

المحاضرة (1) / لوحة الأوساط الحسابية المتحركة

1- مقدمة في لوحات سيطرة وتقنيات إحصائية أخرى:

كما سبق ذكره يعود ظهور لوحة شيوارت وتطبيقاتها الى أوائل القرن العشرين ، وظهرت بعدها محاولات عديدة لتطوير ما بدأ به شيوارت ، و ظهر علماء كثر في هذا المجال وتم التركيز على ما يعاب على لوحة شيوارت من انها اقل حساسية في كشف التغيرات الصغيرة المستمرة والمتوسطة وبالذات تغير متوسط العملية ومحاولة خفض حدود السيطرة الى اقل من ثلاث انحرافات معيارية من خلال استخدام طرائق علمية وبالذات اتجه العلماء الى طرائق المتوسطات المتحركة والموزونة لخفض حدود السيطرة كونها تساعد على تقليل التذبذبات والاختلافات بين القيم مما يساعد على خفض انحرافاتهما ، ويتم التركيز على الطرائق التي استخدمت أسلوب المجموع التراكمي ، الأوساط المتحركة سواء كانت حسابية ، هندسية او اسية.

سؤال (1): ما هو العيب المشخص في لوحات شيوارت ، والذي عالجته لوحات الأوساط المتحركة والمجموع المتراكم؟

الجواب: من العيوب التي يتم تحديدها على الخرائط السابقة ، انها تظهر فقط الانحرافات الكبيرة ولا تظهر الانحرافات المتوسطة أو الانحرافات الصغيرة وعلى هذا الاساس يتم التفكير بطريقة تقرب حدي السيطرة الأدنى (LCL) والاعلى (UCL) الى حد السيطرة المركزي (CCL) ولكون المتوسطات المتحركة يمكن ان تساهم في تقليل التذبذبات ، فقد استخدمت لهذا الغرض ومن بينها أسلوب المجموع التراكمي ، المتوسطات المتحركة او المتوسطات الهندسية المتحركة.

2- لوحة الأوساط الحسابية المتحركة

من اهم وظائف المتوسطات المتحركة عندما تؤخذ لمجموعة من القيم المساهمة في تقليل الاختلافات وخفض قيم الانحرافات عن وسطها الحسابي وهذا المبدأ يمكن ان يساهم في خفض حدود السيطرة في كشف التغيرات الصغيرة ، وفي هذه الحالة نستخدم لوحة الأوساط الحسابية المتحركة لمراقبة متوسط مخرجات العملية سواء كانت المشاهدات فردية او مجاميع جزئية (عينات).

ان تعبير المتحرك جاء من خلال اخذ متوسط مجموعة قيم ثم تترك الفترة الاقدم وتضاف فترة لاحقة ويؤخذ المتوسط وهكذا حتى انتهاء جميع القيم ويعتمد عدد المفردات (ويسمى طول الفترة w) التي يؤخذ لها المتوسط المتحرك على مستوى التغير المراد كشفه ويفضل ان يكون طول الفترة كبيراً كلما كانت الحاجة لكشف تغيرات صغيرة ، أي ان العلاقة عكسية بين طول الفترة وطبيعة التغيرات المراد كشفها.

3- خطوات إيجاد الأوساط الحسابية المتحركة

يرمز للوسط الحسابي المتحرك بالرمز μ_i الموزون بمقلوب طول الفترة w

إذا كان لدينا k من العينات وان طول الفترة هو 3 ، هذا يعني بأن:

العينات	الأوساط الحسابية المتحركة	الصيغة للأوساط الحسابية المتحركة عندما يكون $w=3$
العينة 1	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 1	$\mu_1 = \frac{\bar{x}_1}{1}$
العينة 2	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 2	$\mu_2 = \frac{\bar{x}_2 + \bar{x}_1}{2}$
العينة 3	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 3	$\mu_3 = \frac{\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1}{3}$
العينة 4	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 4	$\mu_4 = \frac{\bar{x}_4 + \bar{x}_3 + \bar{x}_2}{3}$
العينة 5	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 5	$\mu_5 = \frac{\bar{x}_5 + \bar{x}_4 + \bar{x}_3}{3}$
العينة 6	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 6	$\mu_6 = \frac{\bar{x}_6 + \bar{x}_5 + \bar{x}_4}{3}$
العينة 7	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 7	$\mu_7 = \frac{\bar{x}_7 + \bar{x}_6 + \bar{x}_5}{3}$
⋮	⋮	⋮
العينة k	الوسط الحسابي المتحرك للعينة k	$\mu_k = \frac{\bar{x}_k + \bar{x}_{k-1} + \bar{x}_{k-2}}{3}$

نستنتج بأنه يمكن إيجاد الوسط الحسابي المتحرك وفق الصيغتين التالية:

$$\mu_t = \frac{\bar{x}_t + \bar{x}_{t-1} + \dots + \bar{x}_1}{t} \quad \text{if } i < w \quad (1)$$

$$\mu_t = \frac{\bar{x}_t + \bar{x}_{t-1} + \dots + \bar{x}_{t-w+1}}{w} \quad \text{if } i \geq w \quad (2)$$

ملاحظة: ان قيمة طول الفترة w تعطى في السؤال وعادة ما تكون قيمتها (3-5) كما تم اقتراحها من قبل بيسل (Bissell 1994).

ملاحظة: يتم تحديد μ_t كنقاط في لوحة الأوساط المتحركة قد تكون داخل او خارج حدود السيطرة.

4- حدود السيطرة للوحة الأوساط الحسابية المتحركة

1- يتم حساب $(3\sigma_{\bar{x}})$ بالاعتماد على صيغة الثوابت $3\sigma_{\bar{x}} = A_1\bar{S} = A_2\bar{R}$

2- يتم حساب $3\sigma_{\mu_t}$ لكل عينة فنلاحظ ان القيم تكون متساوية عند الوصول الى العينة المقابلة لطول

$$\text{الفترة (w). أي ان } 3\sigma_{\mu_t} = \frac{3\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{w}}$$

3- يتم حساب الحد الأدنى LCL لكل عينة ، والحد الأعلى UCL لكل عينة ايضاً بالاعتماد على الصيغ في الأدنى ، فنلاحظ ان القيم تكون متساوية عند الوصول الى العينة المقابلة لطول الفترة (w).

$$UCL = \bar{X} + 3\sigma_{\mu_t} = \bar{X} + \frac{3\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{w}} = \bar{X} + \frac{A_1\bar{S}}{\sqrt{w}} = \bar{X} + \frac{A_2\bar{R}}{\sqrt{w}}$$

$$CCL = \bar{X}$$

$$LCL = \bar{X} - 3\sigma_{\mu_t} = \bar{X} - \frac{3\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{w}} = \bar{X} - \frac{A_1\bar{S}}{\sqrt{w}} = \bar{X} - \frac{A_2\bar{R}}{\sqrt{w}}$$

حيث ان:

A_1 : قيمة جدولية ، يتم استخراجها بالاعتماد على حجم العينة وفي حالة اعطاء قيم الانحراف المعياري في السؤال او متوسط الانحراف المعياري للعينات.

A_2 : قيمة جدولية ، يتم استخراجها بالاعتماد على حجم العينة وفي حالة اعطاء قيم المدى في السؤال او متوسط المدى للعينات.

$$\text{س/ اثبت الصيغة } \sigma_{\mu_t} = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{w}}$$

الاثبات:

$$\therefore \sigma_{\mu_t}^2 = \frac{\sigma^2}{nw}$$

$$\therefore \sigma_{\mu_t} = \frac{\sigma}{\sqrt{nw}} = \frac{1}{\sqrt{w}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sigma_{\mu_t} = \frac{\sigma}{\sqrt{nw}} = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{w}}$$

مثال (1): من انتاج احدى المواد الصناعية اخذت (20) عينة بأوقات منتظمة ، وبحجم (n=5) وحدات ، وتم تسجيل البيانات التالية:

	X1	X2	X3	X4	X5
Sample1	469	468	470	469	468
Sample2	478	467	460	469	468
Sample3	467	478	462	469	468
Sample4	471	469	470	460	459
Sample5	467	468	459	460	470
Sample6	469	471	468	469	461
Sample7	469	470	469	469	470
Sample8	469	469	468	469	472
Sample9	459	466	469	469	459
Sample10	468	469	469	465	469
Sample11	469	470	469	471	469
Sample12	468	472	470	469	469
Sample13	466	469	471	459	468
Sample14	469	469	468	469	468
Sample15	459	469	469	468	468
Sample16	460	468	469	468	459
Sample17	469	466	468	470	469
Sample18	470	459	468	461	471
Sample19	467	468	470	469	469
Sample20	466	468	469	469	470

المطلوب: حدد اذا كانت العملية تحت السيطرة مستخدماً لوحة الأوساط الحسابية المتحركة بأخذ (w=5).

الحل: للبيانات المعطاة في السؤال يمكن إيجاد الوسط الحسابي والمدى للعينات وكما في الجدول الآتي :

	X1	X2	X3	X4	X5	Mean	Max	Min	Range
Sample1	469	468	470	469	468	468.8	470	468	2
Sample2	478	467	460	469	468	468.4	478	460	18
Sample3	467	478	462	469	468	468.8	478	462	16
Sample4	471	469	470	460	459	465.8	471	459	12
Sample5	467	468	459	460	470	464.8	470	459	11
Sample6	469	471	468	469	461	467.6	471	461	10
Sample7	469	470	469	469	470	469.4	470	469	1
Sample8	469	469	468	469	472	469.4	472	468	4
Sample9	459	466	469	469	459	464.4	469	459	10
Sample10	468	469	469	465	469	468	469	465	4
Sample11	469	470	469	471	469	469.6	471	469	2
Sample12	468	472	470	469	469	469.6	472	468	4
Sample13	466	469	471	459	468	466.6	471	459	12
Sample14	469	469	468	469	468	468.6	469	468	1
Sample15	459	469	469	468	468	466.6	469	459	10
Sample16	460	468	469	468	459	464.8	469	459	10
Sample17	469	466	468	470	469	468.4	470	466	4
Sample18	470	459	468	461	471	465.8	471	459	12
Sample19	467	468	470	469	469	468.6	470	467	3
Sample20	466	468	469	469	470	468.4	470	466	4
متوسط المقاييس						467.6			7.5

$$\mu_t = \frac{\bar{x}_t + \bar{x}_{t-1} + \dots + \bar{x}_1}{t} \quad \text{if } i < w \quad (1)$$

$$\mu_t = \frac{\bar{x}_t + \bar{x}_{t-1} + \dots + \bar{x}_{t-w+1}}{w} \quad \text{if } i \geq w \quad (2)$$

$$\mu_1 = \frac{\bar{x}_1}{1} = 468.8$$

$$\mu_2 = \frac{\bar{x}_2 + \bar{x}_1}{2} = \frac{468.4 + 468.8}{2} = 468.6$$

$$\mu_3 = \frac{\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1}{3} = \frac{468.8 + 468.4 + 468.8}{3} = 468.7$$

$$\mu_4 = \frac{\bar{x}_4 + \bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1}{4} = \frac{465.8 + 468.8 + 468.4 + 468.8}{4} = 468$$

$$\mu_5 = \frac{\bar{x}_5 + \bar{x}_4 + \bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1}{5} = \frac{464.8 + 465.8 + 468.8 + 468.4 + 468.8}{5} = 467.3$$

$$\mu_6 = \frac{\bar{x}_6 + \bar{x}_5 + \bar{x}_4 + \bar{x}_3 + \bar{x}_2}{5} = \frac{467.6 + 464.8 + 465.8 + 468.8 + 468.4}{5} = 467.1$$

$$\mu_7 = \frac{\bar{x}_7 + \bar{x}_6 + \bar{x}_5 + \bar{x}_4 + \bar{x}_3}{5} = \frac{469.4 + 467.6 + 464.8 + 465.8 + 468.8}{5} = 467.3$$

$$\mu_8 = \frac{\bar{x}_8 + \bar{x}_7 + \bar{x}_6 + \bar{x}_5 + \bar{x}_4}{5} = \frac{469.4 + 469.4 + 467.6 + 464.8 + 465.8}{5} = 467.4$$

$$\mu_9 = \frac{\bar{x}_9 + \bar{x}_8 + \bar{x}_7 + \bar{x}_6 + \bar{x}_5}{5} = \frac{464.4 + 469.4 + 469.4 + 467.6 + 464.8}{5} = 467.1$$

$$\mu_{10} = \frac{\bar{x}_{10} + \bar{x}_9 + \bar{x}_8 + \bar{x}_7 + \bar{x}_6}{5} = \frac{468 + 464.4 + 469.4 + 469.4 + 467.6}{5} = 467.8$$

وهكذا لبقية العينات ، سيتم توضيحها في الجدول الاتي:

ولايجاد حدود السيطرة نجد الآتي :

$$n = 5 \sim A_2 = 0.577 \Rightarrow 3\sigma_{\bar{x}} = A_2 \bar{R} = (0.577)(7.5) \cong \boxed{4.328}$$

$$UCL = \bar{\bar{X}} + \frac{A_2 \bar{R}}{\sqrt{w}}$$

$$CCL = \bar{\bar{X}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - \frac{A_2 \bar{R}}{\sqrt{w}}$$

ملاحظة : تطبق حدود السيطرة لكل عينة من العينات وتتساوى القيم عندما نصل لطول الفترة (w=5) وكما معطى في السؤال.

حدود السيطرة للعينة (1)

$$UCL = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{1}} = 467.6 + 4.328 \cong 471.9$$

$$CCL = 467.6$$

$$LCL = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{1}} = 467.6 - 4.328 \cong 463.3$$

حدود السيطرة للعينة (2)

$$UCL = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{2}} = 467.6 + 3.06 \cong 470.7$$

$$CCL = 467.6$$

$$LCL = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{2}} = 467.6 - 3.06 \cong 464.6$$

حدود السيطرة للعينة (3)

$$UCL = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{3}} = 467.6 + 2.499 \cong 470.1$$

$$CCL = 467.6$$

$$LCL = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{3}} = 467.6 - 2.499 \cong 465.1$$

حدود السيطرة للعينة (4)

$$UCL = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{4}} = 467.6 + 2.164 \cong 469.8$$

$$CCL = 467.6$$

$$LCL = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{4}} = 467.6 - 2.164 \cong 465.5$$

حدود السيطرة للعينة (5)

$$UCL = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{5}} = 467.6 + 1.936 \cong 469.6$$

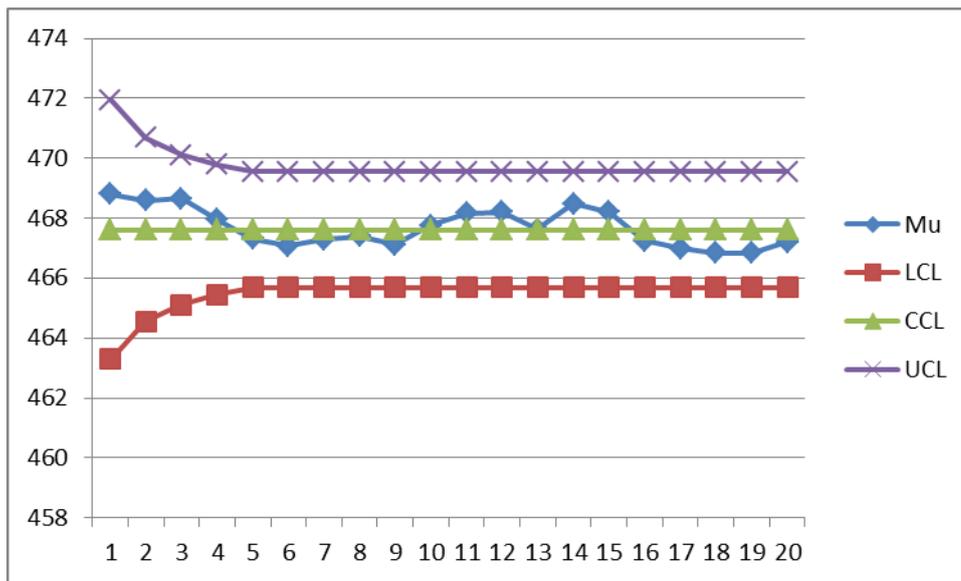
$$CCL = 467.6$$

$$LCL = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{5}} = 467.6 - 1.936 \cong 465.7$$

اما حدود السيطرة لبقية العينات فتنساوى قيمها مع حدود السيطرة للعينة (5) ، وكما موضح بالجدول الآتي :

	Mu	LCL	CCL	UCL
Sample1	468.8	463.3	467.6	471.9
Sample2	468.6	464.6	467.6	470.7
Sample3	468.7	465.1	467.6	470.1
Sample4	468	465.5	467.6	469.8
Sample5	467.3	465.7	467.6	469.6
Sample6	467.1	465.7	467.6	469.6
Sample7	467.3	465.7	467.6	469.6
Sample8	467.4	465.7	467.6	469.6
Sample9	467.1	465.7	467.6	469.6
Sample10	467.8	465.7	467.6	469.6
Sample11	468.2	465.7	467.6	469.6
Sample12	468.2	465.7	467.6	469.6
Sample13	467.6	465.7	467.6	469.6
Sample14	468.5	465.7	467.6	469.6
Sample15	468.2	465.7	467.6	469.6
Sample16	467.2	465.7	467.6	469.6
Sample17	467.0	465.7	467.6	469.6
Sample18	466.8	465.7	467.6	469.6
Sample19	466.8	465.7	467.6	469.6
Sample20	467.2	465.7	467.6	469.6

وباستعمال احد البرامج الجاهزة يمكن رسم حدود السيطرة للوحة الأوساط الحسابية المتحركة.



لوحة الأوساط الحسابية المتحركة

القرار: الإنتاج تحت السيطرة

تمرين (1): من انتاج احدى المواد الصناعية اخذت (10) عينات بأوقات منتظمة ، وبحجم (n=6) وحدات وكان الوسط الحسابي والمدى للعينات العشرة هو:

العينات	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\bar{X}	22.1	36.4	29.1	30.3	25.2	30	28.6	30.2	23.3	26.2
R	14	13	21	18	16	16	19	24	20	21

حدد اذا كان الانتاج تحت السيطرة مستخدماً لوحة المتوسطات المتحركة (MA – chart) ، علماً ان طول الفترة هو $(w = 3)$.

تمرين (2): للبيانات التالية ، حدد اذا كانت العملية تحت السيطرة مستخدماً لوحة الأوساط الحسابية المتحركة بأخذ $(w=4)$.

	X1	X2	X3	X4	X5	Mean	S.D.
Sample1	469	468	470	469	468	468.8	0.837
Sample2	478	467	460	469	468	468.4	6.427
Sample3	467	478	462	469	468	468.8	5.805
Sample4	471	469	470	460	459	465.8	5.805
Sample5	467	468	459	460	470	464.8	4.970
Sample6	469	471	468	469	461	467.6	3.847
Sample7	469	470	469	469	470	469.4	0.548
Sample8	469	469	468	469	472	469.4	1.517
Sample9	459	466	469	469	459	464.4	5.079
Sample10	468	469	469	465	469	468	1.732
Sample11	469	470	469	471	469	469.6	0.894
Sample12	468	472	470	469	469	469.6	1.517
Sample13	466	469	471	459	468	466.6	4.615
Sample14	469	469	468	469	468	468.6	0.548
Sample15	459	469	469	468	468	466.6	4.278
Sample16	460	468	469	468	459	464.8	4.868
Sample17	469	466	468	470	469	468.4	1.517
Sample18	470	459	468	461	471	465.8	5.450
Sample19	467	468	470	469	469	468.6	1.140
Sample20	466	468	469	469	470	468.4	1.517
متوسط المقاييس						467.6	3.146

المحاضرة (2) / لوحة الأوساط الحسابية المتحركة الموزونة اسياً

1- لوحة الأوساط الحسابية المتحركة الموزونة اسياً

و يرمز لها بالرمز (EWMA) ، وتسمى ايضاً بلوحة الوسط الهندسي المتحرك (The Geometric Moving Average Chart) وتمثل النوع الثاني من خرائط المتوسطات المتحركة التي تعتمد على وزن نسبي يرمز له بـ (λ) ويمثل ثابت قيمته تكون بين الصفر والواحد اي ان $0 \leq (\lambda) \leq 1$ ، ويتم استخراج الوسط الهندسي وفق الصيغة التالية:

$$Z_t = \lambda \bar{X}_t + (1 - \lambda)Z_{t-1} , \text{ where } Z_0 = \bar{X}$$

ولرسم الخريطة يتم استخراج الانحراف المعياري للمتوسطات الهندسية وفق الصيغة التالية:

$$3\sigma_{Z_t} = 3\sigma_{\bar{X}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1 - \lambda)^{2t})} , \text{ if } t \leq 5$$

يتم تطبيق الصيغة أعلاه للعينات (1) ، و (2) ، و (3) ، و (4) ، و (5)

ملاحظة: عندما تكون t كبيرة (اي ان $t \rightarrow \infty$) فإن $(1 - r)^{2t} = (1 - r)^{2\infty} = 0$ ، يمكن اختصار صيغة الانحراف المعياري للمتوسطات الهندسية (عندما نصل للعينة السادسة) وعلى النحو التالي:

$$3\sigma_{Z_t} = 3\sigma_{\bar{X}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} , \text{ if } t \geq 6$$

وعند هذه النقطة تأخذ حدود السيطرة خطأ مستقيماً أي ان:

$$3\sigma_{Z_6} = 3\sigma_{Z_7} = \dots = 3\sigma_{Z_k}$$

2- حدود السيطرة للوحة الأوساط الحسابية المتحركة الموزونة اسياً

ويتم استخراج حدود السيطرة وفق الصيغ التالية:

$$UCL = \bar{X} + 3\sigma_{Z_t} = \bar{X} + 3\sigma_{\bar{X}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1 - \lambda)^{2t})}$$

$$CCL = \bar{X}$$

$$LCL = \bar{X} - 3\sigma_{Z_t} = \bar{X} - 3\sigma_{\bar{X}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1 - \lambda)^{2t})}$$

نستنتج ان:

$$UCL_6 = UCL_7 = \dots = UCL_k$$

$$LCL_6 = LCL_7 = \dots = LCL_k$$

ملاحظة: يتم حساب $(3\sigma_{\bar{x}})$ بالاعتماد على صيغة الثوابت $3\sigma_{\bar{x}} = A_1\bar{S} = A_2\bar{R}$

مثال (1): من انتاج احدى المواد الصناعية اخذت (20) عينة بأوقات منتظمة ، وبحجم (n=5) وحدات ، وتم تسجيل البيانات التالية:

	X1	X2	X3	X4	X5
Sample1	469	468	470	469	468
Sample2	478	467	460	469	468
Sample3	467	478	462	469	468
Sample4	471	469	470	460	459
Sample5	467	468	459	460	470
Sample6	469	471	468	469	461
Sample7	469	470	469	469	470
Sample8	469	469	468	469	472
Sample9	459	466	469	469	459
Sample10	468	469	469	465	469
Sample11	469	470	469	471	469
Sample12	468	472	470	469	469
Sample13	466	469	471	459	468
Sample14	469	469	468	469	468
Sample15	459	469	469	468	468
Sample16	460	468	469	468	459
Sample17	469	466	468	470	469
Sample18	470	459	468	461	471
Sample19	467	468	470	469	469
Sample20	466	468	469	469	470

المطلوب: حدد اذا كانت العملية تحت السيطرة مستخدماً لوحة الأوساط الحسابية المتحركة الموزونة اسياً بأخذ $(\lambda=0.3)$.

الحل: للبيانات المعطاة في السؤال يمكن إيجاد الوسط الحسابي والمدى للعينات وكما في الجدول الآتي :

	X1	X2	X3	X4	X5	Mean	Max	Min	Range
Sample1	469	468	470	469	468	468.8	470	468	2
Sample2	478	467	460	469	468	468.4	478	460	18
Sample3	467	478	462	469	468	468.8	478	462	16
Sample4	471	469	470	460	459	465.8	471	459	12
Sample5	467	468	459	460	470	464.8	470	459	11
Sample6	469	471	468	469	461	467.6	471	461	10
Sample7	469	470	469	469	470	469.4	470	469	1
Sample8	469	469	468	469	472	469.4	472	468	4
Sample9	459	466	469	469	459	464.4	469	459	10
Sample10	468	469	469	465	469	468	469	465	4
Sample11	469	470	469	471	469	469.6	471	469	2
Sample12	468	472	470	469	469	469.6	472	468	4
Sample13	466	469	471	459	468	466.6	471	459	12
Sample14	469	469	468	469	468	468.6	469	468	1
Sample15	459	469	469	468	468	466.6	469	459	10
Sample16	460	468	469	468	459	464.8	469	459	10
Sample17	469	466	468	470	469	468.4	470	466	4
Sample18	470	459	468	461	471	465.8	471	459	12
Sample19	467	468	470	469	469	468.6	470	467	3
Sample20	466	468	469	469	470	468.4	470	466	4
متوسط المقاييس						467.6			7.5

$$Z_t = \lambda \bar{X}_t + (1 - \lambda)Z_{t-1} , \text{ where } Z_0 = \bar{X}$$

$$Z_1 = 0.3(468.8) + 0.7(467.6) = 140.64 + 327.32 \cong 468$$

$$Z_2 = 0.3(468.4) + 0.7(467.96) = 140.52 + 327.57 = 468.1$$

$$Z_3 = 0.3(468.8) + 0.7(468.09) = 140.64 + 327.66 = 468.3$$

وهكذا لبقية العينات ، سيتم توضيحها في الجدول التالي:

ولايجاد حدود السيطرة نجد الآتي :

$$n = 5 \sim A_2 = 0.577 \Rightarrow 3\sigma_{\bar{X}} = A_2\bar{R} = (0.577)(7.5) \cong \boxed{4.33}$$

$$UCL = \bar{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1-\lambda)^{2t})}$$

$$CCL = \bar{\bar{X}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1-\lambda)^{2t})}$$

ملاحظة : تطبق حدود السيطرة لكل عينة من العينات وتتساوى القيم عندما نصل للعينة (6) وكالاتي:

حدود السيطرة للعينة (1)

$$UCL = 467.6 + 4.33 \sqrt{\frac{0.3}{2-0.3} (1 - (0.7)^2)} = 467.6 + 4.33 \sqrt{0.1765(1 - 0.49)}$$

$$UCL = 467.6 + 4.33 \sqrt{0.1765(0.51)} = 467.6 + 4.33 \sqrt{0.09} = 467.6 + 1.299 \cong 468.9$$

$$CCL = 467.6$$

$$LCL = 467.6 - 1.299 = 466.3$$

حدود السيطرة للعينة (2)

$$UCL = 467.6 + 4.33 \sqrt{\frac{0.3}{2-0.3} (1 - (0.7)^4)} = 467.6 + 4.33 \sqrt{0.1765(1 - 0.2401)}$$

$$UCL = 467.6 + 4.33 \sqrt{0.1765(0.7599)} = 467.6 + 4.33 \sqrt{0.1341} = 467.6 + 1.586 \cong 469.2$$

$$CCL = 467.6$$

$$LCL = 467.6 - 1.586 = 466$$

حدود السيطرة للعينة (3)

$$UCL = 467.6 + 4.33 \sqrt{\frac{0.3}{2-0.3} (1 - (0.7)^6)} = 467.6 + 4.33 \sqrt{0.1765(1 - 0.1177)}$$

$$UCL = 467.6 + 4.33 \sqrt{0.1765(0.8823)} = 467.6 + 4.33 \sqrt{0.1557} = 467.6 + 1.709 \cong 469.3$$

$$CCL = 467.6$$

$$LCL = 467.6 - 1.709 = 465.9$$

(4) حدود السيطرة للعينة

$$UCL = 467.6 + 4.33 \sqrt{\frac{0.3}{2 - 0.3} (1 - (0.7)^8)} = 467.6 + 4.33 \sqrt{0.1765(1 - 0.0577)}$$

$$UCL = 467.6 + 4.33 \sqrt{0.1765(0.9423)} = 467.6 + 4.33 \sqrt{0.1663} = 467.6 + 1.766 \cong 469.4$$

$$CCL = 467.6$$

$$LCL = 467.6 - 1.766 = 465.8$$

(5) حدود السيطرة للعينة

$$UCL = 467.6 + 4.33 \sqrt{\frac{0.3}{2 - 0.3} (1 - (0.7)^{10})} = 467.6 + 4.33 \sqrt{0.1765(1 - 0.0283)}$$

$$UCL = 467.6 + 4.33 \sqrt{0.1765(0.9717)} = 467.6 + 4.33 \sqrt{0.1715} = 467.6 + 1.793 \cong 469.4$$

$$CCL = 467.6$$

$$LCL = 467.6 - 1.793 = 465.8$$

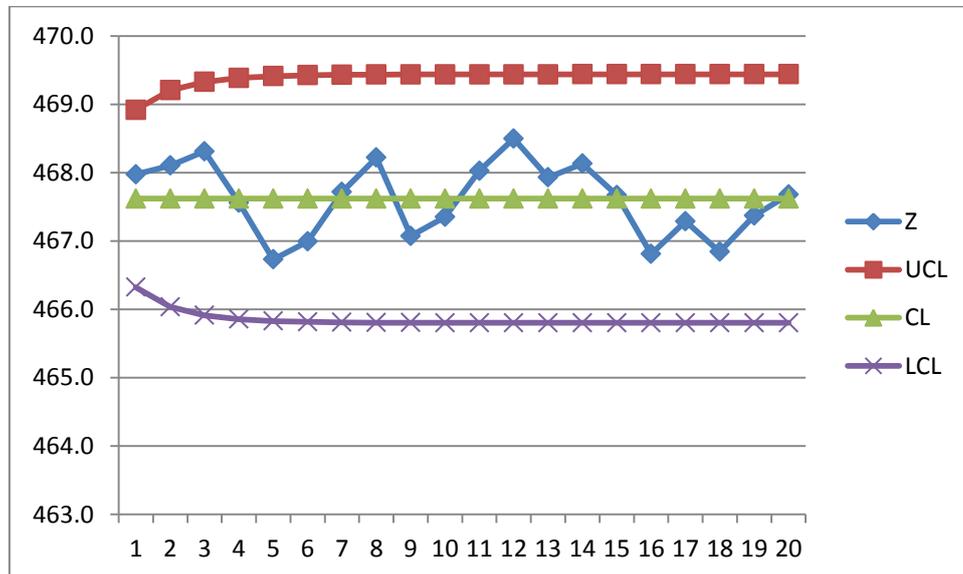
نستنتج ان حدود السيطرة للعينات من (6) الى (20) تكون كما يلي:

$$UCL_6 = UCL_7 = \dots = UCL_{20}$$

$$UCL = 467.6 + 4.33 \sqrt{\frac{0.3}{2 - 0.3}} = 467.6 + 4.33 \sqrt{0.1765} = 467.6 + 1.819 \cong 469.4$$

$$LCL_6 = LCL_7 = \dots = LCL_{20}$$

$$LCL = 467.6 - 1.766 = 465.8$$



لوحة الأوساط الحسابية المتحركة الموزونة اسياً

القرار: الإنتاج تحت السيطرة

Sample	Z	UCL	CL	LCL
1	468.0	468.92	467.6	466.32
2	468.1	469.20	467.6	466.04
3	468.3	469.33	467.6	465.91
4	467.6	469.38	467.6	465.86
5	466.7	469.41	467.6	465.83
6	467.0	469.42	467.6	465.82
7	467.7	469.4	467.6	465.8
8	468.2	469.4	467.6	465.8
9	467.1	469.4	467.6	465.8
10	467.4	469.4	467.6	465.8
11	468.0	469.4	467.6	465.8
12	468.5	469.4	467.6	465.8
13	467.9	469.4	467.6	465.8
14	468.1	469.4	467.6	465.8
15	467.7	469.4	467.6	465.8
16	466.8	469.4	467.6	465.8
17	467.3	469.4	467.6	465.8
18	466.8	469.4	467.6	465.8
19	467.4	469.4	467.6	465.8
20	467.7	469.4	467.6	465.8

تمرين (1): من انتاج احدى المواد الصناعية اخذت (10) عينات بأوقات منتظمة ، وبحجم (n=6) وحدات وكان الوسط الحسابي والمدى للعينات العشرة هو:

العينات	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\bar{X}	22.1	36.4	29.1	30.3	25.2	30	28.6	30.2	23.3	26.2
R	14	13	21	18	16	16	19	24	20	21

حدد اذا كان الانتاج تحت السيطرة مستخدماً لوحة المتوسطات المتحركة الموزونة اسياً (EWMA – chart) ، علماً ان طول الفترة هو : $(\lambda = 0.4)$.

تمرين (2): للبيانات التالية ، حدد اذا كانت العملية تحت السيطرة مستخدماً لوحة الأوساط الحسابية المتحركة الموزونة اسياً بأخذ $(\lambda = 0.4)$

	X1	X2	X3	X4	X5	Mean	S.D.
Sample1	469	468	470	469	468	468.8	0.837
Sample2	478	467	460	469	468	468.4	6.427
Sample3	467	478	462	469	468	468.8	5.805
Sample4	471	469	470	460	459	465.8	5.805
Sample5	467	468	459	460	470	464.8	4.970
Sample6	469	471	468	469	461	467.6	3.847
Sample7	469	470	469	469	470	469.4	0.548
Sample8	469	469	468	469	472	469.4	1.517
Sample9	459	466	469	469	459	464.4	5.079
Sample10	468	469	469	465	469	468	1.732
Sample11	469	470	469	471	469	469.6	0.894
Sample12	468	472	470	469	469	469.6	1.517
Sample13	466	469	471	459	468	466.6	4.615
Sample14	469	469	468	469	468	468.6	0.548
Sample15	459	469	469	468	468	466.6	4.278
Sample16	460	468	469	468	459	464.8	4.868
Sample17	469	466	468	470	469	468.4	1.517
Sample18	470	459	468	461	471	465.8	5.450
Sample19	467	468	470	469	469	468.6	1.140
Sample20	466	468	469	469	470	468.4	1.517
متوسط المقاييس						467.6	3.146

المحاضرة (3) / لوحة المجموع المتراكم

يرمز لها بالرمز (CUSUM Chart) ، تهدف الى الكشف عن الانحرافات الصغيرة في العملية الإنتاجية التي لا تظهرها لوحات شيورات ، تم اقتراحها من قبل العالم (Page) في عام 1954 ، وتم تطويرها من قبل (Branard) في عام 1959 وكذلك من قبل كل من (Ewan and Kemp) وآخرون في عام 1960. تراقب هذه اللوحة انحرافات المشاهدات في العملية الإنتاجية في الحالات التي يقل فيها الانحراف عن انحرافين معياريين ، ويتم حساب المجموع المتراكم كما يلي:

$$Q_j = \sum_{j=1}^k \bar{X}_j - \mu_0 \quad , \text{ where } \mu_0 = \bar{\bar{X}}$$

$$\text{For sample 1} \Rightarrow Q_1 = \bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}$$

$$\text{For sample 2} \Rightarrow Q_2 = (\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}) + (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}) = Q_1 + (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}})$$

$$\text{For sample 3} \Rightarrow Q_3 = (\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}) + (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}) + (\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}) = Q_2 + (\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}})$$

$$\text{For sample k} \Rightarrow Q_k = Q_{k-1} + (\bar{X}_k - \bar{\bar{X}})$$

خطوات إيجاد القيم الثابتة للوحة المجموع المتراكم:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

او

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{C_2}$$

حيث ان:

C_2, d_2 : قيم جدولية تعتمد على قيمة عدد المشاهدات داخل العينات الفرعية n .

$$2\sigma_{\bar{X}} = \frac{2\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - 2\sigma_{\bar{X}}$$

ويقرب الناتج الى اقرب عدد صحيح للحد الأدنى ، لنجد قيمة الثابت h

$$h = \bar{\bar{X}} - x$$

حيث ان:

$x = LCL$: بعد ان يتم تقريب حد السيطرة الأدنى عند انحرافين معياريين لاقرب عدد صحيح.

نستخرج قيمة الثابت k وكما يلي:

$$k = \bar{\bar{X}} - y$$

$$y = \frac{\bar{\bar{X}} + x}{2}$$

ملاحظة مهمة: ان قيمة k اصغر من قيمة h أي ان

$$k < h$$

نجد قيمة المسافة

$$d = \frac{h}{k}$$

نجد قيمة الزاوية باستعمال الحاسبة العلمية

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{k\sqrt{n}}{2\hat{\sigma}} \right)$$

مثال: البيانات في الأدنى تمثل الوسط الحسابي والمدى لعشر عينات بحجم (5) وحدات ، اخذت بأوقات منتظمة من انتاج احدى السلع ، مستخدما لوحة المجموع المتراكم في الاختبار بطريقة القناع حدد اذا كان الانتاج تحت السيطرة.

المدى	الوسط الحسابي	العينة
4	24	1
6	19	2
5	20	3
3	22	4
4	26	5
3	23	6
2	25	7
4	22	8
3	20	9
5	21	10

الحل:

العينة	\bar{X}	R	$\bar{X} - \mu$	$Q_r = \sum \bar{X}_i - (\mu - k)$
1	24	4	1.8	1.8
2	19	6	-3.2	-1.4
3	20	5	-2.2	-3.6
4	22	3	-0.2	-3.8
5	26	4	3.8	0
6	23	3	0.8	0.8
7	25	2	2.8	3.6
8	22	4	-0.2	3.4
9	20	3	-2.2	1.2
10	21	5	-1.2	0
SUM	222	39		
MEAN	22.2	3.9		

$\bar{\bar{X}} = \mu = 22.2$, $\bar{R} = 3.9$

$$\because n = 5 \rightarrow d_2 = 2.326 \quad (\text{قيمة جدولية})$$

$$\because \hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{3.9}{2.326} = \boxed{1.677}$$

$$\because 2\sigma_{\bar{X}} = \frac{2\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{3.354}{\sqrt{5}} = 1.499 \cong 1.5$$

$$\because LCL = \bar{\bar{X}} - 2\sigma_{\bar{X}} = 22.2 - 1.5 = 20.7 \cong 21 \Rightarrow \therefore \boxed{LCL = 21}$$

$$\because \boxed{h = \mu - x} \Rightarrow \therefore h = 22.2 - 21 = 1.2 \quad \dots (2)$$

x : حد الرفض الادنى وهي قيمة يتم استخراجها.

y : متوسط $(\mu - k)$ الذي يتم استخراجها وفق الصيغة :

$$(\mu - k) = \frac{\mu + (\mu - h)}{2} = \frac{22.2 + 21}{2} = \frac{43.2}{2} = 21.6$$

$$\therefore \boxed{k = \mu - y} \Rightarrow \therefore k = 22.2 - 21.6 = 0.6$$

ملاحظة:

$$k < h \Rightarrow k = 0.6 < h = 1.2$$

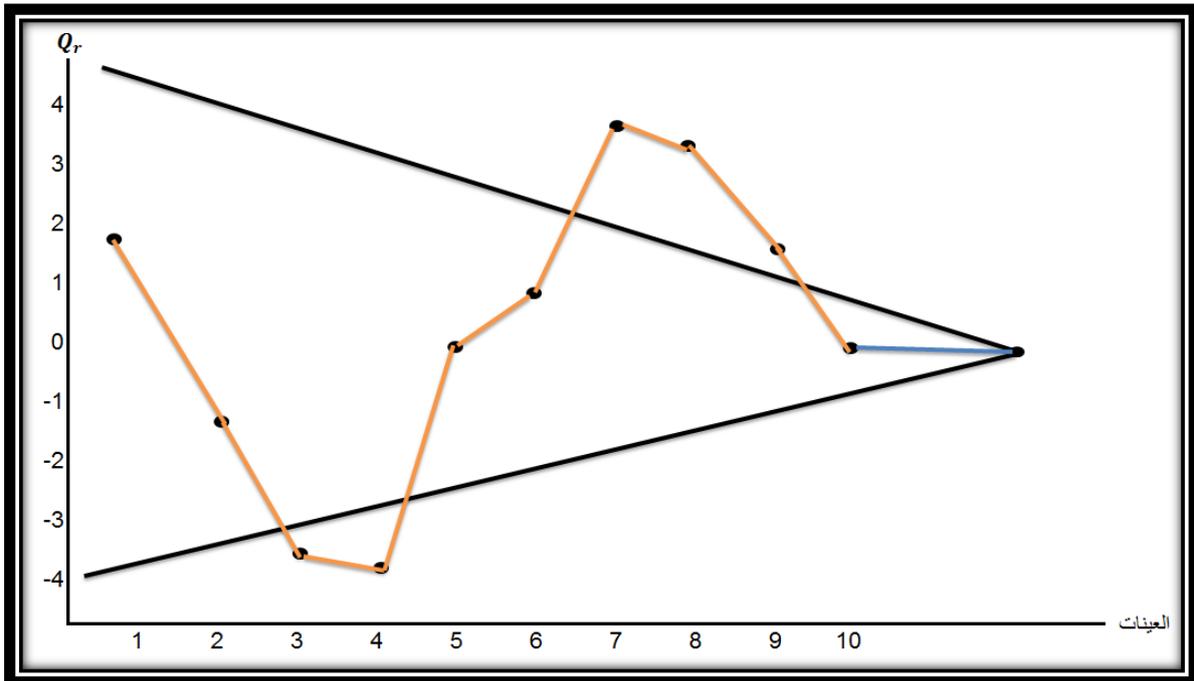
$$\therefore \boxed{d = \frac{h}{k}} \Rightarrow \therefore d = \frac{1.2}{0.6} = 2$$

1- من المعادلة (4) نجد قيمة θ وكما يلي:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{k\sqrt{n}}{2\hat{\sigma}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{0.6\sqrt{5}}{3.354} \right) = \tan^{-1}(0.4)$$

باستعمال الحاسبة العلمية وكما يلي:

$$(1) 0.4 \rightarrow (2) 2ndf \rightarrow (3) \tan = 21.8 \cong 22$$



لوحة المجموع المتراكم : (Cu Sum - Chart)

القرار: بما ان منحني المجموع المتراكم قد قطع ذراعي القناع ، إذا الانتاج خارج السيطرة.

تمرين: للبيانات في الادنى عن الوسط الحسابي والانحراف المعياري لـ (12) عينة اخذت بأوقات منتظمة وبحجم (4) وحدات:

العينة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الوسط الحسابي	18	17	20	19	17	21	19	20	22	18	23	21
الانحراف المعياري	1.2	3.4	1.4	1.8	3.1	1.1	2.3	1.4	2.8	2.6	2.1	1.8

المطلوب: حدد إذا كان الانتاج تحت السيطرة مستخدماً لوحة المجموع المتراكم مع اختبار القناع على اساس ان $(m=20)$.

الحل:

العينة	الوسط الحسابي	الانحراف المعياري
1	18	1.2
2	17	3.4
3	20	1.4
4	19	1.8
5	17	3.1
6	21	1.1
7	19	2.3
8	20	1.4
9	22	2.8
10	18	2.6
11	23	2.1
12	21	1.8
المجموع	235	25
الوسط	19.583	2.083

$$\because n = 4 \rightarrow C_2 = 0.7979 \quad (\text{قيمة جدولية})$$

$$\because \hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{C_2} = \frac{2.083}{0.7979} = \boxed{2.611}$$

$$\because 2\sigma_{\bar{x}} = \frac{2\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{3.354}{\sqrt{4}} = 5.221 \cong 5$$

$$\therefore LCL = \bar{X} - 2\sigma_{\bar{x}} = 19.583 - 5 = 14.583 \cong 15 \Rightarrow \therefore \boxed{LCL = 15}$$

$$\therefore \boxed{h = \mu - x} \Rightarrow \therefore h = 20 - 15 = 5 \quad \dots (2)$$

x : حد الرفض الادنى وهي قيمة يتم استخراجها.

y : متوسط ($\mu - k$) الذي يتم استخراجه وفق الصيغة :

$$(\mu - k) = \frac{\mu + (\mu - h)}{2} = \frac{20 + 25}{2} = \frac{45}{2} = 22.5$$

$$\therefore \boxed{k = \mu - y} \Rightarrow \therefore k = 22.2 - 21.6 = 0.6$$

ملاحظة:

$$k < h \Rightarrow k = 0.6 < h = 1.2$$

$$\therefore \boxed{d = \frac{h}{k}} \Rightarrow \therefore d = \frac{1.2}{0.6} = 2$$

1- من المعادلة (4) نجد قيمة θ وكما يلي:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{k\sqrt{n}}{2\hat{\sigma}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{0.6\sqrt{5}}{3.354} \right) = \tan^{-1}(0.4)$$

باستعمال الحاسبة العلمية وكما يلي:

$$(1) 0.4 \rightarrow (2) 2ndf \rightarrow (3) \tan = 21.8 \cong 22$$