المحاضرة (1) / لوحة الأوساط الحسابية المتحركة

1- مقدمة في لوحات سيطرة وتقنيات إحصائية أخرى:

كما سبق ذكره يعود ظهور لوحة شيوارت وتطبيقاتها الى أوائل القرن العشرين ، وظهرت بعدها محاولات عديدة لتطوير ما بدأ به شيوارت ، و ظهر علماء كثر في هذا المجال وتم التركيز على ما يعاب على لوحة شيوارت من انها اقل حساسية في كشف التغيرات الصغيرة المستمرة والمتوسطة وبالذات تغير متوسط العملية ومحاولة خفض حدود السيطرة الى اقل من ثلاث انحرافات معيارية من خلال استخدام طرائق علمية وبالذات اتجه العلماء الى طرائق المتوسطات المتحركة والموزونة لخفض حدود السيطرة كونها تساعد على تقليل التذبذبات والاختلافات بين القيم مما يساعد على خفض انحرافاتها ، ويتم التركيز على الطرائق التي استخدمت أسلوب المجموع التراكمي ، الأوساط المتحركة سواء كانت حسابية ، هندسية او اسية.

سؤال (1): ما هو العيب المشخص في لوحات شيوارت ، والذي عالجته لوحات الأوساط المتحركة والمجموع المتراكم؟

الجواب: من العيوب التي يتم تحديدها على الخرائط السابقة ، انها تظهر فقط الانحرافات الكبيرة ولا تظهر الانحرافات المتوسطة أو الانحرافات الصغيرة وعلى هذا الاساس يتم التفكير بطريقة تقرب حدي السيطرة الادنى (LCL) والاعلى (UCL) الى حد السيطرة المركزي (CCL) ولكون المتوسطات المتحركة يمكن ان تساهم في تقليل التذبذبات ، فقد استخدمت لهذا الغرض ومن بينها أسلوب المجموع التراكمي ، المتوسطات المتحركة او المتوسطات الهندسية المتحركة.

2- لوحة الأوساط الحسابية المتحركة

من اهم وظائف المتوسطات المتحركة عندما تؤخذ لمجموعة من القيم المساهمة في تقليل الاختلافات وخفض قيم الانحرافات عن وسطها الحسابي وهذا المبدأ يمكن ان يساهم في خفض حدود السيطرة في كشف التغيرات الصغيرة ، وفي هذه الحالة نستخدم لوحة الأوساط الحسابية المتحركة لمراقبة متوسط مخرجات العملية سواء كانت المشاهدات فردية او مجاميع جزئية (عينات).

ان تعبير المتحرك جاء من خلال اخذ متوسط مجموعة قيم ثم تترك الفترة الاقدم وتضاف فترة لاحقة ويؤخذ المتوسط وهكذا حتى انتهاء جميع القيم ويعتمد عدد المفردات (ويسمى طول الفترة w) التي يؤخذ لها المتوسط المتحرك على مستوى التغير المراد كشفه ويفضل ان يكون طول الفترة كبيراً كلما كانت الحاجة لكشف تغيرات صغيرة ، أي ان العلاقة عكسية بين طول الفترة وطبيعة التغيرات المراد كشفها.

3- خطوات إيجاد الأوساط الحسابية المتحركة

يرمز للوسط الحسابي المتحرك بالرمز μ_i الموزون بمقلوب طول الفترة w

اذا كان لدينا k من العينات وان طول الفترة هو 3 ، هذا يعني بأن:

العينات	الأوساط الحسابية المتحركة	الصيغة للأوساط الحسابية المتحركة عندما يكون w=3
العينة 1	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 1	$\mu_1 = \frac{\bar{x}_1}{1}$
العينة 2	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 2	$\mu_2 = \frac{\bar{x}_2 + \bar{x}_1}{2}$
العينة 3	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 3	$\mu_3 = \frac{\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1}{3}$
العينة 4	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 4	$\mu_4 = \frac{\bar{x}_4 + \bar{x}_3 + \bar{x}_2}{3}$
العينة 5	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 5	$\mu_5 = \frac{\bar{x}_5 + \bar{x}_4 + \bar{x}_3}{3}$
العينة 6	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 6	$\mu_6 = \frac{\bar{x}_6 + \bar{x}_5 + \bar{x}_4}{3}$
العينة 7	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 7	$\mu_7 = \frac{\bar{x}_7 + \bar{x}_6 + \bar{x}_5}{3}$
⋮	⋮	⋮
العينة k	الوسط الحسابي المتحرك للعينة k	$\mu_k = \frac{\bar{x}_k + \bar{x}_{k-1} + \bar{x}_{k-2}}{3}$

نستنتج بأنهُ يمكن إيجاد الوسط الحسابي المتحرك وفق الصيغتين التالية:

$$\boldsymbol{\mu_t = \frac{\bar{x}_t + \bar{x}_{t-1} + \cdots + \bar{x}_1}{t} \qquad \text{if } i < w \qquad (1)}$$

$$\boldsymbol{\mu_t = \frac{\bar{x}_t + \bar{x}_{t-1} + \cdots + \bar{x}_{t-w+1}}{w} \qquad \text{if } i \geq w \qquad (2)}$$

ملاحظة: ان قيمة طول الفترة w تعطى في السؤال وعادة ما تكون قيمتها (3-5) كما تم اقتراحها من قبل بيسل (Bissell 1994).

ملاحظة: يتم تحديد $\boldsymbol{\mu_t}$ كنقاط في لوحة الاوساط المتحركة قد تكون داخل او خارج حدود السيطرة.

4- حدود السيطرة للوحة الأوساط الحسابية المتحركة

1- يتم حساب $(3\sigma_{\bar{X}})$ بالاعتماد على صيغة الثوابت $\boxed{3\sigma_{\bar{X}} = A_1\bar{S} = A_2\bar{R}}$

2- يتم حساب $3\sigma_{\mu_t}$ لكل عينة فسنلاحظ ان القيم تكون متساوية عند الوصول الى العينة المقابلة لطول الفترة (w). أي ان $\boxed{3\sigma_{\mu_t} = \frac{3\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{w}}}$

3- يتم حساب الحد الادنى **LCL لكل عينة** ، والحد الاعلى **UCL لكل عينة ايضاً** بالاعتماد على الصيغ في الادنى ، فسنلاحظ ان القيم تكون متساوية عند الوصول الى العينة المقابلة لطول الفترة (w).

$$UCL = \bar{\bar{X}} + 3\sigma_{\mu_t} = \bar{\bar{X}} + \frac{3\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{w}} = \boxed{\bar{\bar{X}} + \frac{A_1\bar{S}}{\sqrt{w}}} = \boxed{\bar{\bar{X}} + \frac{A_2\bar{R}}{\sqrt{w}}}$$

$$CCL = \bar{\bar{X}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - 3\sigma_{\mu_t} = \bar{\bar{X}} - \frac{3\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{w}} = \boxed{\bar{\bar{X}} - \frac{A_1\bar{S}}{\sqrt{w}}} = \boxed{\bar{\bar{X}} - \frac{A_2\bar{R}}{\sqrt{w}}}$$

حيث ان:

A_1 : قيمة جدولية ، يتم استخراجها بالاعتماد على حجم العينة وفي حالة اعطاء قيم الانحراف المعياري في السؤال او متوسط الانحراف المعياري للعينات.

A_2 : قيمة جدولية ، يتم استخراجها بالاعتماد على حجم العينة وفي حالة اعطاء قيم المدى في السؤال او متوسط المدى للعينات.

س/ اثبت الصيغة $\boxed{\sigma_{\mu_t} = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{w}}}$

الاثبات:

$$\because \sigma^2{}_{\mu_t} = \frac{\sigma^2}{nw}$$

$$\therefore \sigma_{\mu_t} = \frac{\sigma}{\sqrt{nw}} = \frac{1}{\sqrt{w}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\because \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\boxed{\sigma_{\mu_t} = \frac{\sigma}{\sqrt{nw}} = \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{w}}}$$

مثـال (1): مـن انتـاج احـدى المـواد الصـناعية اخـذت (20) عينـة بأوقـات منتظمـة ، وبحجـم (n=5) وحدات ، وتم تسجيل البيانات التالية:

	X1	X2	X3	X4	X5
Sample1	**469**	**468**	**470**	**469**	**468**
Sample2	**478**	**467**	**460**	**469**	**468**
Sample3	**467**	**478**	**462**	**469**	**468**
Sample4	**471**	**469**	**470**	**460**	**459**
Sample5	**467**	**468**	**459**	**460**	**470**
Sample6	**469**	**471**	**468**	**469**	**461**
Sample7	**469**	**470**	**469**	**469**	**470**
Sample8	**469**	**469**	**468**	**469**	**472**
Sample9	**459**	**466**	**469**	**469**	**459**
Sample10	**468**	**469**	**469**	**465**	**469**
Sample11	**469**	**470**	**469**	**471**	**469**
Sample12	**468**	**472**	**470**	**469**	**469**
Sample13	**466**	**469**	**471**	**459**	**468**
Sample14	**469**	**469**	**468**	**469**	**468**
Sample15	**459**	**469**	**469**	**468**	**468**
Sample16	**460**	**468**	**469**	**468**	**459**
Sample17	**469**	**466**	**468**	**470**	**469**
Sample18	**470**	**459**	**468**	**461**	**471**
Sample19	**467**	**468**	**470**	**469**	**469**
Sample20	**466**	**468**	**469**	**469**	**470**

المطلـوب: حـدد اذا كانـت العمليـة تحـت السـيطرة مسـتخدماً لوحـة الأوسـاط الحسـابية المتحركـة بأخـذ (w=5).

الحل: للبيانات المعطاة في السؤال يمكن إيجاد الوسط الحسابي والمدى للعينات وكما في الجدول الآتي :

	X1	X2	X3	X4	X5	Mean	Max	Min	Range
Sample1	**469**	**468**	**470**	**469**	**468**	**468.8**	**470**	**468**	**2**
Sample2	**478**	**467**	**460**	**469**	**468**	**468.4**	**478**	**460**	**18**
Sample3	**467**	**478**	**462**	**469**	**468**	**468.8**	**478**	**462**	**16**
Sample4	**471**	**469**	**470**	**460**	**459**	**465.8**	**471**	**459**	**12**
Sample5	**467**	**468**	**459**	**460**	**470**	**464.8**	**470**	**459**	**11**
Sample6	**469**	**471**	**468**	**469**	**461**	**467.6**	**471**	**461**	**10**
Sample7	**469**	**470**	**469**	**469**	**470**	**469.4**	**470**	**469**	**1**
Sample8	**469**	**469**	**468**	**469**	**472**	**469.4**	**472**	**468**	**4**
Sample9	**459**	**466**	**469**	**469**	**459**	**464.4**	**469**	**459**	**10**
Sample10	**468**	**469**	**469**	**465**	**469**	**468**	**469**	**465**	**4**
Sample11	**469**	**470**	**469**	**471**	**469**	**469.6**	**471**	**469**	**2**
Sample12	**468**	**472**	**470**	**469**	**469**	**469.6**	**472**	**468**	**4**
Sample13	**466**	**469**	**471**	**459**	**468**	**466.6**	**471**	**459**	**12**
Sample14	**469**	**469**	**468**	**469**	**468**	**468.6**	**469**	**468**	**1**
Sample15	**459**	**469**	**469**	**468**	**468**	**466.6**	**469**	**459**	**10**
Sample16	**460**	**468**	**469**	**468**	**459**	**464.8**	**469**	**459**	**10**
Sample17	**469**	**466**	**468**	**470**	**469**	**468.4**	**470**	**466**	**4**
Sample18	**470**	**459**	**468**	**461**	**471**	**465.8**	**471**	**459**	**12**
Sample19	**467**	**468**	**470**	**469**	**469**	**468.6**	**470**	**467**	**3**
Sample20	**466**	**468**	**469**	**469**	**470**	**468.4**	**470**	**466**	**4**
متوسط المقاييس						467.6			7.5

$$\mu_t = \frac{\bar{x}_t + \bar{x}_{t-1} + \cdots + \bar{x}_1}{t} \qquad \text{if } i < w \qquad (1)$$

$$\mu_t = \frac{\bar{x}_t + \bar{x}_{t-1} + \cdots + \bar{x}_{t-w+1}}{w} \qquad \text{if } i \geq w \qquad (2)$$

$$\mu_1 = \frac{\bar{x}_1}{1} = 468.8$$

$$\mu_2 = \frac{\bar{x}_2 + \bar{x}_1}{2} = \frac{468.4 + 468.8}{2} = 468.6$$

$$\mu_3 = \frac{\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1}{3} = \frac{468.8 + 468.4 + 468.8}{3} = 468.7$$

$$\mu_4 = \frac{\bar{x}_4 + \bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1}{4} = \frac{465.8 + 468.8 + 468.4 + 468.8}{4} = 468$$

$$\mu_5 = \frac{\bar{x}_5 + \bar{x}_4 + \bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1}{5} = \frac{464.8 + 465.8 + 468.8 + 468.4 + 468.8}{5} = 467.3$$

$$\mu_6 = \frac{\bar{x}_6 + \bar{x}_5 + \bar{x}_4 + \bar{x}_3 + \bar{x}_2}{5} = \frac{467.6 + 464.8 + 465.8 + 468.8 + 468.4}{5} = 467.1$$

$$\mu_7 = \frac{\bar{x}_7 + \bar{x}_6 + \bar{x}_5 + \bar{x}_4 + \bar{x}_3}{5} = \frac{469.4 + 467.6 + 464.8 + 465.8 + 468.8}{5} = 467.3$$

$$\mu_8 = \frac{\bar{x}_8 + \bar{x}_7 + \bar{x}_6 + \bar{x}_5 + \bar{x}_4}{5} = \frac{469.4 + 469.4 + 467.6 + 464.8 + 465.8}{5} = 467.4$$

$$\mu_9 = \frac{\bar{x}_9 + \bar{x}_8 + \bar{x}_7 + \bar{x}_6 + \bar{x}_5}{5} = \frac{464.4 + 469.4 + 469.4 + 467.6 + 464.8}{5} = 467.1$$

$$\mu_{10} = \frac{\bar{x}_{10} + \bar{x}_9 + \bar{x}_8 + \bar{x}_7 + \bar{x}_6}{5} = \frac{468 + 464.4 + 469.4 + 469.4 + 467.6}{5} = 467.8$$

وهكذا لبقية العينات ، سيتم توضيحها في الجدول الاتي:

ولايجاد حدود السيطرة نجد الآتي :

$$n = 5 \sim A_2 = 0.577 \implies 3\sigma_{\bar{X}} = A_2\bar{R} = (0.577)(7.5) \cong \boxed{4.328}$$

$$UCL = \bar{\bar{X}} + \frac{A_2\bar{R}}{\sqrt{w}}$$

$$CCL = \bar{\bar{X}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - \frac{A_2\bar{R}}{\sqrt{w}}$$

ملاحظة : تطبق حدود السيطرة لكل عينة من العينات وتتساوى القيم عندما نصل لطول الفترة (w=5) وكما معطى في السؤال.

حدود السيطرة للعينة (1)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{1}}} = 467.6 + 4.328 \cong 471.9$$

$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{1}}} = 467.6 - 4.328 \cong 463.3$$

حدود السيطرة للعينة (2)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{2}}} = 467.6 + 3.06 \cong 470.7$$

$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{2}}} = 467.6 - 3.06 \cong 464.6$$

حدود السيطرة للعينة (3)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{3}}} = 467.6 + 2.499 \cong 470.1$$

$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{3}}} = 467.6 - 2.499 \cong 465.1$$

حدود السيطرة للعينة (4)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{4}}} = 467.6 + 2.164 \cong 469.8$$

$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{4}}} = 467.6 - 2.164 \cong 465.5$$

حدود السيطرة للعينة (5)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{5}}} = 467.6 + 1.936 \cong 469.6$$

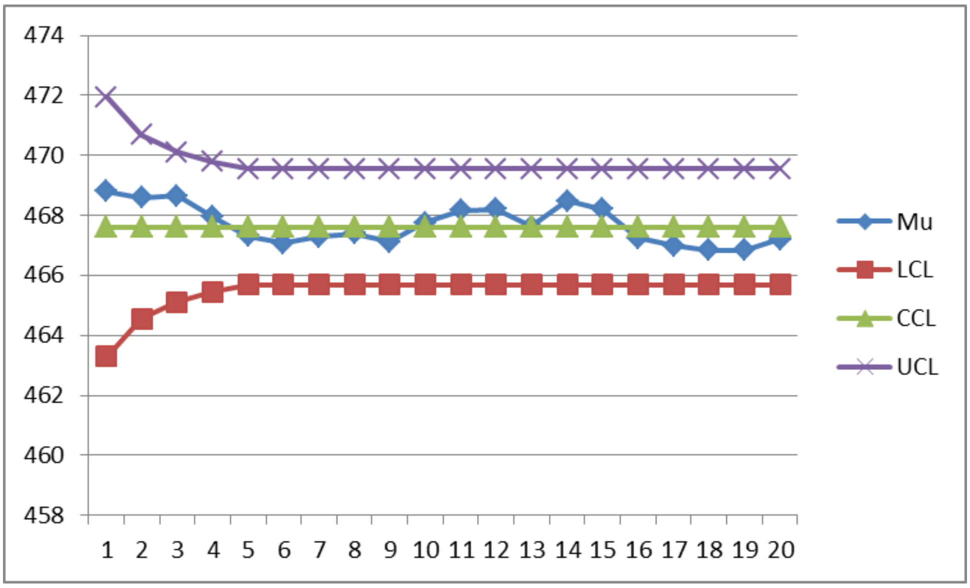
$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{5}}} = 467.6 - 1.936 \cong 465.7$$

اما حدود السيطرة لبقية العينات فتتساوى قيمها مع حدود السيطرة للعينة (5) ، وكما موضح بالجدول الآتي :

	Mu	LCL	CCL	UCL
Sample1	468.8	463.3	467.6	471.9
Sample2	468.6	464.6	467.6	470.7
Sample3	468.7	465.1	467.6	470.1
Sample4	468	465.5	467.6	469.8
Sample5	467.3	465.7	467.6	469.6
Sample6	467.1	465.7	467.6	469.6
Sample7	467.3	465.7	467.6	469.6
Sample8	467.4	465.7	467.6	469.6
Sample9	467.1	465.7	467.6	469.6
Sample10	467.8	465.7	467.6	469.6
Sample11	468.2	465.7	467.6	469.6
Sample12	468.2	465.7	467.6	469.6
Sample13	467.6	465.7	467.6	469.6
Sample14	468.5	465.7	467.6	469.6
Sample15	468.2	465.7	467.6	469.6
Sample16	467.2	465.7	467.6	469.6
Sample17	467.0	465.7	467.6	469.6
Sample18	466.8	465.7	467.6	469.6
Sample19	466.8	465.7	467.6	469.6
Sample20	467.2	465.7	467.6	469.6

وباستعمال احد البرامج الجاهزة يمكن رسم حدود السيطرة للوحة الأوساط الحسابية المتحركة.



لوحة الأوساط الحسابية المتحركة

القرار: الإنتاج تحت السيطرة

تمـرين (1): مـن انتـاج احـدى المـواد الصـناعية اخـذت (10) عينـات بأوقـات منتظمـة ، وبحجـم (n=6) وحـدات وكـان الوسط الحسابي والمدى للعينات العشرة هو:

العينات	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{X}$	22.1	36.4	29.1	30.3	25.2	30	28.6	30.2	23.3	26.2
R	14	13	21	18	16	16	19	24	20	21

حـدد اذا كـان الانتـاج تحـت السـيطرة مسـتخدماً لوحـة المتوسـطات المتحركـة (MA – chart) ، علمـاً ان طـول الفتـرة هـو : $(\mathbf{w} = \mathbf{3})$.

تمـرين (2): للبيانــات التاليـة ، حـدد اذا كانـت العمليـة تحـت السـيطرة مسـتخدماً لوحـة الأوسـاط الحسـابية المتحركـة بأخـذ (w=4).

	X1	X2	X3	X4	X5	Mean	S.D.
Sample1	**469**	**468**	**470**	**469**	**468**	**468.8**	**0.837**
Sample2	**478**	**467**	**460**	**469**	**468**	**468.4**	**6.427**
Sample3	**467**	**478**	**462**	**469**	**468**	**468.8**	**5.805**
Sample4	**471**	**469**	**470**	**460**	**459**	**465.8**	**5.805**
Sample5	**467**	**468**	**459**	**460**	**470**	**464.8**	**4.970**
Sample6	**469**	**471**	**468**	**469**	**461**	**467.6**	**3.847**
Sample7	**469**	**470**	**469**	**469**	**470**	**469.4**	**0.548**
Sample8	**469**	**469**	**468**	**469**	**472**	**469.4**	**1.517**
Sample9	**459**	**466**	**469**	**469**	**459**	**464.4**	**5.079**
Sample10	**468**	**469**	**469**	**465**	**469**	**468**	**1.732**
Sample11	**469**	**470**	**469**	**471**	**469**	**469.6**	**0.894**
Sample12	**468**	**472**	**470**	**469**	**469**	**469.6**	**1.517**
Sample13	**466**	**469**	**471**	**459**	**468**	**466.6**	**4.615**
Sample14	**469**	**469**	**468**	**469**	**468**	**468.6**	**0.548**
Sample15	**459**	**469**	**469**	**468**	**468**	**466.6**	**4.278**
Sample16	**460**	**468**	**469**	**468**	**459**	**464.8**	**4.868**
Sample17	**469**	**466**	**468**	**470**	**469**	**468.4**	**1.517**
Sample18	**470**	**459**	**468**	**461**	**471**	**465.8**	**5.450**
Sample19	**467**	**468**	**470**	**469**	**469**	**468.6**	**1.140**
Sample20	**466**	**468**	**469**	**469**	**470**	**468.4**	**1.517**
متوسط المقاييس						467.6	3.146

المحاضرة (2) / لوحة الأوساط الحسابية المتحركة الموزونة اسياً

1- لوحة الأوساط الحسابية المتحركة الموزونة اسياً

و يرمزلهـــا بـــالرمز ($EWMA$) ، وتســـمى ايضـــاً بـــ لوحـــة الوســـط الهندســـي المتحـــرك **(The Geometric Moving Average Chart)** وتمثـل النـوع الثـاني مـن خـرائط المتوسـطات المتحركـة التـي تعتمد علـى وزن نسـبي يرمـز لـهُ بــ (λ) ويمثل ثابـت قيمتـهُ تكـون بـين الصـفر والواحد اي ان $0 \leq (\lambda) \leq 1$ ، ويتم استخراج الوسط الهندسي وفق الصيغة التالية:

$$\mathbf{Z_t = \lambda \bar{X}_t + (1-\lambda)Z_{t-1} \quad , where\ Z_0 = \bar{\bar{X}}}$$

ولرسم الخريطة يتم استخراج الانحراف المعياري للمتوسطات الهندسية وفق الصيغة التالية:

$$3\sigma_{Z_t} = 3\sigma_{\bar{X}}\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}\left(1-(1-\lambda)^{2t}\right)} \qquad , if\ t \leq 5$$

يتم تطبيق الصيغة أعلاه للعينات (1) ، و (2) ، و (3) ، و (4) ، و (5)

ملاحظة: عندما تكون $\mathbf{t}$ كبيرة (اي ان $t \to \infty$) فأن $(1-r)^{2t} = (1-r)^{2\infty} = 0$ ، يمكن اختصار صيغة الانحراف المعياري للمتوسطات الهندسية (عندما نصل للعينة السادسة) وعلى النحو التالي:

$$3\sigma_{Z_t} = 3\sigma_{\bar{X}}\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \qquad , if\ t \geq 6$$

وعند هذهِ النقطة تأخذ حدود السيطرة خطاً مستقيماً أي ان:

$$3\sigma_{Z_6} = 3\sigma_{Z_7} = \cdots = 3\sigma_{Z_k}$$

2- حدود السيطرة للوحة الأوساط الحسابية المتحركة الموزونة اسياً

ويتم استخراج حدود السيطرة وفق الصيغ التالية:

$$\mathbf{UCL = \bar{\bar{X}} + 3\sigma_{Z_t} = \boxed{\bar{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}}\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}\left(1-(1-\lambda)^{2t}\right)}}}$$

$$\mathbf{CCL = \bar{\bar{X}}}$$

$$\mathbf{LCL = \bar{\bar{X}} - 3\sigma_{Z_t} = \boxed{\bar{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}}\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}\left(1-(1-\lambda)^{2t}\right)}}}$$

نستنتج ان:

$$\mathbf{UCL_6 = UCL_7 = \cdots = UCL_k}$$

$$\mathbf{LCL_6 = LCL_7 = \cdots = LCL_k}$$

ملاحظة: يتم حساب $(3\sigma_{\bar{X}})$ بالاعتماد على صيغة الثوابت $\boxed{3\sigma_{\bar{X}} = A_1\bar{S} = A_2\bar{R}}$

مثال (1): من انتاج احدى المواد الصناعية اخذت (20) عينة بأوقات منتظمة ، وبحجم (n=5) وحدات ، وتم تسجيل البيانات التالية:

	X1	X2	X3	X4	X5
Sample1	**469**	**468**	**470**	**469**	**468**
Sample2	**478**	**467**	**460**	**469**	**468**
Sample3	**467**	**478**	**462**	**469**	**468**
Sample4	**471**	**469**	**470**	**460**	**459**
Sample5	**467**	**468**	**459**	**460**	**470**
Sample6	**469**	**471**	**468**	**469**	**461**
Sample7	**469**	**470**	**469**	**469**	**470**
Sample8	**469**	**469**	**468**	**469**	**472**
Sample9	**459**	**466**	**469**	**469**	**459**
Sample10	**468**	**469**	**469**	**465**	**469**
Sample11	**469**	**470**	**469**	**471**	**469**
Sample12	**468**	**472**	**470**	**469**	**469**
Sample13	**466**	**469**	**471**	**459**	**468**
Sample14	**469**	**469**	**468**	**469**	**468**
Sample15	**459**	**469**	**469**	**468**	**468**
Sample16	**460**	**468**	**469**	**468**	**459**
Sample17	**469**	**466**	**468**	**470**	**469**
Sample18	**470**	**459**	**468**	**461**	**471**
Sample19	**467**	**468**	**470**	**469**	**469**
Sample20	**466**	**468**	**469**	**469**	**470**

المطلوب: حدد اذا كانت العملية تحت السيطرة مستخدماً لوحة الأوساط الحسابية المتحركة الموزونة اسياً بأخذ (λ=0.3).

الحل: للبيانات المعطاة في السؤال يمكن إيجاد الوسط الحسابي والمدى للعينات وكما في الجدول الآتي :

	X1	X2	X3	X4	X5	Mean	Max	Min	Range
Sample1	**469**	**468**	**470**	**469**	**468**	**468.8**	**470**	**468**	**2**
Sample2	**478**	**467**	**460**	**469**	**468**	**468.4**	**478**	**460**	**18**
Sample3	**467**	**478**	**462**	**469**	**468**	**468.8**	**478**	**462**	**16**
Sample4	**471**	**469**	**470**	**460**	**459**	**465.8**	**471**	**459**	**12**
Sample5	**467**	**468**	**459**	**460**	**470**	**464.8**	**470**	**459**	**11**
Sample6	**469**	**471**	**468**	**469**	**461**	**467.6**	**471**	**461**	**10**
Sample7	**469**	**470**	**469**	**469**	**470**	**469.4**	**470**	**469**	**1**
Sample8	**469**	**469**	**468**	**469**	**472**	**469.4**	**472**	**468**	**4**
Sample9	**459**	**466**	**469**	**469**	**459**	**464.4**	**469**	**459**	**10**
Sample10	**468**	**469**	**469**	**465**	**469**	**468**	**469**	**465**	**4**
Sample11	**469**	**470**	**469**	**471**	**469**	**469.6**	**471**	**469**	**2**
Sample12	**468**	**472**	**470**	**469**	**469**	**469.6**	**472**	**468**	**4**
Sample13	**466**	**469**	**471**	**459**	**468**	**466.6**	**471**	**459**	**12**
Sample14	**469**	**469**	**468**	**469**	**468**	**468.6**	**469**	**468**	**1**
Sample15	**459**	**469**	**469**	**468**	**468**	**466.6**	**469**	**459**	**10**
Sample16	**460**	**468**	**469**	**468**	**459**	**464.8**	**469**	**459**	**10**
Sample17	**469**	**466**	**468**	**470**	**469**	**468.4**	**470**	**466**	**4**
Sample18	**470**	**459**	**468**	**461**	**471**	**465.8**	**471**	**459**	**12**
Sample19	**467**	**468**	**470**	**469**	**469**	**468.6**	**470**	**467**	**3**
Sample20	**466**	**468**	**469**	**469**	**470**	**468.4**	**470**	**466**	**4**
متوسط المقاييس						467.6			7.5

$\mathbf{Z_t = \lambda \bar{X}_t + (1-\lambda) Z_{t-1}}$, $\mathbf{where\ Z_0 = \bar{\bar{X}}}$

$\mathbf{Z_1} = \mathbf{0.3}(468.8) + 0.7(467.6) = 140.64 + 327.32 \cong 468$

$\mathbf{Z_2} = \mathbf{0.3}(468.4) + 0.7(467.96) = 140.52 + 327.57 = 468.1$

$\mathbf{Z_3} = \mathbf{0.3}(468.8) + 0.7(468.09) = 140.64 + 327.66 = 468.3$

وهكذا لبقية العينات ، سيتم توضيحها في الجدول التالي:

ولايجاد حدود السيطرة نجد الآتي :

$$\mathbf{n = 5 \sim A_2 = 0.577 \Rightarrow 3\sigma_{\bar{X}} = A_2\bar{R} = (0.577)(7.5) \cong \boxed{4.33}}$$

$$\mathbf{UCL} = \boxed{\bar{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}}\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}\left(1-(1-\lambda)^{2t}\right)}}$$

$$\mathbf{CCL} = \bar{\bar{X}}$$

$$\mathbf{LCL} = \boxed{\bar{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}}\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}\left(1-(1-\lambda)^{2t}\right)}}$$

ملاحظة : تطبق حدود السيطرة لكل عينة من العينات وتتساوى القيم عندما نصل للعينة (6) وكالاتي:

حدود السيطرة للعينة (1)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{\frac{\mathbf{0.3}}{\mathbf{2-0.3}}\left(\mathbf{1-(0.7)^2}\right)} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(\mathbf{1} - 0.49)}$$

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(0.51)} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.09} = 467.6 + 1.299 \cong 468.9$$

$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 - 1.299 = 466.3$$

حدود السيطرة للعينة (2)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{\frac{\mathbf{0.3}}{\mathbf{2-0.3}}\left(\mathbf{1-(0.7)^4}\right)} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(\mathbf{1} - 0.2401)}$$

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(0.7599)} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1341} = 467.6 + 1.586 \cong 469.2$$

$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 - 1.586 = 466$$

حدود السيطرة للعينة (3)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{\frac{\mathbf{0.3}}{\mathbf{2-0.3}}\left(\mathbf{1-(0.7)^6}\right)} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(\mathbf{1} - 0.1177)}$$

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(0.8823)} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1557} = 467.6 + 1.709 \cong 469.3$$

$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$\mathbf{LCL} = 467.6 - 1.709 = 465.9$

حدود السيطرة للعينة (4)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{\frac{\mathbf{0.3}}{\mathbf{2-0.3}}(\mathbf{1}-(\mathbf{0.7})^{\mathbf{8}})} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(\mathbf{1}-0.0577)}$$

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(0.9423)} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1663} = 467.6 + 1.766 \cong 469.4$$

$\mathbf{CCL} = 467.6$

$\mathbf{LCL} = 467.6 - 1.766 = 465.8$

حدود السيطرة للعينة (5)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{\frac{\mathbf{0.3}}{\mathbf{2-0.3}}(\mathbf{1}-(\mathbf{0.7})^{\mathbf{10}})} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(\mathbf{1}-0.0283)}$$

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(0.9717)} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1715} = 467.6 + 1.793 \cong 469.4$$

$\mathbf{CCL} = 467.6$

$\mathbf{LCL} = 467.6 - 1.793 = 465.8$

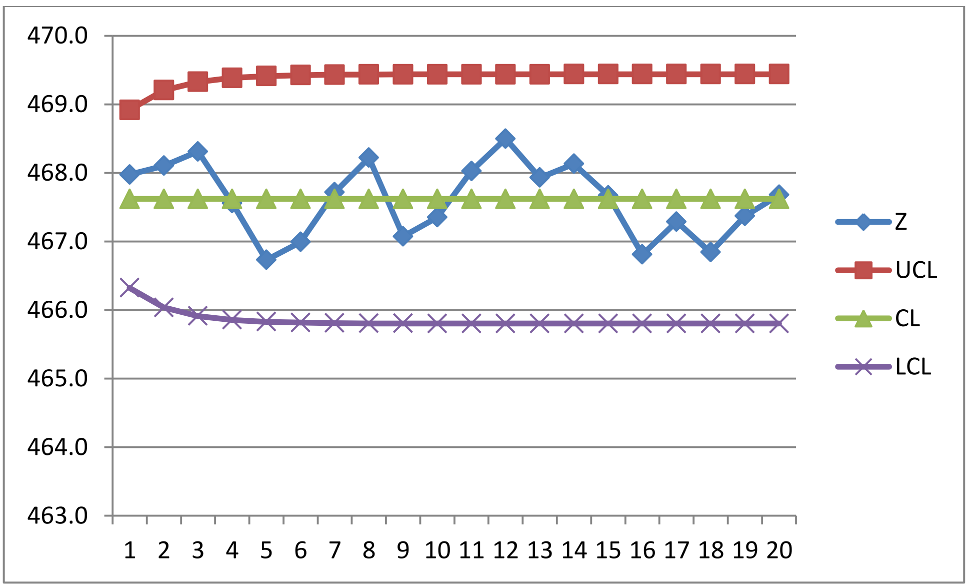
نستنتج ان حدود السيطرة للعينات من (6) الى (20) تكون كما يلي:

$$\mathbf{UCL_6} = \mathbf{UCL_7} = \cdots = \mathbf{UCL_{20}}$$

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{\frac{\mathbf{0.3}}{\mathbf{2-0.3}}} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765} = 467.6 + 1.819 \cong 469.4$$

$$\mathbf{LCL_6} = \mathbf{LCL_7} = \cdots = \mathbf{LCL_{20}}$$

$\mathbf{LCL} = 467.6 - 1.766 = 465.8$



لوحة الأوساط الحسابية المتحركة الموزونة اسياً

القرار: الإنتاج تحت السيطرة

Sample	Z	UCL	CL	LCL
1	468.0	468.92	467.6	466.32
2	468.1	469.20	467.6	466.04
3	468.3	469.33	467.6	465.91
4	467.6	469.38	467.6	465.86
5	466.7	469.41	467.6	465.83
6	467.0	469.42	467.6	465.82
7	467.7	469.4	467.6	465.8
8	468.2	469.4	467.6	465.8
9	467.1	469.4	467.6	465.8
10	467.4	469.4	467.6	465.8
11	468.0	469.4	467.6	465.8
12	468.5	469.4	467.6	465.8
13	467.9	469.4	467.6	465.8
14	468.1	469.4	467.6	465.8
15	467.7	469.4	467.6	465.8
16	466.8	469.4	467.6	465.8
17	467.3	469.4	467.6	465.8
18	466.8	469.4	467.6	465.8
19	467.4	469.4	467.6	465.8
20	467.7	469.4	467.6	465.8

تمـرين (1): مـن انتـاج احـدى المـواد الصـناعية اخـذت (10) عينـات بأوقـات منتظمـة ، وبحجـم (n=6) وحـدات وكـان الوسط الحسابي والمدى للعينات العشرة هو:

العينات	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{X}$	22.1	36.4	29.1	30.3	25.2	30	28.6	30.2	23.3	26.2
R	14	13	21	18	16	16	19	24	20	21

حـدد اذا كـان الانتـاج تحـت السـيطرة مسـتخدماً لوحـة المتوسـطات المتحركـة الموزونـة اسـياً (EWMA – chart) ، علمـاً ان طول الفترة هو : $(\lambda = 0.4)$.

تمـرين (2): للبيانـــات التاليـــة ، حـــدد اذا كانـــت العمليـــة تحـــت الســـيطرة مســـتخدماً لوحـــة الأوســـاط الحســـابية المتحركـــة الموزونة اسياً بأخذ $(\lambda = 0.4)$

	X1	X2	X3	X4	X5	Mean	S.D.
Sample1	**469**	**468**	**470**	**469**	**468**	**468.8**	**0.837**
Sample2	**478**	**467**	**460**	**469**	**468**	**468.4**	**6.427**
Sample3	**467**	**478**	**462**	**469**	**468**	**468.8**	**5.805**
Sample4	**471**	**469**	**470**	**460**	**459**	**465.8**	**5.805**
Sample5	**467**	**468**	**459**	**460**	**470**	**464.8**	**4.970**
Sample6	**469**	**471**	**468**	**469**	**461**	**467.6**	**3.847**
Sample7	**469**	**470**	**469**	**469**	**470**	**469.4**	**0.548**
Sample8	**469**	**469**	**468**	**469**	**472**	**469.4**	**1.517**
Sample9	**459**	**466**	**469**	**469**	**459**	**464.4**	**5.079**
Sample10	**468**	**469**	**469**	**465**	**469**	**468**	**1.732**
Sample11	**469**	**470**	**469**	**471**	**469**	**469.6**	**0.894**
Sample12	**468**	**472**	**470**	**469**	**469**	**469.6**	**1.517**
Sample13	**466**	**469**	**471**	**459**	**468**	**466.6**	**4.615**
Sample14	**469**	**469**	**468**	**469**	**468**	**468.6**	**0.548**
Sample15	**459**	**469**	**469**	**468**	**468**	**466.6**	**4.278**
Sample16	**460**	**468**	**469**	**468**	**459**	**464.8**	**4.868**
Sample17	**469**	**466**	**468**	**470**	**469**	**468.4**	**1.517**
Sample18	**470**	**459**	**468**	**461**	**471**	**465.8**	**5.450**
Sample19	**467**	**468**	**470**	**469**	**469**	**468.6**	**1.140**
Sample20	**466**	**468**	**469**	**469**	**470**	**468.4**	**1.517**
متوسط المقاييس						467.6	3.146

المحاضرة (3) / لوحة المجموع المتراكم

يرمز لها بالرمز (CUSUM Chart) ، تهدف الى الكشف عن الانحرافات الصغيرة في العملية الإنتاجية التي لا تظهرها لوحات شيورات ، تم اقتراحها من قبل العالم (Page) في عام 1954 ، وتم تطويرها من قبل (Branard) في عام 1959 وكذلك من قبل كل من (Ewan and Kemp) واخرون في عام 1960.

تراقب هذه اللوحة انحرافات المشاهدات في العملية الإنتاجية في الحالات التي يقل فيها الانحراف عن انحرافين معياريين ، ويتم حساب المجموع المتراكم كما يلي:

$$\boxed{Q_j = \sum_{j=1}^{k} \bar{X}_j - \mu_0} \quad \text{, where } \mu_0 = \bar{\bar{X}}$$

$$\textbf{For sample 1} \Rightarrow Q_1 = \bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}$$

$$\textbf{For sample 2} \Rightarrow Q_2 = (\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}) + (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}) = Q_1 + (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}})$$

$$\textbf{For sample 3} \Rightarrow Q_3 = (\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}) + (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}) + (\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}) = Q_2 + (\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}})$$

$$\vdots$$

$$\textbf{For sample k} \Rightarrow Q_k = Q_{k-1} + (\bar{X}_k - \bar{\bar{X}})$$

خطوات إيجاد القيم الثابتة للوحة المجموع المتراكم:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

او

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{C_2}$$

حيث ان:

C_2 , d_2 : قيم جدولية تعتمد على قيمة عدد المشاهدات داخل العينات الفرعية n .

$$2\sigma_{\bar{X}} = \frac{2\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - 2\sigma_{\bar{X}}$$

ويقرب الناتج الى اقرب عدد صحيح للحد الأدنى ، لنجد قيمة الثابت h

$$h = \bar{\bar{X}} - x$$

حيث ان:

$x = \text{LCL}$: بعد ان يتم تقريب حد السيطرة الأدنى عند انحرافين معياريين لاقرب عدد صحيح.

نستخرج قيمة الثابت k وكما يلي:

$$k = \bar{\bar{X}} - y$$

$$y = \frac{\bar{\bar{X}} + x}{2}$$

ملاحظة مهمة: ان قيمة k اصغر من قيمة h أي ان

$$k < h$$

نجد قيمة المسافة

$$\boxed{d = \frac{h}{k}}$$

نجد قيمة الزاوية باستعمال الحاسبة العلمية

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{k\sqrt{n}}{2\hat{\sigma}}\right)$$

مثال: البيانات في الادنى تمثل الوسط الحسابي والمدى لعشر عينات بحجم (5) وحدات ، اخذت بأوقات منتظمة من انتاج احدى السلع ، مستخدما لوحة المجموع المتراكم في الاختبار بطريقة القناع حدد اذا كان الانتاج تحت السيطرة.

المدى	الوسط الحسابي	العينة
4	24	1
6	19	2
5	20	3
3	22	4
4	26	5
3	23	6
2	25	7
4	22	8
3	20	9
5	21	10

الحل:

العينة	$\bar{X}$	R	$\bar{X}-\mu$	$Q_r=\sum \bar{X}_i-(\mu-k)$
1	24	4	1.8	1.8
2	19	6	-3.2	-1.4
3	20	5	-2.2	-3.6
4	22	3	-0.2	-3.8
5	26	4	3.8	0
6	23	3	0.8	0.8
7	25	2	2.8	3.6
8	22	4	-0.2	3.4
9	20	3	-2.2	1.2
10	21	5	-1.2	0
SUM	222	39	$\bar{\bar{X}}=\mu=22.2 \quad ,\bar{R}=3.9$	
MEAN	22.2	3.9		

$\because n=5 \rightarrow d_2=2.326$ (قيمة جدولية)

$$\because \hat{\sigma}=\frac{\bar{R}}{d_2}=\frac{3.9}{2.326}=\boxed{1.677}$$

$$\because 2\sigma_{\bar{X}}=\frac{2\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}=\frac{3.354}{\sqrt{5}}=1.499\cong 1.5$$

$$\therefore \mathrm{LCL}=\bar{\bar{X}}-2\sigma_{\bar{X}}=22.2-1.5=20.7\cong 21 \Longrightarrow \therefore \boxed{\mathrm{LCL}=21}$$

$$\because \boxed{h=\mu-x} \Longrightarrow \therefore h=22.2-21=1.2 \qquad \dots(2)$$

x : حد الرفض الادنى و هي قيمة يتم استخراجها.

y : متوسط $(\mu-k)$ الذي يتم استخراجه وفق الصيغة :

$$(\mu-k)=\frac{\mu+(\mu-h)}{2}=\frac{22.2+21}{2}=\frac{43.2}{2}=21.6$$

$$\therefore \boxed{k = \mu - y} \Longrightarrow \therefore k = 22.2 - 21.6 = 0.6$$

ملاحظة:

$$k < h \Longrightarrow k = 0.6 < h = 1.2$$

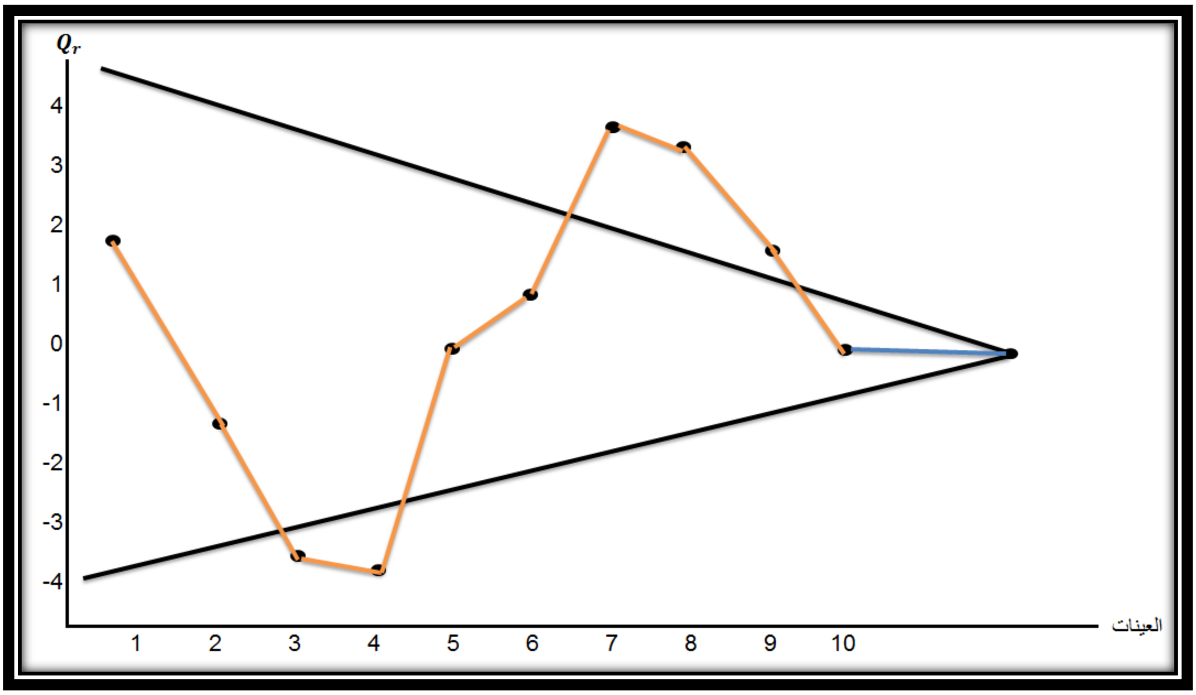
$$\therefore \boxed{d = \frac{h}{k}} \Longrightarrow \therefore d = \frac{1.2}{0.6} = 2$$

1- من المعادلة (4) نجد قيمة θ وكما يلي:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{k\sqrt{n}}{2\hat{\sigma}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.6\sqrt{5}}{3.354}\right) = \tan^{-1}(0.4)$$

باستعمال الحاسبة العلمية وكما يلي:

$$(1)\ 0.4 \rightarrow (2)2ndf \rightarrow (3)\tan = 21.8 \cong 22$$



لوحة المجموع المتراكم : (Cu Sum − Chart)

القرار: بما ان منحنى المجموع المتراكم قد قطع ذراعي القناع ، إذاً الانتاج خارج السيطرة.

تمرين: للبيانات في الادنى عن الوسط الحسابي والانحراف المعياري لـ (12) عينة اخذت بأوقات منتظمة وبحجم (4) وحدات:

العينة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الوسط الحسابي	18	17	20	19	17	21	19	20	22	18	23	21
الانحراف المعياري	1.2	3.4	1.4	1.8	3.1	1.1	2.3	1.4	2.8	2.6	2.1	1.8

المطلوب: حدد إذا كان الانتاج تحت السيطرة مستخدماً لوحة المجموع المتراكم مع اختبار القناع على اساس ان (m=20).

الحل:

العينة	الوسط الحسابي	الانحراف المعياري
1	18	1.2
2	17	3.4
3	20	1.4
4	19	1.8
5	17	3.1
6	21	1.1
7	19	2.3
8	20	1.4
9	22	2.8
10	18	2.6
11	23	2.1
12	21	1.8
المجموع	235	25
الوسط	19.583	2.083

$\because n = 4 \rightarrow C_2 = 0.7979$ (قيمة جدولية)

$$\because \hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{C_2} = \frac{2.083}{0.7979} = \boxed{2.611}$$

$$\because 2\sigma_{\bar{X}} = \frac{2\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{3.354}{\sqrt{4}} = 5.221 \cong 5$$

$$\therefore \mathrm{LCL} = \bar{\bar{X}} - 2\sigma_{\bar{X}} = 19.583 - 5 = 14.583 \cong 15 \Longrightarrow \therefore \boxed{\mathrm{LCL} = 15}$$

$$\because \boxed{h = \mu - x} \Longrightarrow \therefore h = 20 - 15 = 5 \qquad \dots(2)$$

x : حد الرفض الادنى و هي قيمة يتم استخراجها.

y : متوسط $(\mu - k)$ الذي يتم استخراجه وفق الصيغة :

$$(\mu - k) = \frac{\mu + (\mu - h)}{2} = \frac{20 + 25}{2} = \frac{45}{2} = 22.5$$

$$\therefore \boxed{k = \mu - y} \Longrightarrow \therefore k = 22.2 - 21.6 = 0.6$$

ملاحظة:

$$k < h \Longrightarrow k = 0.6 < h = 1.2$$

$$\therefore \boxed{d = \frac{h}{k}} \Longrightarrow \therefore d = \frac{1.2}{0.6} = 2$$

1- من المعادلة (4) نجد قيمة θ وكما يلي:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{k\sqrt{n}}{2\hat{\sigma}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.6\sqrt{5}}{3.354}\right) = \tan^{-1}(0.4)$$

باستعمال الحاسبة العلمية وكما يلي:

$$(1)\ 0.4 \rightarrow (2) 2\mathrm{ndf} \rightarrow (3) \tan = 21.8 \cong 22$$