	465	4
Sample11	469	470	469	471	469	469.6	471	469	2
Sample12	468	472	470	469	469	469.6	472	468	4
Sample13	466	469	471	459	468	466.6	471	459	12
Sample14	469	469	468	469	468	468.6	469	468	1
Sample15	459	469	469	468	468	466.6	469	459	10
Sample16	460	468	469	468	459	464.8	469	459	10
Sample17	469	466	468	470	469	468.4	470	466	4
Sample18	470	459	468	461	471	465.8	471	459	12
Sample19	467	468	470	469	469	468.6	470	467	3
Sample20	466	468	469	469	470	468.4	470	466	4
متوسط المقاييس						467.6			7.5

$$\mathbf{Z_t = \lambda\bar{X}_t + (1-\lambda)Z_{t-1}} \quad \mathbf{, where\ Z_0 = \bar{\bar{X}}}$$

$$\mathbf{Z_1} = \mathbf{0.3}(468.8) + 0.7(467.6) = 140.64 + 327.32 \cong 468$$

$$\mathbf{Z_2} = \mathbf{0.3}(468.4) + 0.7(467.96) = 140.52 + 327.57 = 468.1$$

$$\mathbf{Z_3} = \mathbf{0.3}(468.8) + 0.7(468.09) = 140.64 + 327.66 = 468.3$$

وهكذا لبقية العينات ، سيتم توضيحها في الجدول التالي:

ولايجاد حدود السيطرة نجد الآتي :

$$\mathbf{n = 5 \sim A_2 = 0.577 \implies 3\sigma_{\bar{X}} = A_2\bar{R} = (0.577)(7.5) \cong \boxed{4.33}}$$

$$\mathbf{UCL} = \boxed{\bar{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}}\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}(1-(1-\lambda)^{2t})}}$$

$$\mathbf{CCL} = \bar{\bar{X}}$$

$$\mathbf{LCL} = \boxed{\bar{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}}\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}(1-(1-\lambda)^{2t})}}$$

ملاحظة : تطبق حدود السيطرة لكل عينة من العينات وتتساوى القيم عندما نصل للعينة (6) وكالاتي:

حدود السيطرة للعينة (1)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{\frac{\mathbf{0.3}}{\mathbf{2-0.3}}(\mathbf{1-(0.7)^2})} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(\mathbf{1} - 0.49)}$$

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(0.51)} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.09} = 467.6 + 1.299 \cong 468.9$$

$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 - 1.299 = 466.3$$

حدود السيطرة للعينة (2)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{\frac{\mathbf{0.3}}{\mathbf{2-0.3}}(\mathbf{1-(0.7)^4})} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(\mathbf{1} - 0.2401)}$$

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(0.7599)} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1341} = 467.6 + 1.586 \cong 469.2$$

$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 - 1.586 = 466$$

حدود السيطرة للعينة (3)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{\frac{\mathbf{0.3}}{\mathbf{2-0.3}}(\mathbf{1-(0.7)^6})} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(\mathbf{1} - 0.1177)}$$

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(0.8823)} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1557} = 467.6 + 1.709 \cong 469.3$$

$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 - 1.709 = 465.9$$

حدود السيطرة للعينة (4)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{\frac{\mathbf{0.3}}{\mathbf{2-0.3}}(\mathbf{1}-(\mathbf{0.7})^{\mathbf{8}})} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(\mathbf{1}-0.0577)}$$

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(0.9423)} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1663} = 467.6 + 1.766 \cong 469.4$$

$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 - 1.766 = 465.8$$

حدود السيطرة للعينة (5)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{\frac{\mathbf{0.3}}{\mathbf{2-0.3}}(\mathbf{1}-(\mathbf{0.7})^{\mathbf{10}})} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(\mathbf{1}-0.0283)}$$

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(0.9717)} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1715} = 467.6 + 1.793 \cong 469.4$$

$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 - 1.793 = 465.8$$

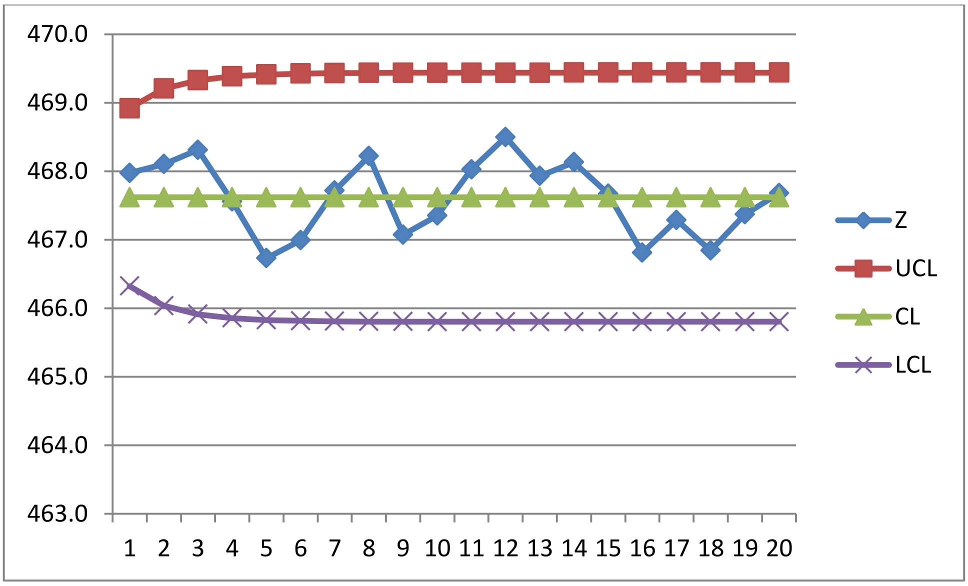
نستنتج ان حدود السيطرة للعينات من (6) الى (20) تكون كما يلي:

$$\mathbf{UCL_6} = \mathbf{UCL_7} = \cdots = \mathbf{UCL_{20}}$$

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{\frac{\mathbf{0.3}}{\mathbf{2-0.3}}} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765} = 467.6 + 1.819 \cong 469.4$$

$$\mathbf{LCL_6} = \mathbf{LCL_7} = \cdots = \mathbf{LCL_{20}}$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 - 1.766 = 465.8$$



لوحة الأوساط الحسابية المتحركة الموزونة اسياً

القرار: الإنتاج تحت السيطرة

Sample	Z	UCL	CL	LCL
1	468.0	468.92	467.6	466.32
2	468.1	469.20	467.6	466.04
3	468.3	469.33	467.6	465.91
4	467.6	469.38	467.6	465.86
5	466.7	469.41	467.6	465.83
6	467.0	469.42	467.6	465.82
7	467.7	469.4	467.6	465.8
8	468.2	469.4	467.6	465.8
9	467.1	469.4	467.6	465.8
10	467.4	469.4	467.6	465.8
11	468.0	469.4	467.6	465.8
12	468.5	469.4	467.6	465.8
13	467.9	469.4	467.6	465.8
14	468.1	469.4	467.6	465.8
15	467.7	469.4	467.6	465.8
16	466.8	469.4	467.6	465.8
17	467.3	469.4	467.6	465.8
18	466.8	469.4	467.6	465.8
19	467.4	469.4	467.6	465.8
20	467.7	469.4	467.6	465.8

تمرين (1): من انتاج احدى المواد الصناعية اخذت (10) عينات بأوقات منتظمة ، وبحجم (n=6) وحدات وكان الوسط الحسابي والمدى للعينات العشرة هو:

العينات	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\overline{X}$	22.1	36.4	29.1	30.3	25.2	30	28.6	30.2	23.3	26.2
R	14	13	21	18	16	16	19	24	20	21

حدد اذا كان الانتاج تحت السيطرة مستخدماً لوحة المتوسطات المتحركة الموزونة اسياً (EWMA – chart) ، علماً ان طول الفترة هو : $(\lambda = 0.4)$.

تمرين (2): للبيانات التالية ، حدد اذا كانت العملية تحت السيطرة مستخدماً لوحة الأوساط الحسابية المتحركة الموزونة اسياً بأخذ $(\lambda = 0.4)$

	X1	X2	X3	X4	X5	Mean	S.D.
Sample1	**469**	**468**	**470**	**469**	**468**	**468.8**	**0.837**
Sample2	**478**	**467**	**460**	**469**	**468**	**468.4**	**6.427**
Sample3	**467**	**478**	**462**	**469**	**468**	**468.8**	**5.805**
Sample4	**471**	**469**	**470**	**460**	**459**	**465.8**	**5.805**
Sample5	**467**	**468**	**459**	**460**	**470**	**464.8**	**4.970**
Sample6	**469**	**471**	**468**	**469**	**461**	**467.6**	**3.847**
Sample7	**469**	**470**	**469**	**469**	**470**	**469.4**	**0.548**
Sample8	**469**	**469**	**468**	**469**	**472**	**469.4**	**1.517**
Sample9	**459**	**466**	**469**	**469**	**459**	**464.4**	**5.079**
Sample10	**468**	**469**	**469**	**465**	**469**	**468**	**1.732**
Sample11	**469**	**470**	**469**	**471**	**469**	**469.6**	**0.894**
Sample12	**468**	**472**	**470**	**469**	**469**	**469.6**	**1.517**
Sample13	**466**	**469**	**471**	**459**	**468**	**466.6**	**4.615**
Sample14	**469**	**469**	**468**	**469**	**468**	**468.6**	**0.548**
Sample15	**459**	**469**	**469**	**468**	**468**	**466.6**	**4.278**
Sample16	**460**	**468**	**469**	**468**	**459**	**464.8**	**4.868**
Sample17	**469**	**466**	**468**	**470**	**469**	**468.4**	**1.517**
Sample18	**470**	**459**	**468**	**461**	**471**	**465.8**	**5.450**
Sample19	**467**	**468**	**470**	**469**	**469**	**468.6**	**1.140**
Sample20	**466**	**468**	**469**	**469**	**470**	**468.4**	**1.517**
متوسط المقاييس						467.6	3.146

المحاضرة (3) / لوحة المجموع المتراكم

يرمز لها بالرمز (CUSUM Chart) ، تهدف الى الكشف عن الانحرافات الصغيرة في العملية الإنتاجية التي لا تظهرها لوحات شيورات ، تم اقتراحها من قبل العالم (Page) في عام 1954 ، وتم تطويرها من قبل (Branard) في عام 1959 وكذلك من قبل كل من (Ewan and Kemp) واخرون في عام 1960.

تراقب هذه اللوحة انحرافات المشاهدات في العملية الإنتاجية في الحالات التي يقل فيها الانحراف عن انحرافين معياريين ، ويتم حساب المجموع المتراكم كما يلي:

$$\boxed{Q_j = \sum_{j=1}^{k} \bar{X}_j - \mu_0} \quad , \textbf{where } \mu_0 = \bar{\bar{X}}$$

$$\textbf{For sample 1} \Rightarrow \mathbf{Q_1 = \bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}}$$

$$\textbf{For sample 2} \Rightarrow \mathbf{Q_2 = (\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}) + (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}) = Q_1 + (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}})}$$

$$\textbf{For sample 3} \Rightarrow \mathbf{Q_3 = (\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}) + (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}) + (\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}) = Q_2 + (\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}})}$$

$$\vdots$$

$$\textbf{For sample k} \Rightarrow \mathbf{Q_k = Q_{k-1} + (\bar{X}_k - \bar{\bar{X}})}$$

خطوات إيجاد القيم الثابتة للوحة المجموع المتراكم:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

او

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{C_2}$$

حيث ان:

C_2 , d_2 : قيم جدولية تعتمد على قيمة عدد المشاهدات داخل العينات الفرعية n .

$$2\sigma_{\bar{X}} = \frac{2\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - 2\sigma_{\bar{X}}$$

ويقرب الناتج الى اقرب عدد صحيح للحد الأدنى ، لنجد قيمة الثابت h

$$h = \bar{\bar{X}} - x$$

حيث ان:

$x = \text{LCL}$: بعد ان يتم تقريب حد السيطرة الأدنى عند انحرافين معياريين لاقرب عدد صحيح.

نستخرج قيمة الثابت k وكما يلي:

$$k = \bar{\bar{X}} - y$$

$$y = \frac{\bar{\bar{X}} + x}{2}$$

ملاحظة مهمة: ان قيمة k اصغر من قيمة h أي ان

$$k < h$$

نجد قيمة المسافة

$$\boxed{d = \frac{h}{k}}$$

نجد قيمة الزاوية باستعمال الحاسبة العلمية

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{k\sqrt{n}}{2\hat{\sigma}}\right)$$

مثال: البيانات في الادنى تمثل الوسط الحسابي والمدى لعشر عينات بحجم (5) وحدات ، اخذت بأوقات منتظمة من انتاج احدى السلع ، مستخدما لوحة المجموع المتراكم في الاختبار بطريقة القناع حدد اذا كان الانتاج تحت السيطرة.

المدى	الوسط الحسابي	العينة
4	24	1
6	19	2
5	20	3
3	22	4
4	26	5
3	23	6
2	25	7
4	22	8
3	20	9
5	21	10

الحل:

العينة	$\bar{X}$	R	$\bar{X}-\mu$	$Q_r=\sum \bar{X}_i-(\mu-k)$
1	24	4	1.8	1.8
2	19	6	-3.2	-1.4
3	20	5	-2.2	-3.6
4	22	3	-0.2	-3.8
5	26	4	3.8	0
6	23	3	0.8	0.8
7	25	2	2.8	3.6
8	22	4	-0.2	3.4
9	20	3	-2.2	1.2
10	21	5	-1.2	0
SUM	222	39		
MEAN	22.2	3.9		

$\bar{\bar{X}}=\mu=22.2 \quad ,\bar{R}=3.9$

$\because n=5 \rightarrow d_2=2.326$ (قيمة جدولية)

$$\because \hat{\sigma}=\frac{\bar{R}}{d_2}=\frac{3.9}{2.326}=\boxed{1.677}$$

$$\because 2\sigma_{\bar{X}}=\frac{2\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}=\frac{3.354}{\sqrt{5}}=1.499\cong 1.5$$

$$\therefore LCL=\bar{\bar{X}}-2\sigma_{\bar{X}}=22.2-1.5=20.7\cong 21 \Longrightarrow \therefore \boxed{LCL=21}$$

$$\because \boxed{h=\mu-x} \Longrightarrow \therefore h=22.2-21=1.2 \qquad \dots(2)$$

x : حد الرفض الادنى و هي قيمة يتم استخراجها.

y : متوسط $(\mu-k)$ الذي يتم استخراجه وفق الصيغة :

$$(\mu-k)=\frac{\mu+(\mu-h)}{2}=\frac{22.2+21}{2}=\frac{43.2}{2}=21.6$$

$$\therefore \boxed{k = \mu - y} \Longrightarrow \therefore k = 22.2 - 21.6 = 0.6$$

ملاحظة:

$$k < h \Longrightarrow \ k = 0.6 \ < h = 1.2$$

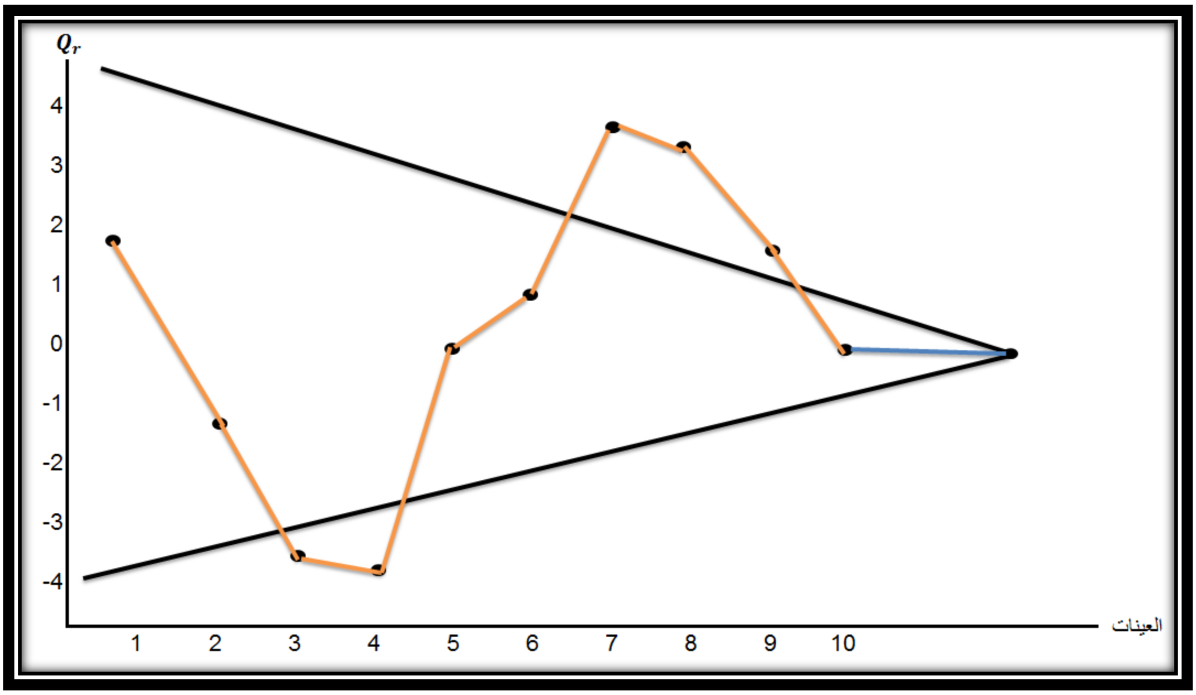
$$\therefore \boxed{d = \frac{h}{k}} \ \Longrightarrow \therefore d = \frac{1.2}{0.6} = 2$$

1- من المعادلة (4) نجد قيمة θ وكما يلي:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{k\sqrt{n}}{2\hat{\sigma}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.6\sqrt{5}}{3.354}\right) = \tan^{-1}(0.4)$$

باستعمال الحاسبة العلمية وكما يلي:

$$(1)\ 0.4 \ \ \rightarrow \ (2) 2ndf \ \rightarrow (3) \tan = 21.8 \cong 22$$



لوحة المجموع المتراكم : (Cu Sum – Chart)

القرار: بما ان منحنى المجموع المتراكم قد قطع ذراعي القناع ، إذاً الانتاج خارج السيطرة.

تمرين: للبيانات في الادنى عن الوسط الحسابي والانحراف المعياري لـ (12) عينة اخذت بأوقات منتظمة وبحجم (4) وحدات:

العينة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الوسط الحسابي	18	17	20	19	17	21	19	20	22	18	23	21
الانحراف المعياري	1.2	3.4	1.4	1.8	3.1	1.1	2.3	1.4	2.8	2.6	2.1	1.8

المطلوب: حدد إذا كان الانتاج تحت السيطرة مستخدماً لوحة المجموع المتراكم مع اختبار القناع على اساس ان (m=20).

الحل:

العينة	الوسط الحسابي	الانحراف المعياري
1	18	1.2
2	17	3.4
3	20	1.4
4	19	1.8
5	17	3.1
6	21	1.1
7	19	2.3
8	20	1.4
9	22	2.8
10	18	2.6
11	23	2.1
12	21	1.8
المجموع	235	25
الوسط	19.583	2.083

$\because n = 4 \rightarrow C_2 = 0.7979$ (قيمة جدولية)

$$\because \hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{C_2} = \frac{2.083}{0.7979} = \boxed{2.611}$$

$$\because 2\sigma_{\bar{X}} = \frac{2\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{3.354}{\sqrt{4}} = 5.221 \cong 5$$

$$\therefore LCL = \overline{\overline{X}} - 2\sigma_{\overline{X}} = 19.583 - 5 = 14.583 \cong 15 \Longrightarrow \therefore \boxed{LCL = 15}$$

$$\because \boxed{h = \mu - x} \Longrightarrow \therefore h = 20 - 15 = 5 \qquad \dots (2)$$

x : حد الرفض الادنى و هي قيمة يتم استخراجها.

y : متوسط $(\mu - k)$ الذي يتم استخراجه وفق الصيغة :

$$(\mu - k) = \frac{\mu + (\mu - h)}{2} = \frac{20 + 25}{2} = \frac{45}{2} = 22.5$$

$$\therefore \boxed{k = \mu - y} \Longrightarrow \therefore k = 22.2 - 21.6 = 0.6$$

ملاحظة:

$$k < h \Longrightarrow k = 0.6 < h = 1.2$$

$$\therefore \boxed{d = \frac{h}{k}} \Longrightarrow \therefore d = \frac{1.2}{0.6} = 2$$

1- من المعادلة (4) نجد قيمة θ وكما يلي:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{k\sqrt{n}}{2\hat{\sigma}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.6\sqrt{5}}{3.354}\right) = \tan^{-1}(0.4)$$

باستعمال الحاسبة العلمية وكما يلي:

$$(1)\ 0.4 \rightarrow (2) 2ndf \rightarrow (3) \tan = 21.8 \cong 22$$

المحاضرة (4) / لوحة متعدد المتغيرات (Multivariate T^2 Chart)

من عيوب لوحات السيطرة السابقة ، إنها تستخدم فقط لمتغير واحد ولكون أي منتوج او سلعة تحتوي على اكثر من متغير كانت الحاجة ماسة الى تصميم لوحات سيطرة لمراقبة اكثر من متغير ، وبدأ العلماء ومنهم العالم هوتلنك (Hotelling) عام 1967 بتصميم هذا النوع من اللوحات ، وسمي بأسلوب متعدد المتغيرات في السيطرة النوعية.

ان حد السيطرة الأدنى في لوحة متعدد المتغيرات يساوي صفر .

ان حد السيطرة الأعلى يستخرج وفق الصيغة التالية:

$$\text{UCL } T^2 = \frac{P(K-1)(n-1)}{Kn-K-P+1} * \left(F_{(\alpha)^{0.05}_{0.01},p,Kn-K-P+1}\right)$$

حيث ان:

P: عدد المتغيرات ، n : حجم العينة ، k : عدد العينات.

$F_{\alpha,p,Kn-K-P+1}$: قيمة جدولية ، $(\alpha)^{0.05}_{0.01}$: مستوى المعنوية.

ملاحظة: اذا كان عدد العينات اكثر من 100 عينة أي ان $k > 100$ فيمكن إيجاد الحد الأعلى للوحة متعدد المتغيرات وفق الصيغة التالية:

$$\text{UCL } T^2 = \frac{P(k-1)}{k-P} * \left(F_{(\alpha)^{0.05}_{0.01},p,k-p}\right)$$

ولتحديد إذا كان الانتاج تحت السيطرة نستخرج قيمة T^2 لكل عينة من العينات ، فإذا كان لدينا متغيرين فقط نستخدم الصيغة التالية:

$$T^2{}_i = \frac{n}{(\bar{S}^2{}_1)(\bar{S}^2{}_2) - (\bar{S}_{12})^2}\left[(\bar{S}^2{}_2) * (\bar{X}_{1i} - \bar{\bar{X}}_1)^2 + (\bar{S}^2{}_1) * (\bar{X}_{2i} - \bar{\bar{X}}_2)^2 - 2(\bar{S}_{12})(\bar{X}_{1i} - \bar{\bar{X}}_1)(\bar{X}_{2i} - \bar{\bar{X}}_2)\right]$$

مثال: اخذت (20) عينة من انتاج احدى السلع بحجم (8) وحدات ، وبأوقات منتظمة وكانت البيانات المسجلة كما يلي: اذا علمت ان $\bar{\bar{X}}_1 = 15.3$ ، $\bar{\bar{X}}_2 = 2.95$

العينات	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$
1	15.8	**3.02**
2	14.8	**2.7**
3	15.4	**3**
4	15.7	**3.04**
5	14.7	**2.9**
6	15.5	**2.8**
7	14.9	**3.1**
8	15.8	**3.03**
9	15.9	**2.88**
10	14.9	**3.01**
11	15.7	**2.82**
12	15	**2.92**
13	15.9	**3.1**
14	15.9	**3.2**
15	15.1	**2.9**
16	14.6	**3.08**
17	15.2	**2.75**
18	15.3	**3**
19	14.7	**2.9**
20	14.9	**2.85**

$\bar{S}^2{}_1 = 1.26$

$\bar{S}^2{}_2 = 0.81$

$\bar{S}_{12} = 0.78$

المطلوب: حدد اذا كان الإنتاج تحت السيطرة مستخدماً لوحة متعدد المتغيرات T^2 ، بأخذ $\alpha = 0.001$

الحل: من معطيات السؤال نحدد ما يلي:

$P = 2$: عدد المتغيرات ، $n = 8$: حجم العينة ، $k = 20$: عدد العينات.

$F_{0.001,2,160-20-2+1} = F_{0.001,2,139} \cong F_{0.001,2,120} \cong 7.3$: قيمة جدولية

$$\boxed{\mathbf{UCL\ T^2} = \frac{P(K-1)(n-1)}{Kn-K-P+1} * \left(F_{(\alpha)_{\substack{0.05\\0.01}},p,Kn-K-P+1}\right)}$$

$$\mathbf{UCL\ T^2} = \frac{2(20-1)(8-1)}{160-20-2+1} * \left(F_{(\alpha)_{0.001},2,139}\right)$$

$$\mathbf{UCL\ T^2} = \frac{2(19)(7)}{139} * (7.3) = \frac{266}{139} * (7.3) \cong 13.97$$

للعينة (1):

$$\boxed{T^2{}_i = \frac{n}{(\bar{S}^2{}_1)(\bar{S}^2{}_2) - (\bar{S}_{12})^2}\left[(\bar{S}^2{}_2) * \left(\bar{X}_{1i} - \bar{\bar{X}}_1\right)^2 + (\bar{S}^2{}_1) * \left(\bar{X}_{2i} - \bar{\bar{X}}_2\right)^2 - 2(\bar{S}_{12})(\bar{X}_{1i} - \bar{\bar{X}}_1)(\bar{X}_{2i} - \bar{\bar{X}}_2)\right]}$$

$$T^2{}_1 = \frac{8}{(1.26)(0.81) - (0.78)^2}[(0.81) * (15.8 - 15.3)^2 + (1.26) * (3.02 - 2.95)^2 - 2(0.78)(15.8 - 15.3)(3.02 - 2.95)]$$

$$\frac{8}{(1.26)(0.81) - (0.78)^2} = \frac{8}{1.021 - 0.608} = \frac{8}{0.413} = 19.371$$

$$(0.81) * (15.8 - 15.3)^2 = (0.81) * (0.5)^2 = 0.203$$

$$(1.26) * (3.02 - 2.95)^2 = (1.26) * (0.07)^2 = 0.006$$

$$2(0.78)(15.8 - 15.3)(3.02 - 2.95) = 1.56(0.5)(0.07) = 0.055$$

$$T^2{}_1 = 19.371[0.203 + 0.006 - 0.055] = 19.371[0.154] = 2.98$$

للعينة (2):

$$T^2{}_2 = 19.371[(0.81) * (14.8 - 15.3)^2 + (1.26) * (2.7 - 2.95)^2 - 2(0.78)(14.8 - 15.3)(2.7 - 2.95)]$$

$$(0.81) * (14.8 - 15.3)^2 = (0.81) * (-0.5)^2 = 0.203$$

$$(1.26) * (2.7 - 2.95)^2 = (1.26) * (-0.25)^2 = 0.079$$

$$2(0.78)(14.8 - 15.3)(2.7 - 2.95) = 1.56(-0.5)(-0.25) = 0.195$$

$$T^2{}_2 = 19.371[0.203 + 0.079 - 0.195] = 19.371[0.087] = 1.69$$

و هكذا لبقية العينات.

تمرين: اذا علمت ان:

$P = 2$: عدد المتغيرات ، $n = 5$: حجم العينة ، $k = 20$: عدد العينات.

$F_{0.05,2,100-20-2+1} = F_{0.05,2,79} \cong F_{0.05,2,79} \cong 3.1$: قيمة جدولية

وان $\bar{\bar{X}}_1 = 20.4$ ، $\bar{\bar{X}}_2 = 6.2$

$\bar{S}^2{}_1 = 1.2$

$\bar{S}^2{}_2 = 0.82$

$\bar{S}_{12} = 0.79$

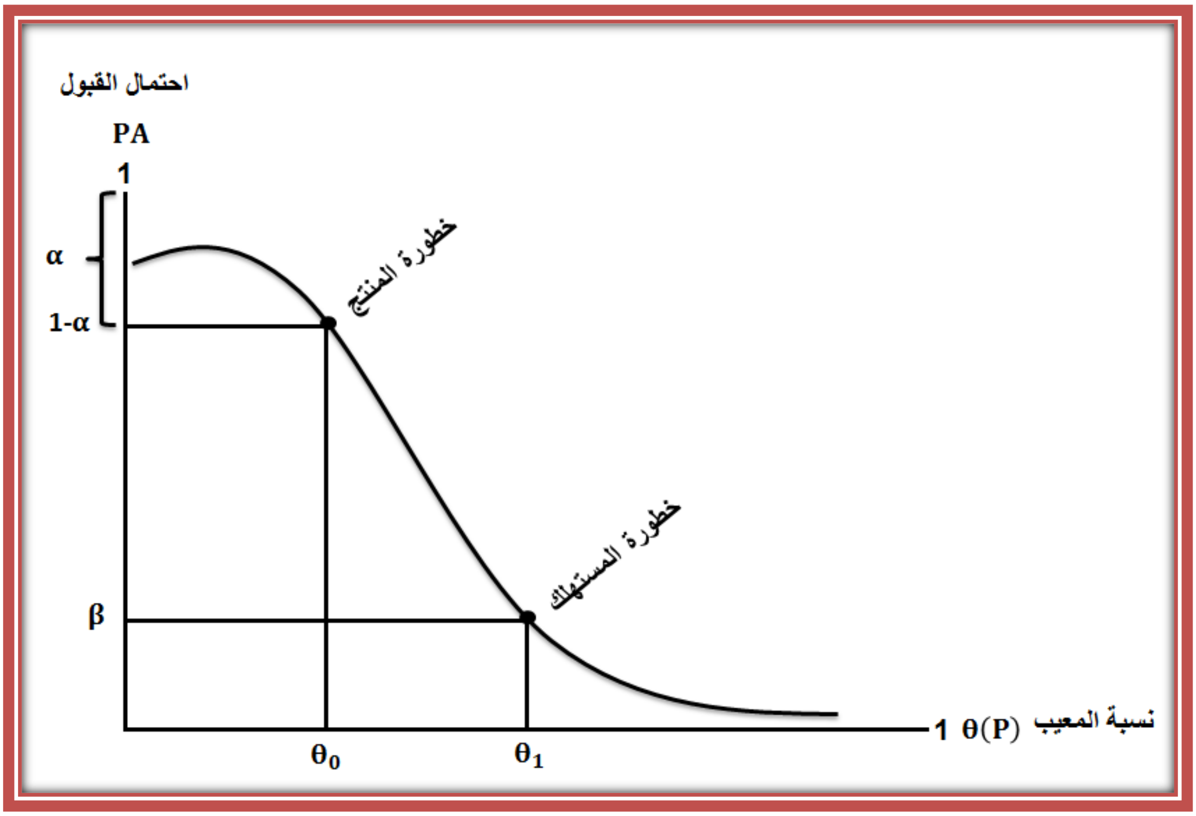
المطلوب: ارسم لوحة متعدد المتغيرات بأخذ $\alpha = 0.05$ ، ثم حدد اذا كانت العينة التي وسطيها

$\bar{X}_1 = 19$ ، $\bar{X}_2 = 5.2$ ، تحت السيطرة.

المحاضرة (5) : الفحص بالمعاينة وخططها: (Sampling inspection and its plans)

منحنى خاصية التشغيل: وهو عبارة عن رسم بياني يمثل العلاقة بين مستوى النوعية متمثلاً بمعيار نسب المعيب واحتمال القبول.

ويمكن التعبير عن ذلك وفق الرسم الآتي:



(منحنى خاصية التشغيل)

خطورة المنتج: وتتمثل باحتمال رفض دفعة انتاج جيدة وقيمتها الاحتمالية α .

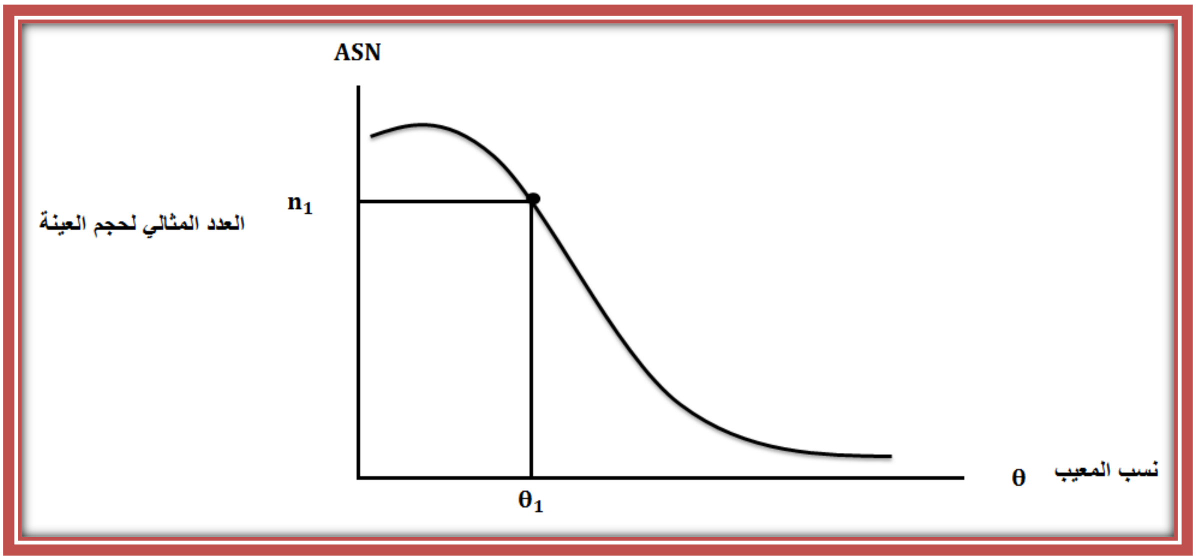
خطورة المستهلك: وتتمثل باحتمال قبول دفعة انتاج رديء وقيمتها الاحتمالية β .

عدد القبول: يمثل احد المعايير الرئيسية في خطط المعاينة وفي حالة الفحص بالصفات التمييزية يكون عدد القبول عبارة عن عدد العيوب او عدد الوحدات المعيبة التي يسمح بقبولها لقبول دفعة الانتاج ، وفي حالة الفحص للمتغيرات تتمثل بقيمة مثالية او معيارية يتطلب عدم تجاوزها لقبول دفعة الانتاج.

العدد المتوسط للعينة: وهو عبارة عن حجم العينة المتوقع للوصول الى اتخاذ قرار بقبول او رفض دفعة الانتاج ويمكن استخراجه وفق الصيغة التالية:

$$ASN = n + (1 - \beta)(N - n)$$

كذلك يمكن رسم منحنى العدد المتوسط للعينة ASN بجعل المحور الافقي لنسب المعيب والمحور العمودي لقيم العدد المتوسط للعينة ASN.



(منحنى العدد المتوسط للعينة ASN)

انواع خطط المعاينة:

يوجد نوعين من اساليب الفحص بالمعاينة هما الفحص بالمعاينة للمتغيرات والفحص بالمعاينة للخواص وهنالك اربعة انواع رئيسية من خطط الفحص بالمعاينة وهي:

1. خطة المعاينة المفردة.
2. خطة المعاينة المزدوجة.
3. خطة المعاينة متعددة المراحل.
4. خطة المعاينة التتابعية.

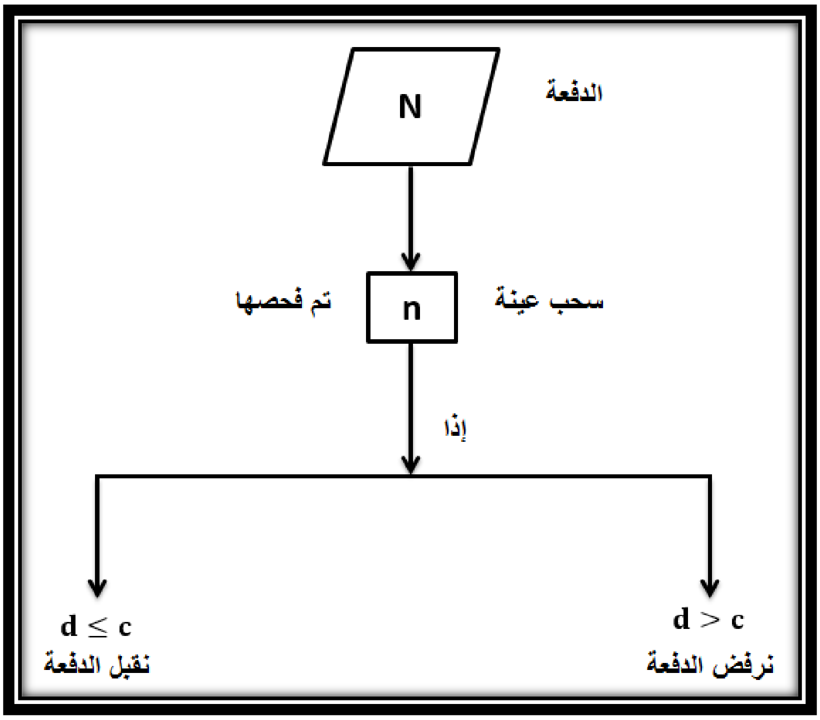
اولاً : خطة المعاينة المفردة: (Single Sampling Plan)

وهي من ابسط انواع الخطط واسهلها لوضوح خطواتها وتتطلب معرفة حجم العينة المراد سحبها (n) ، وكذلك عدد القبول (c) ، وتكون خطواتها بالشكل الآتي:

1) نحدد الدفعة المراد فحصها وهي تمثل المجتمع (N).
2) يتم سحب عينة بحجم (n) من الدفعة (N).
3) يتم فحص مفردات العينة من الوحدات المسحوبة ومقارنتها بالمعايير المحددة مسبقاً وتحديد عدد الوحدات غير المطابقة (المعيبة) (d) التي تم تأشيرها.
4) مقارنة عدد الوحدات غير المطابقة (d) مع عدد القبول (c) ، واتخاذ القرار بقبول او رفض الدفعة وفقاً لما يلي:

⇐ إذا كان عدد الوحدات غير المطابقة (d) اقل من او يساوي عدد القبول (c) اي ان ($d \leq c$) ، نقبل دفعة الانتاج وتصحيح او تبديل الوحدات المعيبة.

⇐ إذا كان عدد الوحدات غير المطابقة (d) اكبر من عدد القبول (c) اي ان ($d > c$) ، ترفض دفعة الانتاج و يمكن معالجة ذلك بإجراء الفحص الشامل ان امكن ، ثم معالجة الوحدات غير المطابقة (D) في الدفعة (N). والشكل التوضيحي لخطة المعاينة المفردة هو الآتي:



الشكل التوضيحي لخطة المعاينة المفردة

ثانياً : خطة المعاينة المزدوجة: (Double Sampling Plan)

بالرغم من بساطة النوع الأول من الخطط (خطة المعاينة المفردة) ، فإن من العيوب المحددة هو إمكانية رفض دفعة انتاج جيدة لاسباب تتعلق بعاملي **الصدفة** و **التحيز** ، ولغرض الوصول الى القرار السليم تم وضع خطة المعاينة المزدوجة والتي استخدمت في العام 1929م ، من قبل (Dodge-Roming) ، وتتطلب المعاينة المزدوجة سحب عينتين (n_1, n_2) وعلى مرحلتين وتحديد عدد القبول لكل منهما (c_1, c_2)، ولا بد من توفر المعلومات التالية:

(N): حجم الدفعة او المجتمع.
(n_1) : حجم العينة الأولى التي تسحب في المرحلة الأولى.
(n_2) : حجم العينة الثانية التي تسحب في المرحلة الثانية.
(d_1) : عدد الوحدات غير المطابقة في العينة الأولى (n_1).
(d_2) : عدد الوحدات غير المطابقة في العينة الثانية (n_2).
(c_1) : عدد القبول في المرحلة الأولى للعينة الأولى (n_1).
(c_2) : عدد القبول في المرحلة الثانية للعينتين الأولى والثانية (n_1, n_2) ، (يمكن اعتباره عدد الرفض للمرحلة الأولى).

وتكون خطواتها بالشكل الآتي:

1. نحدد الدفعة المراد فحصها وهي تمثل المجتمع (N).
2. يتم سحب العينة الأولى (n_1) ويتم فحص مفرداتها وتحديد عدد الوحدات غير المطابقة (d_1) ، ويتم اتخاذ القرار بالمقارنة مع عددي القبول (c_1, c_2) بواحدة من ثلاث:

⇐ **إذا كان عدد الوحدات غير المطابقة (d_1) اصغر من او يساوي عدد القبول (c_1) اي ان $(d_1 \leq c_1)$ ، نقبل دفعة الانتاج ونتوقف مع معالجة الوحدات غير المطابقة او إبدالها.**

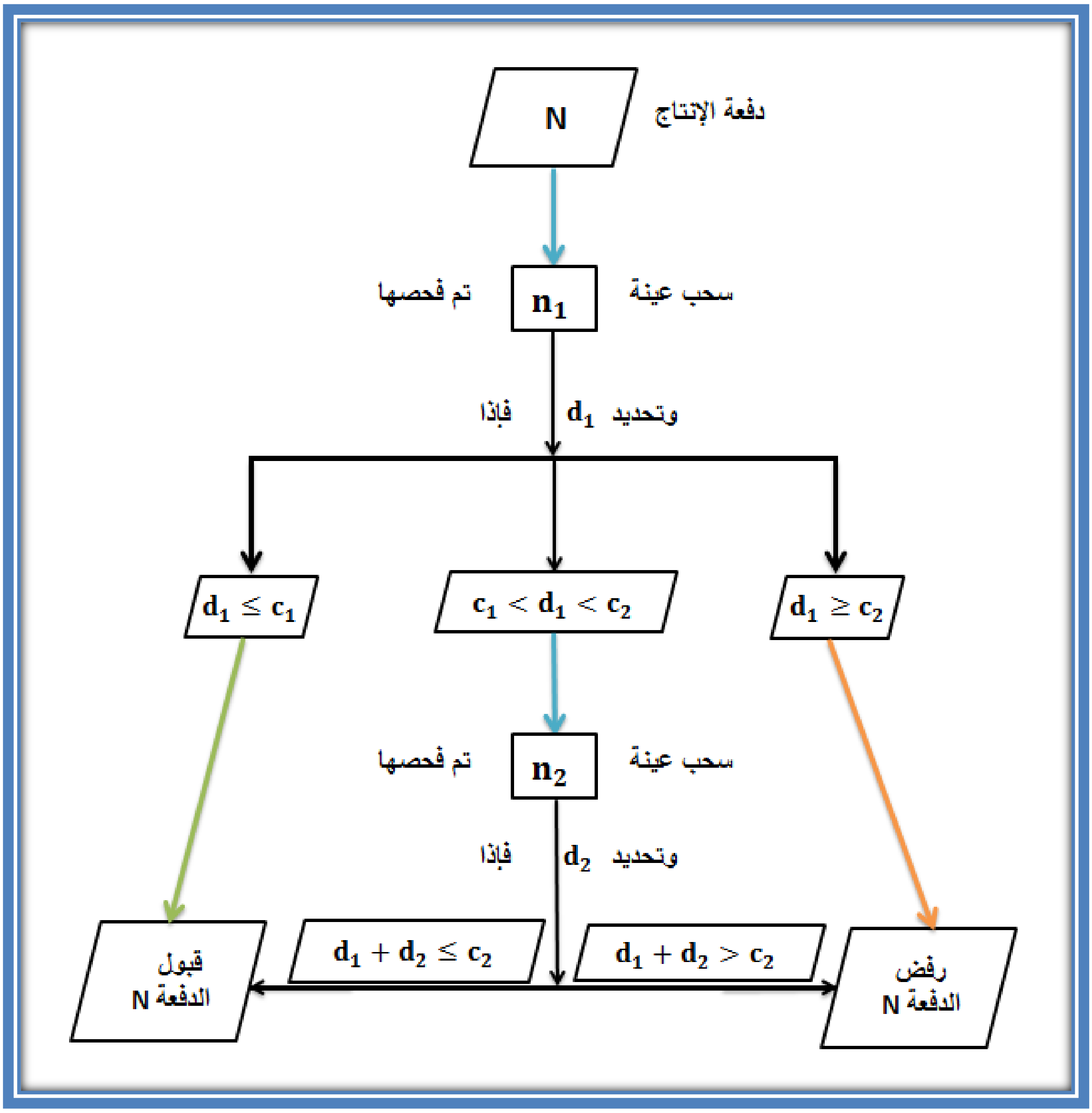
⇐ **إذا كان عدد الوحدات غير المطابقة (d_1) اكبر من او يساوي عدد القبول (c_2) اي ان $(d_1 \geq c_2)$ ، نرفض دفعة الإنتاج ونتوقف وتتم المعالجة باستخدام الفحص الشامل ان امكن.**

⇐ **اذا كان $c_1 < d_1 < c_2$ ، أي ان (d_1) اكبر من (c_1) واصغر من (c_2) نتجه لسحب عينة ثانية (n_2).**

3. يتم سحب العينة الثانية (n_2) ويتم فحص مفرداتها وتحديد عدد الوحدات غير المطابقة (d_2) ، ويتم اتخاذ القرار بعد المقارنة مع عددي القبول (c_1, c_2) وفقاً لما يلي:

⇐ إذا كان مجموع عدد الوحدات غير المطابقة للعينتين $(d_1 + d_2)$ اصغر من او يساوي عدد القبول (c_2) اي ان $(d_1 + d_2 \le c_2)$ ، نقبل دفعة الانتاج ونتوقف مع معالجة الوحدات غير المطابقة.

⇐ إذا كان مجموع عدد الوحدات غير المطابقة $(d_1 + d_2)$ اكبر من عدد القبول (c_2) اي ان $(d_1 + d_2 > c_2)$ ، ترفض دفعة الإنتاج ونلجأ الى الفحص الشامل ومعالجة الوحدات غير المطابقة، والشكل الآتي يوضح خطة المعاينة المزدوجة:



الشكل التوضيحي لخطة المعاينة المزدوجة

ثالثاً : خطة المعاينة متعددة المراحل: (Multiple Sampling Plan)

وهي الخطة المقترحة من قبل (Bartky) عام 1943 قبل ان تجرى عليها بعض التعديلات عام 1950 من قبل (Hamaker&Enters) ، لانهُ بالرغم من ان خطة المعاينة المزدوجة تعطي فرصة ثانية لإتخاذ القرار لكن يبقى الشك في عدم كفاية اتخاذ قرار بمرحلتين وانهُ بالإمكان تكرار المحاولات والاستمرار بسحب عينات أخرى ، (سحب عينة ثالثة ، رابعة ، ... الخ) وفي الغالب تتم عملية سحب العينات متعددة المراحل الى حد المرحلة السابعة او المرحلة الثامنة باتباع نفس الإجراءات المتبعة في خطة المعاينة المزدوجة.

إذاً خطة المعاينة متعددة المراحل تمثل تطوير لخطة المعاينة المزدوجة وتستند الى الاستمرار بسحب العينات لغاية اتخاذ القرار السليم بقبول او رفض دفعة الإنتاج من خلال تحديد معياري عدد القبول (c) وعدد الرفض (r) لكل مرحلة من المراحل مع إمكانية اخذ العينات بحجوم متساوية وللمراحل كافة.

وتكون خطواتها بالشكل الآتي:

1. نحدد الدفعة المراد فحصها وهي تمثل المجتمع (N).
2. يتم سحب العينة الأولى (n_1) ويتم فحص مفرداتها وتحديد عدد الوحدات غير المطابقة (d_1) ، ويتم اتخاذ القرار بالمقارنة مع عدد القبول (c_1) وعدد الرفض (r_1) بواحدة من ثلاث:

⇐ إذا كان عدد الوحدات غير المطابقة (d_1) اصغر من او يساوي عدد القبول (c_1) اي ان $(d_1 \leq c_1)$ ، نقبل دفعة الانتاج ونتوقف مع معالجة الوحدات غير المطابقة او إبدالها.

⇐ إذا كان عدد الوحدات غير المطابقة (d_1) اكبر من او يساوي عدد الرفض (r_1) اي ان $(d_1 \geq r_1)$ ، نرفض دفعة الإنتاج ونتوقف وتتم المعالجة باستخدام الفحص الشامل ان امكن.

⇐ اذا كان $c_1 < d_1 < r_1$ ، أي ان (d_1) اكبر من (c_1) واصغر من (r_1) نتجه لسحب عينة ثانية (n_2).

3. يتم سحب العينة الثانية (n_2) ويتم فحص مفرداتها وتحديد عدد الوحدات غير المطابقة (d_2) ، ويتم اتخاذ القرار بعد المقارنة مع عدد القبول (c_2) وعدد الرفض (r_2) بواحدة من ثلاث وفقاً لما يلي:

⇐ إذا كان مجموع عدد الوحدات غير المطابقة للعينتين $(d_1 + d_2)$ اصغر من او يساوي عدد القبول (c_2) اي ان $(d_1 + d_2 \leq c_2)$ ، نقبل دفعة الانتاج ونتوقف مع معالجة الوحدات غير المطابقة.

⇐ إذا كان مجموع عدد الوحدات غير المطابقة $(d_1 + d_2)$ اكبر من او يساوي عدد الرفض (r_2) اي ان: $(d_1 + d_2 \geq r_2)$ ، ترفض دفعة الإنتاج ونلجأ الى الفحص الشامل ومعالجة الوحدات غير المطابقة.

⇐ اذا كان $c_2 < d_1 + d_2 < r_2$ ، أي ان $(d_1 + d_2)$ اكبر من (c_2) واصغر من (r_2) نتجه لسحب عينة ثالثة (n_3).

4. يتم سحب العينة الثالثة (n_3) ويتم فحص مفرداتها وتحديد عدد الوحدات غير المطابقة (d_3) ، ويتم اتخاذ القرار بعد المقارنة مع عدد القبول (c_3) وعدد الرفض (r_3) بواحدة من ثلاث وفقاً لما يلي:

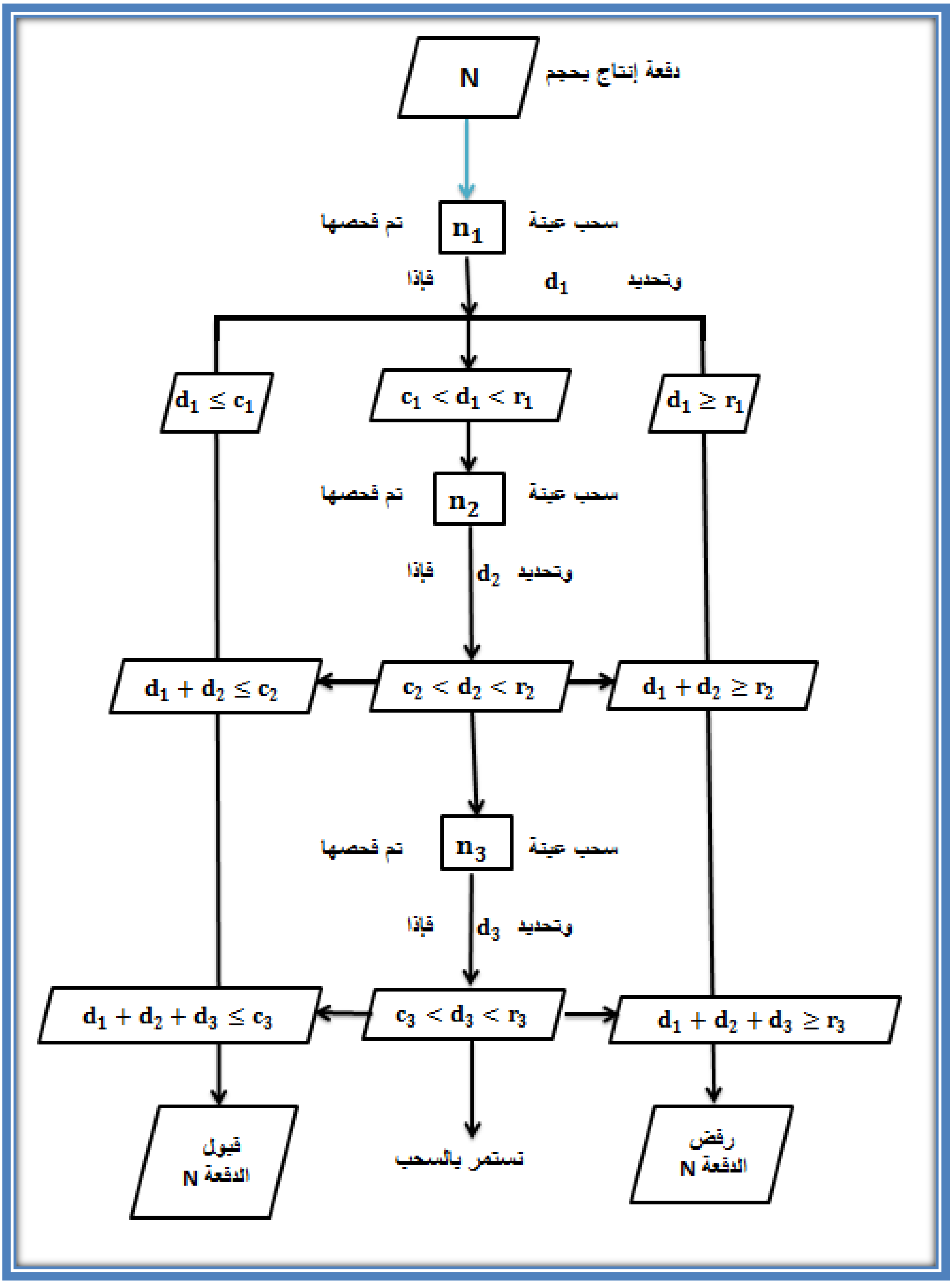
⇐ إذا كان مجموع عدد الوحدات غير المطابقة للعينتين $(d_1 + d_2 + d_3)$ اصغر من او يساوي عدد القبول (c_3) اي ان $(d_1 + d_2 + d_3 \leq c_3)$ ، نقبل دفعة الانتاج ونتوقف مع معالجة الوحدات غير المطابقة.

⇐ إذا كان مجموع عدد الوحدات غير المطابقة $(d_1 + d_2 + d_3)$ اكبر من او يساوي عدد الرفض (r_3) اي ان: $(d_1 + d_2 + d_3 \geq r_3)$ ، ترفض دفعة الإنتاج ونلجأ الى الفحص الشامل ومعالجة الوحدات غير المطابقة.

⇐ اذا كان $c_3 < d_1 + d_2 + d_3 < r_3$ ، أي ان $(d_1 + d_2 + d_3)$ اكبر من (c_3) واصغر من (r_3) نسحب عينة رابعة (n_4).

وهكذا نستمر بالفحص عينة بعد أخرى الى ان نقبل دفعة الإنتاج وفقاً للإجراءات السابقة في أعلاه على ان لا تتجاوز المرحلة السابعة او الثامنة ثم نتوقف.

ملاحظة: عدد القبول يكون اقل من عدد الرفض

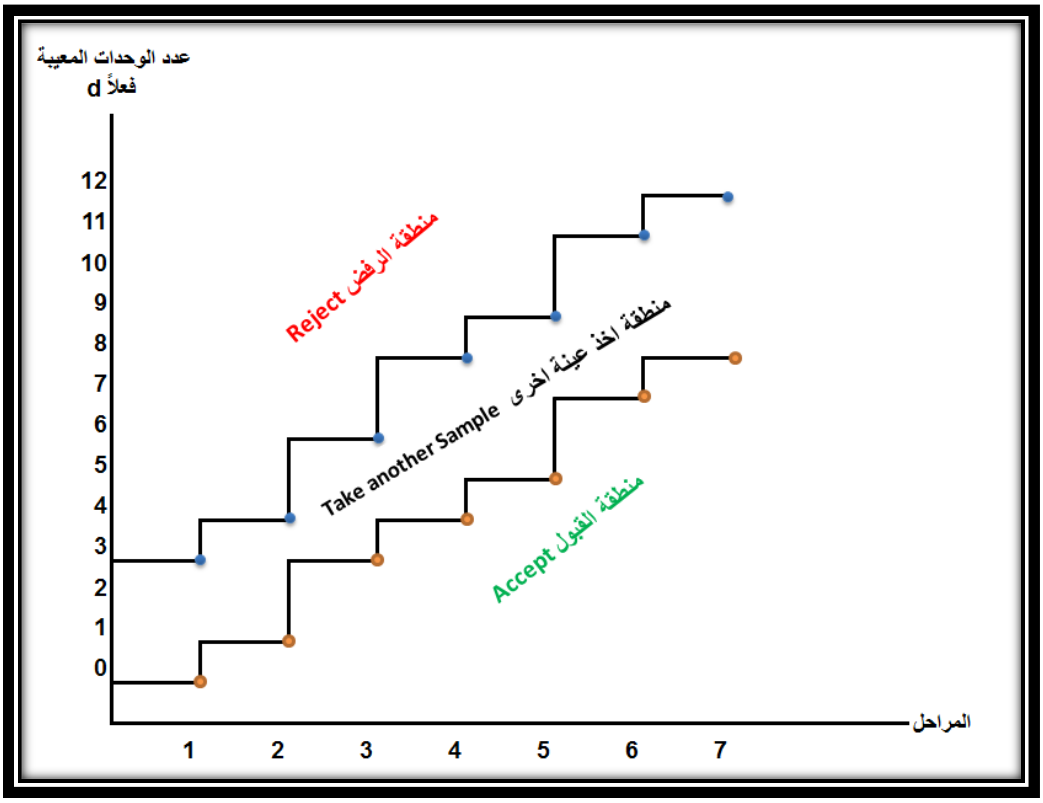


الشكل التوضيحي لخطة المعاينة متعددة المراحل

مثال: الجدول في الأدنى يوضح اعداد القبول (c) ، و اعداد الرفض (r) ، لخطة معاينة بسبعة مراحل اخذت بحجم 15 وحدة في كل مرة تضاعفياً ، والمطلوب رسم بياني يوضح مناطق القرار الثلاثة (منطقة الرفض ، منطقة القبول ، منطقة اخذ عينات أخرى)

المرحلة	c	r
1	0	3
2	1	4
3	3	6
4	4	8
5	5	9
6	7	11
7	8	12

الحل:



رسم بياني: يوضح المناطق الثلاثة

7-5. خطة المعاينة التتابعية Sequential Sampling Plan

في الخطط الثلاث السابقة يتم تحديد حجم العينة مسبقاً وإن معدل الوحدات (المفردات) المفحوصة في خطة المعاينة في المتعددة أقل من المزدوجة التي بدورها أقل من المفردة مع أن المزدوجة تعطينا فرص أخرى لاتخاذ القرار بسحب عينات جديدة، لذلك جاءت خطة المعاينة التتابعية بأن يكون حجم العينة متغير مرحلة بعد أخرى وغير محدد (عشوائياً) بالاعتماد على نتائج الفحص التي تتميز بأن القرار يؤخذ بعد فحص كل مفردة من العينة بالاعتماد على نسبة الاحتمال التتابعي (Sequential Prob-Ratio SPR) لذلك تسمى هذه الخطة item – by – item sequential sampling (طورها العالم Wald 1947)

حيث أن:

$$SPR = \frac{P_2\, n}{P_1\, n}$$

148

وتمثل: P_1 ، P_2 مستويات النوعية باحتمال قبول $(\beta, 1-\alpha)$وتتبع وحدات العينة $(x_1, \dots, x_n)$ توزيع ذي الحدين.

ويتم اتخاذ القرار وفق الحالات التالية:

أولاً: يتم رفض الدفعة عندما: $\frac{P_2\, n}{P_1\, n} \geq A$ حيث أن: $A > 1 \approx \frac{1-\beta}{\alpha}$

ثانياً: يتم قبول الدفعة عندما: $\frac{P_2\, n}{P_1\, n} \leq B$ حيث أن: $B < 1 \approx \frac{\beta}{1-\alpha}$

ثالثاً: الاستمرار وأخذ مفردة أخرى عندما: $B < \frac{P_2\, n}{P_1\, n} < A$

كما ويمكن ان نحدد حالات الرفض والقبول في خطة المعاينة التتابعية من خلال رسم خط القبول (Acceptance line) وخط الرفض (Rejection line) بموجب المعادلتين التالتين:

$$X_a = -h_1 + Sn \quad \dots\dots\dots \text{ معادلة خط القبول}$$

$$X_r = -h_2 + Sn \quad \dots\dots\dots \text{ معادلة خط الرفض}$$

حيث ان

$$h_1 = (\log \tfrac{1-\alpha}{\beta})/K$$

$$h_2 = (\log \tfrac{1-\beta}{\alpha})/K$$

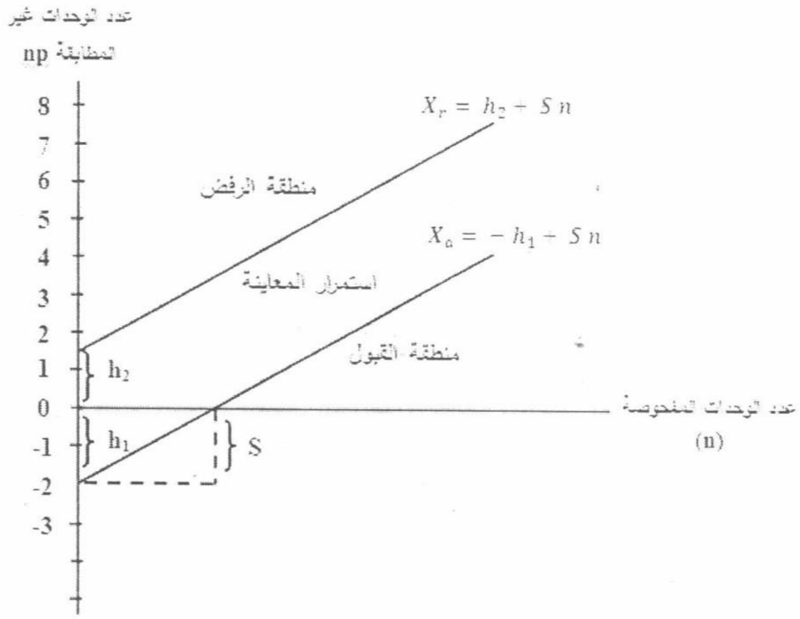
$$K = \log \frac{P_2(1-P_1)}{P_1(1-P_2)}$$

$$S = \log[(1-P_1)/(1-P_2)]/K$$

$n =$ عدد الوحدات المفحوصة

149

ونلاحظ ان قيم $(\alpha, \beta, P_1, P_2)$ يجب ان تحدد لاستخراج معالم المعادلتين (S, h_1, h_2) والشكل التالي يبين رسم خطي القبول والرفض ومناطقهما اضافة الى منطقة استمرار المعاينة.



شكل (5.7) التمثيل البياني لخطة المعاينة التتابعية

ويتم اتخاذ القرار بعد رسم النقطة (n,np) فاذا كانت واقعة على الخط X_a (خط القبول) او اسفل منه نقبل الدفعة ، وترفض الدفعة اذا كانت على الخط X_r (خط الرفض) او اعلا منه ، ونستمر بالمعاينة اذا كانت بين الخطين مع ملاحظة ان اعداد الرفض والقبول تكون صحيحة(بدون كسور).

تمارين الفصل الخامس

ت1 عرف كل من : الفحص ،الفحص بالمعاينة ، الفحص الشامل ، خطة الفحص بالمعاينة ؟

ت2 متى يتم اللجوء الى كل من الفحص الشامل والفحص بالمعاينة ؟

ت3 ما هي أنواع المخالفات (العيوب) في العملية الانتاجية ؟

ت4 أذكرأهم مزايا خطة المعاينة المفردة ؟

ت5 عرف كل من : منحنى خاصية التشغيل ، العدد المتوسط للعينة ، معدل الكمية المفحوصة ،معدل النوعية المصدرة ؟

ت6 بين خطوات خطة المعاينة المفردة مع الشكل التوضيحي ؟

ت7 بين خطوات = = المزدوجة = = = ؟

ت8 ماذا يقصد ب = = المتعددة المراحل مع مثال توضيحي ؟

ت9 = = = = التتابعية مع الشكل التوضيحي ؟