المحاضرة (1) / لوحة الأوساط الحسابية المتحركة

1- مقدمة في لوحات سيطرة وتقنيات إحصائية أخرى:

كما سبق ذكره يعود ظهور لوحة شيوارت وتطبيقاتها الى أوائل القرن العشرين ، وظهرت بعدها محاولات عديدة لتطوير ما بدأ به شيوارت ، و ظهر علماء كثر في هذا المجال وتم التركيز على ما يعاب على لوحة شيوارت من انها اقل حساسية في كشف التغيرات الصغيرة المستمرة والمتوسطة وبالذات تغير متوسط العملية ومحاولة خفض حدود السيطرة الى اقل من ثلاث انحرافات معيارية من خلال استخدام طرائق علمية وبالذات اتجه العلماء الى طرائق المتوسطات المتحركة والموزونة لخفض حدود السيطرة كونها تساعد على تقليل التذبذبات والاختلافات بين القيم مما يساعد على خفض انحرافاتها ، ويتم التركيز على الطرائق التي استخدمت أسلوب المجموع التراكمي ، الأوساط المتحركة سواء كانت حسابية ، هندسية او اسية.

سؤال (1): ما هو العيب المشخص في لوحات شيوارت ، والذي عالجته لوحات الأوساط المتحركة والمجموع المتراكم؟

الجواب: من العيوب التي يتم تحديدها على الخرائط السابقة ، انها تظهر فقط الانحرافات الكبيرة ولا تظهر الانحرافات المتوسطة أو الانحرافات الصغيرة وعلى هذا الاساس يتم التفكير بطريقة تقرب حدي السيطرة الادنى (LCL) والاعلى (UCL) الى حد السيطرة المركزي (CCL) ولكون المتوسطات المتحركة يمكن ان تساهم في تقليل التذبذبات ، فقد استخدمت لهذا الغرض ومن بينها أسلوب المجموع التراكمي ، المتوسطات المتحركة او المتوسطات الهندسية المتحركة.

2- لوحة الأوساط الحسابية المتحركة

من اهم وظائف المتوسطات المتحركة عندما تؤخذ لمجموعة من القيم المساهمة في تقليل الاختلافات وخفض قيم الانحرافات عن وسطها الحسابي وهذا المبدأ يمكن ان يساهم في خفض حدود السيطرة في كشف التغيرات الصغيرة ، وفي هذه الحالة نستخدم لوحة الأوساط الحسابية المتحركة لمراقبة متوسط مخرجات العملية سواء كانت المشاهدات فردية او مجاميع جزئية (عينات).

ان تعبير المتحرك جاء من خلال اخذ متوسط مجموعة قيم ثم تترك الفترة الاقدم وتضاف فترة لاحقة ويؤخذ المتوسط وهكذا حتى انتهاء جميع القيم ويعتمد عدد المفردات (ويسمى طول الفترة w) التي يؤخذ لها المتوسط المتحرك على مستوى التغير المراد كشفه ويفضل ان يكون طول الفترة كبيراً كلما كانت الحاجة لكشف تغيرات صغيرة ، أي ان العلاقة عكسية بين طول الفترة وطبيعة التغيرات المراد كشفها.

3- خطوات إيجاد الأوساط الحسابية المتحركة

يرمز للوسط الحسابي المتحرك بالرمز μ_i الموزون بمقلوب طول الفترة w

اذا كان لدينا k من العينات وان طول الفترة هو 3 ، هذا يعني بأن:

العينات	الأوساط الحسابية المتحركة	الصيغة للأوساط الحسابية المتحركة عندما يكون w=3
العينة 1	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 1	$\mu_1 = \frac{\bar{x}_1}{1}$
العينة 2	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 2	$\mu_2 = \frac{\bar{x}_2 + \bar{x}_1}{2}$
العينة 3	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 3	$\mu_3 = \frac{\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1}{3}$
العينة 4	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 4	$\mu_4 = \frac{\bar{x}_4 + \bar{x}_3 + \bar{x}_2}{3}$
العينة 5	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 5	$\mu_5 = \frac{\bar{x}_5 + \bar{x}_4 + \bar{x}_3}{3}$
العينة 6	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 6	$\mu_6 = \frac{\bar{x}_6 + \bar{x}_5 + \bar{x}_4}{3}$
العينة 7	الوسط الحسابي المتحرك للعينة 7	$\mu_7 = \frac{\bar{x}_7 + \bar{x}_6 + \bar{x}_5}{3}$
⋮	⋮	⋮
العينة k	الوسط الحسابي المتحرك للعينة k	$\mu_k = \frac{\bar{x}_k + \bar{x}_{k-1} + \bar{x}_{k-2}}{3}$

نستنتج بأنهُ يمكن إيجاد الوسط الحسابي المتحرك وفق الصيغتين التالية:

$$\boldsymbol{\mu_t = \frac{\bar{x}_t + \bar{x}_{t-1} + \cdots + \bar{x}_1}{t} \qquad \text{if } i < w \qquad (1)}$$

$$\boldsymbol{\mu_t = \frac{\bar{x}_t + \bar{x}_{t-1} + \cdots + \bar{x}_{t-w+1}}{w} \qquad \text{if } i \geq w \qquad (2)}$$

ملاحظة: ان قيمة طول الفترة w تعطى في السؤال وعادة ما تكون قيمتها (3-5) كما تم اقتراحها من قبل بيسل (Bissell 1994).

ملاحظة: يتم تحديد μ_t كنقاط في لوحة الاوساط المتحركة قد تكون داخل او خارج حدود السيطرة.

4- حدود السيطرة للوحة الأوساط الحسابية المتحركة

1- يتم حساب $(3\sigma_{\bar{X}})$ بالاعتماد على صيغة الثوابت $\boxed{3\sigma_{\bar{X}} = A_1\bar{S} = A_2\bar{R}}$

2- يتم حساب $3\sigma_{\mu_t}$ لكل عينة فسنلاحظ ان القيم تكون متساوية عند الوصول الى العينة المقابلة لطول الفترة (w). أي ان $\boxed{3\sigma_{\mu_t} = \frac{3\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{w}}}$

3- يتم حساب الحد الادنى **LCL لكل عينة** ، والحد الاعلى **UCL لكل عينة ايضاً** بالاعتماد على الصيغ في الادنى ، فسنلاحظ ان القيم تكون متساوية عند الوصول الى العينة المقابلة لطول الفترة (w).

$$UCL = \bar{\bar{X}} + 3\sigma_{\mu_t} = \bar{\bar{X}} + \frac{3\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{w}} = \boxed{\bar{\bar{X}} + \frac{A_1\bar{S}}{\sqrt{w}}} = \boxed{\bar{\bar{X}} + \frac{A_2\bar{R}}{\sqrt{w}}}$$

$$CCL = \bar{\bar{X}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - 3\sigma_{\mu_t} = \bar{\bar{X}} - \frac{3\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{w}} = \boxed{\bar{\bar{X}} - \frac{A_1\bar{S}}{\sqrt{w}}} = \boxed{\bar{\bar{X}} - \frac{A_2\bar{R}}{\sqrt{w}}}$$

حيث ان:

A_1 : قيمة جدولية ، يتم استخراجها بالاعتماد على حجم العينة وفي حالة اعطاء قيم الانحراف المعياري في السؤال او متوسط الانحراف المعياري للعينات.

A_2 : قيمة جدولية ، يتم استخراجها بالاعتماد على حجم العينة وفي حالة اعطاء قيم المدى في السؤال او متوسط المدى للعينات.

س/ اثبت الصيغة $\boxed{\sigma_{\mu_t} = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{w}}}$

الاثبات:

$$\because \sigma^2{}_{\mu_t} = \frac{\sigma^2}{nw}$$

$$\therefore \sigma_{\mu_t} = \frac{\sigma}{\sqrt{nw}} = \frac{1}{\sqrt{w}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\because \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\boxed{\sigma_{\mu_t} = \frac{\sigma}{\sqrt{nw}} = \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{w}}}$$

مثال (1): من انتاج احدى المواد الصناعية اخذت (20) عينة بأوقات منتظمة ، وبحجم (n=5) وحدات ، وتم تسجيل البيانات التالية:

	X1	X2	X3	X4	X5
Sample1	**469**	**468**	**470**	**469**	**468**
Sample2	**478**	**467**	**460**	**469**	**468**
Sample3	**467**	**478**	**462**	**469**	**468**
Sample4	**471**	**469**	**470**	**460**	**459**
Sample5	**467**	**468**	**459**	**460**	**470**
Sample6	**469**	**471**	**468**	**469**	**461**
Sample7	**469**	**470**	**469**	**469**	**470**
Sample8	**469**	**469**	**468**	**469**	**472**
Sample9	**459**	**466**	**469**	**469**	**459**
Sample10	**468**	**469**	**469**	**465**	**469**
Sample11	**469**	**470**	**469**	**471**	**469**
Sample12	**468**	**472**	**470**	**469**	**469**
Sample13	**466**	**469**	**471**	**459**	**468**
Sample14	**469**	**469**	**468**	**469**	**468**
Sample15	**459**	**469**	**469**	**468**	**468**
Sample16	**460**	**468**	**469**	**468**	**459**
Sample17	**469**	**466**	**468**	**470**	**469**
Sample18	**470**	**459**	**468**	**461**	**471**
Sample19	**467**	**468**	**470**	**469**	**469**
Sample20	**466**	**468**	**469**	**469**	**470**

المطلوب: حدد اذا كانت العملية تحت السيطرة مستخدماً لوحة الأوساط الحسابية المتحركة بأخذ (w=5).

الحل: للبيانات المعطاة في السؤال يمكن إيجاد الوسط الحسابي والمدى للعينات وكما في الجدول الآتي :

	X1	X2	X3	X4	X5	Mean	Max	Min	Range
Sample1	**469**	**468**	**470**	**469**	**468**	**468.8**	**470**	**468**	**2**
Sample2	**478**	**467**	**460**	**469**	**468**	**468.4**	**478**	**460**	**18**
Sample3	**467**	**478**	**462**	**469**	**468**	**468.8**	**478**	**462**	**16**
Sample4	**471**	**469**	**470**	**460**	**459**	**465.8**	**471**	**459**	**12**
Sample5	**467**	**468**	**459**	**460**	**470**	**464.8**	**470**	**459**	**11**
Sample6	**469**	**471**	**468**	**469**	**461**	**467.6**	**471**	**461**	**10**
Sample7	**469**	**470**	**469**	**469**	**470**	**469.4**	**470**	**469**	**1**
Sample8	**469**	**469**	**468**	**469**	**472**	**469.4**	**472**	**468**	**4**
Sample9	**459**	**466**	**469**	**469**	**459**	**464.4**	**469**	**459**	**10**
Sample10	**468**	**469**	**469**	**465**	**469**	**468**	**469**	**465**	**4**
Sample11	**469**	**470**	**469**	**471**	**469**	**469.6**	**471**	**469**	**2**
Sample12	**468**	**472**	**470**	**469**	**469**	**469.6**	**472**	**468**	**4**
Sample13	**466**	**469**	**471**	**459**	**468**	**466.6**	**471**	**459**	**12**
Sample14	**469**	**469**	**468**	**469**	**468**	**468.6**	**469**	**468**	**1**
Sample15	**459**	**469**	**469**	**468**	**468**	**466.6**	**469**	**459**	**10**
Sample16	**460**	**468**	**469**	**468**	**459**	**464.8**	**469**	**459**	**10**
Sample17	**469**	**466**	**468**	**470**	**469**	**468.4**	**470**	**466**	**4**
Sample18	**470**	**459**	**468**	**461**	**471**	**465.8**	**471**	**459**	**12**
Sample19	**467**	**468**	**470**	**469**	**469**	**468.6**	**470**	**467**	**3**
Sample20	**466**	**468**	**469**	**469**	**470**	**468.4**	**470**	**466**	**4**
متوسط المقاييس						467.6			7.5

$$\boldsymbol{\mu_t = \frac{\bar{x}_t + \bar{x}_{t-1} + \cdots + \bar{x}_1}{t} \qquad \text{if } i < w \qquad (1)}$$

$$\boldsymbol{\mu_t = \frac{\bar{x}_t + \bar{x}_{t-1} + \cdots + \bar{x}_{t-w+1}}{w} \qquad \text{if } i \geq w \qquad (2)}$$

$$\mu_1 = \frac{\bar{x}_1}{1} = 468.8$$

$$\mu_2 = \frac{\bar{x}_2 + \bar{x}_1}{2} = \frac{468.4 + 468.8}{2} = 468.6$$

$$\mu_3 = \frac{\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1}{3} = \frac{468.8 + 468.4 + 468.8}{3} = 468.7$$

$$\mu_4 = \frac{\bar{x}_4 + \bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1}{4} = \frac{465.8 + 468.8 + 468.4 + 468.8}{4} = 468$$

$$\mu_5 = \frac{\bar{x}_5 + \bar{x}_4 + \bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1}{5} = \frac{464.8 + 465.8 + 468.8 + 468.4 + 468.8}{5} = 467.3$$

$$\mu_6 = \frac{\bar{x}_6 + \bar{x}_5 + \bar{x}_4 + \bar{x}_3 + \bar{x}_2}{5} = \frac{467.6 + 464.8 + 465.8 + 468.8 + 468.4}{5} = 467.1$$

$$\mu_7 = \frac{\bar{x}_7 + \bar{x}_6 + \bar{x}_5 + \bar{x}_4 + \bar{x}_3}{5} = \frac{469.4 + 467.6 + 464.8 + 465.8 + 468.8}{5} = 467.3$$

$$\mu_8 = \frac{\bar{x}_8 + \bar{x}_7 + \bar{x}_6 + \bar{x}_5 + \bar{x}_4}{5} = \frac{469.4 + 469.4 + 467.6 + 464.8 + 465.8}{5} = 467.4$$

$$\mu_9 = \frac{\bar{x}_9 + \bar{x}_8 + \bar{x}_7 + \bar{x}_6 + \bar{x}_5}{5} = \frac{464.4 + 469.4 + 469.4 + 467.6 + 464.8}{5} = 467.1$$

$$\mu_{10} = \frac{\bar{x}_{10} + \bar{x}_9 + \bar{x}_8 + \bar{x}_7 + \bar{x}_6}{5} = \frac{468 + 464.4 + 469.4 + 469.4 + 467.6}{5} = 467.8$$

وهكذا لبقية العينات ، سيتم توضيحها في الجدول الاتي:

ولايجاد حدود السيطرة نجد الآتي :

$$n = 5 \sim A_2 = 0.577 \implies 3\sigma_{\bar{X}} = A_2\bar{R} = (0.577)(7.5) \cong \boxed{4.328}$$

$$UCL = \bar{\bar{X}} + \frac{A_2\bar{R}}{\sqrt{w}}$$

$$CCL = \bar{\bar{X}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - \frac{A_2\bar{R}}{\sqrt{w}}$$

ملاحظة : تطبق حدود السيطرة لكل عينة من العينات وتتساوى القيم عندما نصل لطول الفترة (w=5) وكما معطى في السؤال.

حدود السيطرة للعينة (1)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{1}}} = 467.6 + 4.328 \cong 471.9$$

$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{1}}} = 467.6 - 4.328 \cong 463.3$$

حدود السيطرة للعينة (2)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{2}}} = 467.6 + 3.06 \cong 470.7$$

$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{2}}} = 467.6 - 3.06 \cong 464.6$$

حدود السيطرة للعينة (3)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{3}}} = 467.6 + 2.499 \cong 470.1$$

$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{3}}} = 467.6 - 2.499 \cong 465.1$$

حدود السيطرة للعينة (4)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{4}}} = 467.6 + 2.164 \cong 469.8$$

$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{4}}} = 467.6 - 2.164 \cong 465.5$$

حدود السيطرة للعينة (5)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{5}}} = 467.6 + 1.936 \cong 469.6$$

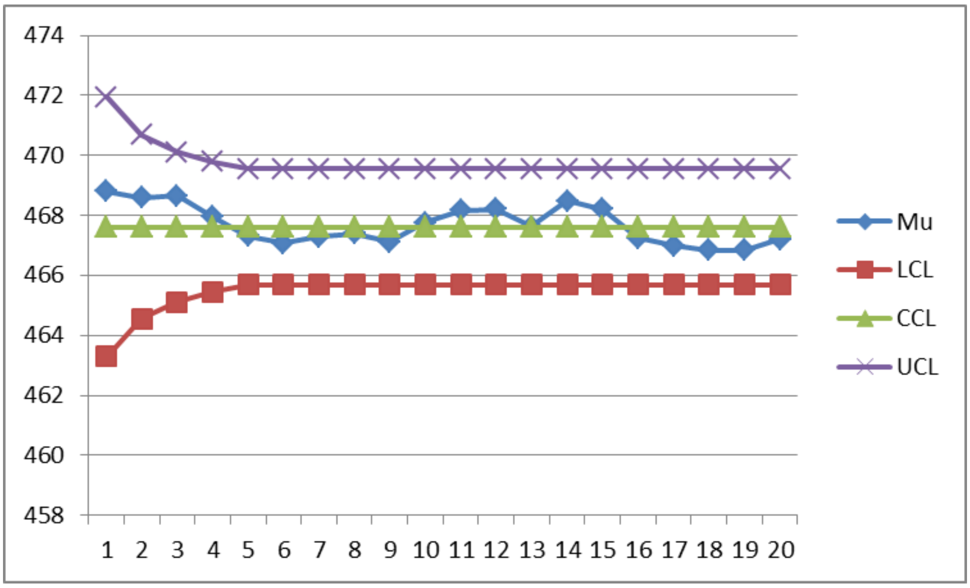
$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 + \frac{4.328}{\sqrt{\mathbf{5}}} = 467.6 - 1.936 \cong 465.7$$

اما حدود السيطرة لبقية العينات فتتساوى قيمها مع حدود السيطرة للعينة (5) ، وكما موضح بالجدول الآتي :

	Mu	LCL	CCL	UCL
Sample1	468.8	463.3	467.6	471.9
Sample2	468.6	464.6	467.6	470.7
Sample3	468.7	465.1	467.6	470.1
Sample4	468	465.5	467.6	469.8
Sample5	467.3	465.7	467.6	469.6
Sample6	467.1	465.7	467.6	469.6
Sample7	467.3	465.7	467.6	469.6
Sample8	467.4	465.7	467.6	469.6
Sample9	467.1	465.7	467.6	469.6
Sample10	467.8	465.7	467.6	469.6
Sample11	468.2	465.7	467.6	469.6
Sample12	468.2	465.7	467.6	469.6
Sample13	467.6	465.7	467.6	469.6
Sample14	468.5	465.7	467.6	469.6
Sample15	468.2	465.7	467.6	469.6
Sample16	467.2	465.7	467.6	469.6
Sample17	467.0	465.7	467.6	469.6
Sample18	466.8	465.7	467.6	469.6
Sample19	466.8	465.7	467.6	469.6
Sample20	467.2	465.7	467.6	469.6

وباستعمال احد البرامج الجاهزة يمكن رسم حدود السيطرة للوحة الأوساط الحسابية المتحركة.



لوحة الأوساط الحسابية المتحركة

القرار: الإنتاج تحت السيطرة

تمرين (1): من انتاج احدى المواد الصناعية اخذت (10) عينات بأوقات منتظمة ، وبحجم (n=6) وحدات وكان الوسط الحسابي والمدى للعينات العشرة هو:

العينات	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{X}$	22.1	36.4	29.1	30.3	25.2	30	28.6	30.2	23.3	26.2
R	14	13	21	18	16	16	19	24	20	21

حدد اذا كان الانتاج تحت السيطرة مستخدماً لوحة المتوسطات المتحركة (MA – chart) ، علماً ان طول الفترة هو : $(\mathbf{w} = \mathbf{3})$.

تمرين (2): للبيانات التالية ، حدد اذا كانت العملية تحت السيطرة مستخدماً لوحة الأوساط الحسابية المتحركة بأخذ (w=4).

	X1	X2	X3	X4	X5	Mean	S.D.
Sample1	**469**	**468**	**470**	**469**	**468**	**468.8**	**0.837**
Sample2	**478**	**467**	**460**	**469**	**468**	**468.4**	**6.427**
Sample3	**467**	**478**	**462**	**469**	**468**	**468.8**	**5.805**
Sample4	**471**	**469**	**470**	**460**	**459**	**465.8**	**5.805**
Sample5	**467**	**468**	**459**	**460**	**470**	**464.8**	**4.970**
Sample6	**469**	**471**	**468**	**469**	**461**	**467.6**	**3.847**
Sample7	**469**	**470**	**469**	**469**	**470**	**469.4**	**0.548**
Sample8	**469**	**469**	**468**	**469**	**472**	**469.4**	**1.517**
Sample9	**459**	**466**	**469**	**469**	**459**	**464.4**	**5.079**
Sample10	**468**	**469**	**469**	**465**	**469**	**468**	**1.732**
Sample11	**469**	**470**	**469**	**471**	**469**	**469.6**	**0.894**
Sample12	**468**	**472**	**470**	**469**	**469**	**469.6**	**1.517**
Sample13	**466**	**469**	**471**	**459**	**468**	**466.6**	**4.615**
Sample14	**469**	**469**	**468**	**469**	**468**	**468.6**	**0.548**
Sample15	**459**	**469**	**469**	**468**	**468**	**466.6**	**4.278**
Sample16	**460**	**468**	**469**	**468**	**459**	**464.8**	**4.868**
Sample17	**469**	**466**	**468**	**470**	**469**	**468.4**	**1.517**
Sample18	**470**	**459**	**468**	**461**	**471**	**465.8**	**5.450**
Sample19	**467**	**468**	**470**	**469**	**469**	**468.6**	**1.140**
Sample20	**466**	**468**	**469**	**469**	**470**	**468.4**	**1.517**
متوسط المقاييس						467.6	3.146

المحاضرة (2) / لوحة الأوساط الحسابية المتحركة الموزونة اسياً

1- لوحة الأوساط الحسابية المتحركة الموزونة اسياً

و يرمزلهـا بـالرمز ($EWMA$) ، وتسـمى ايضـاً بـ لوحـة الوسـط الهندسـي المتحـرك **(The Geometric Moving Average Chart)** وتمثـل النـوع الثـاني مـن خـرائط المتوسـطات المتحركـة التـي تعتمد علـى وزن نسـبي يرمـز لـهُ بــ (λ) ويمثل ثابـت قيمتـهُ تكـون بـين الصـفر والواحد اي ان $0 \leq (\lambda) \leq 1$ ، ويتم استخراج الوسط الهندسي وفق الصيغة التالية:

$$Z_t = \lambda \bar{X}_t + (1-\lambda) Z_{t-1} \quad , \text{where } Z_0 = \bar{\bar{X}}$$

ولرسم الخريطة يتم استخراج الانحراف المعياري للمتوسطات الهندسية وفق الصيغة التالية:

$$3\sigma_{Z_t} = 3\sigma_{\bar{X}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}\left(1-(1-\lambda)^{2t}\right)} \qquad , if\ t \leq 5$$

يتم تطبيق الصيغة أعلاه للعينات (1) ، و (2) ، و (3) ، و (4) ، و (5)

ملاحظة: عندما تكون $\mathbf{t}$ كبيرة (اي ان $t \to \infty$) فأن $(1-r)^{2t} = (1-r)^{2\infty} = 0$ ، يمكن اختصار صيغة الانحراف المعياري للمتوسطات الهندسية (عندما نصل للعينة السادسة) وعلى النحو التالي:

$$3\sigma_{Z_t} = 3\sigma_{\bar{X}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \qquad , if\ t \geq 6$$

وعند هذهِ النقطة تأخذ حدود السيطرة خطاً مستقيماً أي ان:

$$3\sigma_{Z_6} = 3\sigma_{Z_7} = \cdots = 3\sigma_{Z_k}$$

2- حدود السيطرة للوحة الأوساط الحسابية المتحركة الموزونة اسياً

ويتم استخراج حدود السيطرة وفق الصيغ التالية:

$$UCL = \bar{\bar{X}} + 3\sigma_{Z_t} = \boxed{\bar{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}\left(1-(1-\lambda)^{2t}\right)}}$$

$$CCL = \bar{\bar{X}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - 3\sigma_{Z_t} = \boxed{\bar{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}\left(1-(1-\lambda)^{2t}\right)}}$$

نستنتج ان:

$$UCL_6 = UCL_7 = \cdots = UCL_k$$

$$LCL_6 = LCL_7 = \cdots = LCL_k$$

ملاحظة: يتم حساب $(3\sigma_{\bar{X}})$ بالاعتماد على صيغة الثوابت $\boxed{3\sigma_{\bar{X}} = A_1\bar{S} = A_2\bar{R}}$

مثـــال (1): مــن انتـــاج احـــدى المـــواد الصـــناعية اخـــذت (20) عينـــة بأوقـــات منتظمـــة ، وبحجـــم (n=5) وحدات ، وتم تسجيل البيانات التالية:

	X1	X2	X3	X4	X5
Sample1	**469**	**468**	**470**	**469**	**468**
Sample2	**478**	**467**	**460**	**469**	**468**
Sample3	**467**	**478**	**462**	**469**	**468**
Sample4	**471**	**469**	**470**	**460**	**459**
Sample5	**467**	**468**	**459**	**460**	**470**
Sample6	**469**	**471**	**468**	**469**	**461**
Sample7	**469**	**470**	**469**	**469**	**470**
Sample8	**469**	**469**	**468**	**469**	**472**
Sample9	**459**	**466**	**469**	**469**	**459**
Sample10	**468**	**469**	**469**	**465**	**469**
Sample11	**469**	**470**	**469**	**471**	**469**
Sample12	**468**	**472**	**470**	**469**	**469**
Sample13	**466**	**469**	**471**	**459**	**468**
Sample14	**469**	**469**	**468**	**469**	**468**
Sample15	**459**	**469**	**469**	**468**	**468**
Sample16	**460**	**468**	**469**	**468**	**459**
Sample17	**469**	**466**	**468**	**470**	**469**
Sample18	**470**	**459**	**468**	**461**	**471**
Sample19	**467**	**468**	**470**	**469**	**469**
Sample20	**466**	**468**	**469**	**469**	**470**

المطلـــوب: حـــدد اذا كانـــت العمليـــة تحـــت الســـيطرة مســـتخدماً لوحـــة الأوســـاط الحســـابية المتحركـــة الموزونة اسياً بأخذ (λ=0.3).

الحـل: للبيانـات المعطـاة فـي السـؤال يمكـن إيجـاد الوسـط الحسـابي والمـدى للعينـات وكمـا فـي الجـدول الآتي :

	X1	X2	X3	X4	X5	Mean	Max	Min	Range
Sample1	**469**	**468**	**470**	**469**	**468**	**468.8**	**470**	**468**	**2**
Sample2	**478**	**467**	**460**	**469**	**468**	**468.4**	**478**	**460**	**18**
Sample3	**467**	**478**	**462**	**469**	**468**	**468.8**	**478**	**462**	**16**
Sample4	**471**	**469**	**470**	**460**	**459**	**465.8**	**471**	**459**	**12**
Sample5	**467**	**468**	**459**	**460**	**470**	**464.8**	**470**	**459**	**11**
Sample6	**469**	**471**	**468**	**469**	**461**	**467.6**	**471**	**461**	**10**
Sample7	**469**	**470**	**469**	**469**	**470**	**469.4**	**470**	**469**	**1**
Sample8	**469**	**469**	**468**	**469**	**472**	**469.4**	**472**	**468**	**4**
Sample9	**459**	**466**	**469**	**469**	**459**	**464.4**	**469**	**459**	**10**
Sample10	**468**	**469**	**469**	**465**	**469**	**468**	**469**	**465**	**4**
Sample11	**469**	**470**	**469**	**471**	**469**	**469.6**	**471**	**469**	**2**
Sample12	**468**	**472**	**470**	**469**	**469**	**469.6**	**472**	**468**	**4**
Sample13	**466**	**469**	**471**	**459**	**468**	**466.6**	**471**	**459**	**12**
Sample14	**469**	**469**	**468**	**469**	**468**	**468.6**	**469**	**468**	**1**
Sample15	**459**	**469**	**469**	**468**	**468**	**466.6**	**469**	**459**	**10**
Sample16	**460**	**468**	**469**	**468**	**459**	**464.8**	**469**	**459**	**10**
Sample17	**469**	**466**	**468**	**470**	**469**	**468.4**	**470**	**466**	**4**
Sample18	**470**	**459**	**468**	**461**	**471**	**465.8**	**471**	**459**	**12**
Sample19	**467**	**468**	**470**	**469**	**469**	**468.6**	**470**	**467**	**3**
Sample20	**466**	**468**	**469**	**469**	**470**	**468.4**	**470**	**466**	**4**
متوسط المقاييس						467.6			7.5

$$\mathbf{Z_t = \lambda\bar{X}_t + (1-\lambda)Z_{t-1}} \quad \mathbf{, where\ Z_0 = \bar{\bar{X}}}$$

$$\mathbf{Z_1} = \mathbf{0.3}(468.8) + 0.7(467.6) = 140.64 + 327.32 \cong 468$$

$$\mathbf{Z_2} = \mathbf{0.3}(468.4) + 0.7(467.96) = 140.52 + 327.57 = 468.1$$

$$\mathbf{Z_3} = \mathbf{0.3}(468.8) + 0.7(468.09) = 140.64 + 327.66 = 468.3$$

وهكذا لبقية العينات ، سيتم توضيحها في الجدول التالي:

ولايجاد حدود السيطرة نجد الآتي :

$$\mathbf{n = 5 \ \sim A_2 = 0.577 \ \Rightarrow 3\sigma_{\bar{X}} = A_2\bar{R} = (0.577)(7.5) \cong \boxed{4.33}}$$

$$\mathbf{UCL} = \boxed{\bar{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}}\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}\left(1-(1-\lambda)^{2t}\right)}}$$

$$\mathbf{CCL} = \bar{\bar{X}}$$

$$\mathbf{LCL} = \boxed{\bar{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}}\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}\left(1-(1-\lambda)^{2t}\right)}}$$

ملاحظة : تطبق حدود السيطرة لكل عينة من العينات وتتساوى القيم عندما نصل للعينة (6) وكالاتي:

حدود السيطرة للعينة (1)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{\frac{\mathbf{0.3}}{\mathbf{2-0.3}}\left(\mathbf{1}-(\mathbf{0.7})^{\mathbf{2}}\right)} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(\mathbf{1} - 0.49)}$$

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(0.51)} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.09} = 467.6 + 1.299 \cong 468.9$$

$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 - 1.299 = 466.3$$

حدود السيطرة للعينة (2)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{\frac{\mathbf{0.3}}{\mathbf{2-0.3}}\left(\mathbf{1}-(\mathbf{0.7})^{\mathbf{4}}\right)} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(\mathbf{1} - 0.2401)}$$

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(0.7599)} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1341} = 467.6 + 1.586 \cong 469.2$$

$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$$\mathbf{LCL} = 467.6 - 1.586 = 466$$

حدود السيطرة للعينة (3)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{\frac{\mathbf{0.3}}{\mathbf{2-0.3}}\left(\mathbf{1}-(\mathbf{0.7})^{\mathbf{6}}\right)} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(\mathbf{1} - 0.1177)}$$

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(0.8823)} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1557} = 467.6 + 1.709 \cong 469.3$$

$$\mathbf{CCL} = 467.6$$

$\mathbf{LCL} = 467.6 - 1.709 = 465.9$

حدود السيطرة للعينة (4)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{\frac{\mathbf{0.3}}{\mathbf{2-0.3}}\left(\mathbf{1}-(\mathbf{0.7})^{\mathbf{8}}\right)} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(\mathbf{1}-0.0577)}$$

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(0.9423)} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1663} = 467.6 + 1.766 \cong 469.4$$

$\mathbf{CCL} = 467.6$

$\mathbf{LCL} = 467.6 - 1.766 = 465.8$

حدود السيطرة للعينة (5)

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{\frac{\mathbf{0.3}}{\mathbf{2-0.3}}\left(\mathbf{1}-(\mathbf{0.7})^{\mathbf{10}}\right)} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(\mathbf{1}-0.0283)}$$

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765(0.9717)} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1715} = 467.6 + 1.793 \cong 469.4$$

$\mathbf{CCL} = 467.6$

$\mathbf{LCL} = 467.6 - 1.793 = 465.8$

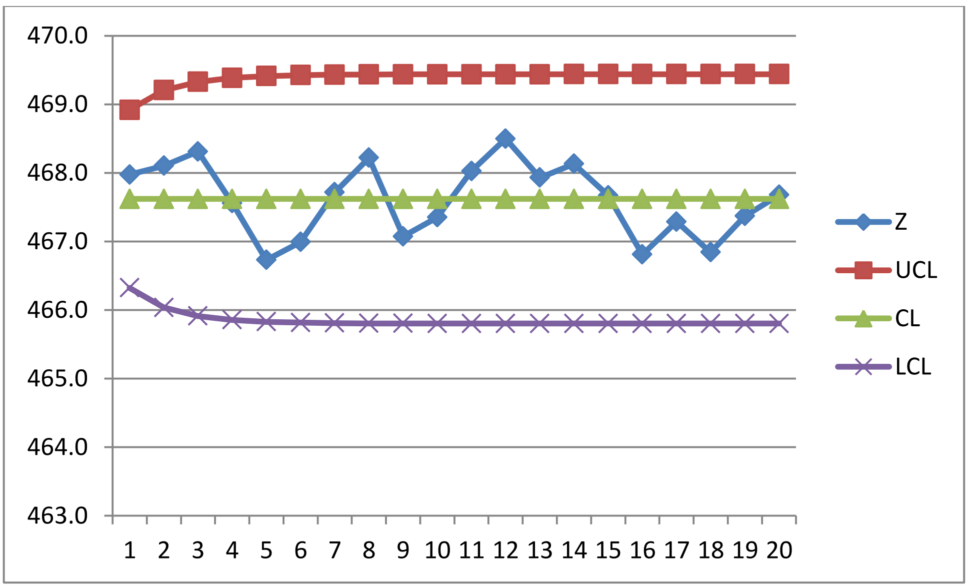
نستنتج ان حدود السيطرة للعينات من (6) الى (20) تكون كما يلي:

$\mathbf{UCL_6} = \mathbf{UCL_7} = \cdots = \mathbf{UCL_{20}}$

$$\mathbf{UCL} = 467.6 + 4.33\sqrt{\frac{\mathbf{0.3}}{\mathbf{2-0.3}}} = 467.6 + 4.33\sqrt{0.1765} = 467.6 + 1.819 \cong 469.4$$

$\mathbf{LCL_6} = \mathbf{LCL_7} = \cdots = \mathbf{LCL_{20}}$

$\mathbf{LCL} = 467.6 - 1.766 = 465.8$



لوحة الأوساط الحسابية المتحركة الموزونة اسياً

القرار: الإنتاج تحت السيطرة

Sample	Z	UCL	CL	LCL
1	468.0	468.92	467.6	466.32
2	468.1	469.20	467.6	466.04
3	468.3	469.33	467.6	465.91
4	467.6	469.38	467.6	465.86
5	466.7	469.41	467.6	465.83
6	467.0	469.42	467.6	465.82
7	467.7	469.4	467.6	465.8
8	468.2	469.4	467.6	465.8
9	467.1	469.4	467.6	465.8
10	467.4	469.4	467.6	465.8
11	468.0	469.4	467.6	465.8
12	468.5	469.4	467.6	465.8
13	467.9	469.4	467.6	465.8
14	468.1	469.4	467.6	465.8
15	467.7	469.4	467.6	465.8
16	466.8	469.4	467.6	465.8
17	467.3	469.4	467.6	465.8
18	466.8	469.4	467.6	465.8
19	467.4	469.4	467.6	465.8
20	467.7	469.4	467.6	465.8

تمرين (1): من انتاج احدى المواد الصناعية اخذت (10) عينات بأوقات منتظمة ، وبحجم (n=6) وحدات وكان الوسط الحسابي والمدى للعينات العشرة هو:

العينات	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\overline{X}$	22.1	36.4	29.1	30.3	25.2	30	28.6	30.2	23.3	26.2
R	14	13	21	18	16	16	19	24	20	21

حدد اذا كان الانتاج تحت السيطرة مستخدماً لوحة المتوسطات المتحركة الموزونة اسياً (EWMA – chart) ، علماً ان طول الفترة هو : $(\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0.4})$.

تمرين (2): للبيانات التالية ، حدد اذا كانت العملية تحت السيطرة مستخدماً لوحة الأوساط الحسابية المتحركة الموزونة اسياً بأخذ $(\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0.4})$

	X1	X2	X3	X4	X5	Mean	S.D.
Sample1	**469**	**468**	**470**	**469**	**468**	**468.8**	**0.837**
Sample2	**478**	**467**	**460**	**469**	**468**	**468.4**	**6.427**
Sample3	**467**	**478**	**462**	**469**	**468**	**468.8**	**5.805**
Sample4	**471**	**469**	**470**	**460**	**459**	**465.8**	**5.805**
Sample5	**467**	**468**	**459**	**460**	**470**	**464.8**	**4.970**
Sample6	**469**	**471**	**468**	**469**	**461**	**467.6**	**3.847**
Sample7	**469**	**470**	**469**	**469**	**470**	**469.4**	**0.548**
Sample8	**469**	**469**	**468**	**469**	**472**	**469.4**	**1.517**
Sample9	**459**	**466**	**469**	**469**	**459**	**464.4**	**5.079**
Sample10	**468**	**469**	**469**	**465**	**469**	**468**	**1.732**
Sample11	**469**	**470**	**469**	**471**	**469**	**469.6**	**0.894**
Sample12	**468**	**472**	**470**	**469**	**469**	**469.6**	**1.517**
Sample13	**466**	**469**	**471**	**459**	**468**	**466.6**	**4.615**
Sample14	**469**	**469**	**468**	**469**	**468**	**468.6**	**0.548**
Sample15	**459**	**469**	**469**	**468**	**468**	**466.6**	**4.278**
Sample16	**460**	**468**	**469**	**468**	**459**	**464.8**	**4.868**
Sample17	**469**	**466**	**468**	**470**	**469**	**468.4**	**1.517**
Sample18	**470**	**459**	**468**	**461**	**471**	**465.8**	**5.450**
Sample19	**467**	**468**	**470**	**469**	**469**	**468.6**	**1.140**
Sample20	**466**	**468**	**469**	**469**	**470**	**468.4**	**1.517**
متوسط المقاييس						467.6	3.146

المحاضرة (3) / لوحة المجموع المتراكم

يرمز لها بالرمز (CUSUM Chart) ، تهدف الى الكشف عن الانحرافات الصغيرة في العملية الإنتاجية التي لا تظهرها لوحات شيورات ، تم اقتراحها من قبل العالم (Page) في عام 1954 ، وتم تطويرها من قبل (Branard) في عام 1959 وكذلك من قبل كل من (Ewan and Kemp) واخرون في عام 1960.

تراقب هذه اللوحة انحرافات المشاهدات في العملية الإنتاجية في الحالات التي يقل فيها الانحراف عن انحرافين معياريين ، ويتم حساب المجموع المتراكم كما يلي:

$$\boxed{Q_j = \sum_{j=1}^{k} \bar{X}_j - \mu_0} \quad \text{, where } \mu_0 = \bar{\bar{X}}$$

$$\textbf{For sample 1} \Rightarrow Q_1 = \bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}$$

$$\textbf{For sample 2} \Rightarrow Q_2 = (\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}) + (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}) = Q_1 + (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}})$$

$$\textbf{For sample 3} \Rightarrow Q_3 = (\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}) + (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}) + (\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}) = Q_2 + (\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}})$$

$$\vdots$$

$$\textbf{For sample k} \Rightarrow Q_k = Q_{k-1} + (\bar{X}_k - \bar{\bar{X}})$$

خطوات إيجاد القيم الثابتة للوحة المجموع المتراكم:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

او

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{C_2}$$

حيث ان:

C_2 , d_2 : قيم جدولية تعتمد على قيمة عدد المشاهدات داخل العينات الفرعية n .

$$2\sigma_{\bar{X}} = \frac{2\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - 2\sigma_{\bar{X}}$$

ويقرب الناتج الى اقرب عدد صحيح للحد الأدنى ، لنجد قيمة الثابت h

$$h = \bar{\bar{X}} - x$$

حيث ان:

$x = \text{LCL}$: بعد ان يتم تقريب حد السيطرة الأدنى عند انحرافين معياريين لاقرب عدد صحيح.

نستخرج قيمة الثابت k وكما يلي:

$$k = \bar{\bar{X}} - y$$

$$y = \frac{\bar{\bar{X}} + x}{2}$$

ملاحظة مهمة: ان قيمة k اصغر من قيمة h أي ان

$$k < h$$

نجد قيمة المسافة

$$\boxed{d = \frac{h}{k}}$$

نجد قيمة الزاوية باستعمال الحاسبة العلمية

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{k\sqrt{n}}{2\hat{\sigma}}\right)$$

مثال: البيانات في الادنى تمثل الوسط الحسابي والمدى لعشر عينات بحجم (5) وحدات ، اخذت بأوقات منتظمة من انتاج احدى السلع ، مستخدما لوحة المجموع المتراكم في الاختبار بطريقة القناع حدد اذا كان الانتاج تحت السيطرة.

المدى	الوسط الحسابي	العينة
4	24	1
6	19	2
5	20	3
3	22	4
4	26	5
3	23	6
2	25	7
4	22	8
3	20	9
5	21	10

الحل:

العينة	$\bar{X}$	R	$\bar{X}-\mu$	$Q_r = \sum \bar{X}_i - (\mu - k)$
1	24	4	1.8	1.8
2	19	6	-3.2	-1.4
3	20	5	-2.2	-3.6
4	22	3	-0.2	-3.8
5	26	4	3.8	0
6	23	3	0.8	0.8
7	25	2	2.8	3.6
8	22	4	-0.2	3.4
9	20	3	-2.2	1.2
10	21	5	-1.2	0
SUM	222	39		
MEAN	22.2	3.9	$\bar{\bar{X}} = \mu = 22.2 \quad , \bar{R} = 3.9$	

$\because n = 5 \ \rightarrow d_2 = 2.326$ (قيمة جدولية)

$$\because \hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{3.9}{2.326} = \boxed{1.677}$$

$$\because 2\sigma_{\bar{X}} = \frac{2\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{3.354}{\sqrt{5}} = 1.499 \cong 1.5$$

$$\therefore \text{LCL} = \bar{\bar{X}} - 2\sigma_{\bar{X}} = 22.2 - 1.5 = 20.7 \cong 21 \Longrightarrow \therefore \boxed{\text{LCL} = 21}$$

$$\because \boxed{h = \mu - x} \Longrightarrow \therefore h = 22.2 - 21 = 1.2 \qquad \ldots(2)$$

x : حد الرفض الادنى وهي قيمة يتم استخراجها.

y : متوسط $(\mu - k)$ الذي يتم استخراجه وفق الصيغة :

$$(\mu - k) = \frac{\mu + (\mu - h)}{2} = \frac{22.2 + 21}{2} = \frac{43.2}{2} = 21.6$$

$$\therefore \boxed{k = \mu - y} \Longrightarrow \therefore k = 22.2 - 21.6 = 0.6$$

ملاحظة:

$$k < h \Longrightarrow k = 0.6 < h = 1.2$$

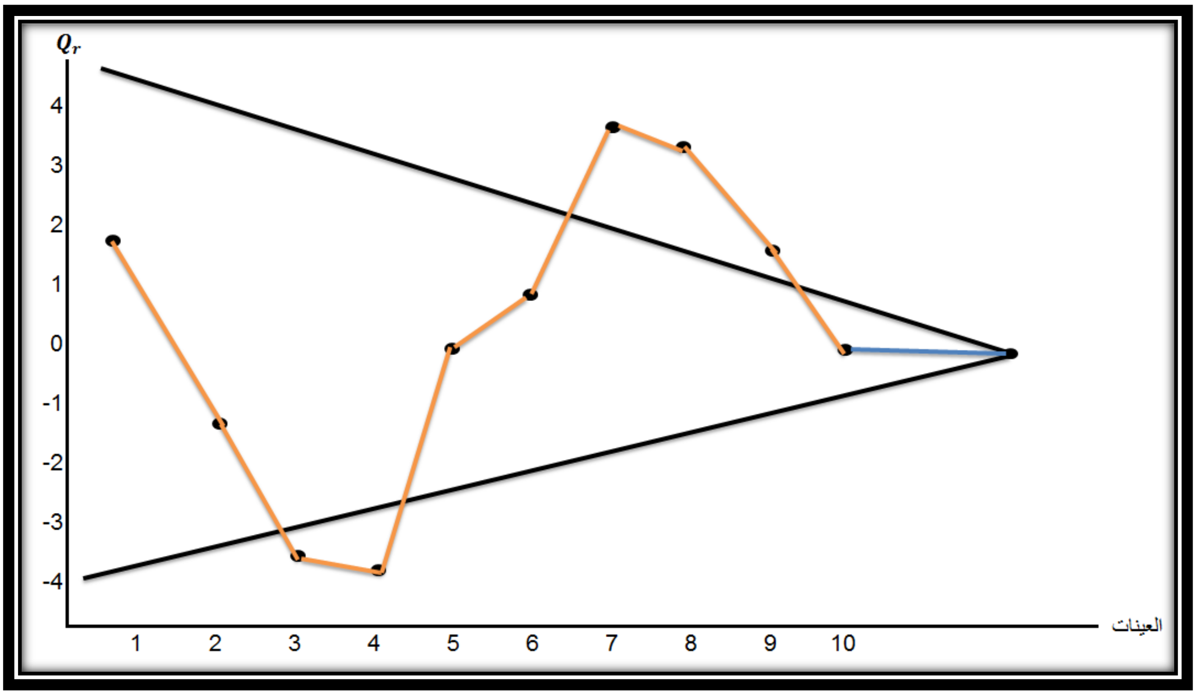
$$\therefore \boxed{d = \frac{h}{k}} \Longrightarrow \therefore d = \frac{1.2}{0.6} = 2$$

1- من المعادلة (4) نجد قيمة θ وكما يلي:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{k\sqrt{n}}{2\hat{\sigma}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.6\sqrt{5}}{3.354}\right) = \tan^{-1}(0.4)$$

باستعمال الحاسبة العلمية وكما يلي:

$$(1)\ 0.4 \rightarrow (2) 2ndf \rightarrow (3) \tan = 21.8 \cong 22$$



لوحة المجموع المتراكم : (Cu Sum – Chart)

القرار: بما ان منحنى المجموع المتراكم قد قطع ذراعي القناع ، إذاً الانتاج خارج السيطرة.

تمرين: للبيانات في الادنى عن الوسط الحسابي والانحراف المعياري لـ (12) عينة اخذت بأوقات منتظمة وبحجم (4) وحدات:

العينة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الوسط الحسابي	18	17	20	19	17	21	19	20	22	18	23	21
الانحراف المعياري	1.2	3.4	1.4	1.8	3.1	1.1	2.3	1.4	2.8	2.6	2.1	1.8

المطلوب: حدد إذا كان الانتاج تحت السيطرة مستخدماً لوحة المجموع المتراكم مع اختبار القناع على اساس ان (m=20).

الحل:

العينة	الوسط الحسابي	الانحراف المعياري
1	18	1.2
2	17	3.4
3	20	1.4
4	19	1.8
5	17	3.1
6	21	1.1
7	19	2.3
8	20	1.4
9	22	2.8
10	18	2.6
11	23	2.1
12	21	1.8
المجموع	235	25
الوسط	19.583	2.083

$\because n = 4 \rightarrow C_2 = 0.7979$ (قيمة جدولية)

$$\because \hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{C_2} = \frac{2.083}{0.7979} = \boxed{2.611}$$

$$\because 2\sigma_{\bar{X}} = \frac{2\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{3.354}{\sqrt{4}} = 5.221 \cong 5$$

$$\therefore \text{LCL} = \overline{\overline{\text{X}}} - 2\sigma_{\overline{\text{X}}} = 19.583 - 5 = 14.583 \cong 15 \Longrightarrow \therefore \boxed{\text{LCL} = 15}$$

$$\because \boxed{\text{h} = \mu - \text{x}} \Longrightarrow \therefore \text{h} = 20 - 15 = 5 \qquad \ldots (2)$$

x : حد الرفض الادنى و هي قيمة يتم استخراجها.

y : متوسط $(\mu - \text{k})$ الذي يتم استخراجه وفق الصيغة :

$$(\mu - \text{k}) = \frac{\mu + (\mu - \text{h})}{2} = \frac{20 + 25}{2} = \frac{45}{2} = 22.5$$

$$\therefore \boxed{\text{k} = \mu - \text{y}} \Longrightarrow \therefore k = 22.2 - 21.6 = 0.6$$

ملاحظة:

$$\text{k} < \text{h} \Longrightarrow \text{k} = 0.6 < \text{h} = 1.2$$

$$\therefore \boxed{\text{d} = \frac{\text{h}}{\text{k}}} \Longrightarrow \therefore \text{d} = \frac{1.2}{0.6} = 2$$

1- من المعادلة (4) نجد قيمة θ وكما يلي:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\text{k}\sqrt{\text{n}}}{2\hat{\sigma}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.6\sqrt{5}}{3.354}\right) = \tan^{-1}(0.4)$$

باستعمال الحاسبة العلمية وكما يلي:

$$(1)\ 0.4 \rightarrow (2) 2\text{ndf} \rightarrow (3) \tan = 21.8 \cong 22$$

المحاضرة (4) / لوحة متعدد المتغيرات (Multivariate T^2 Chart)

من عيوب لوحات السيطرة السابقة ، إنها تستخدم فقط لمتغير واحد ولكون أي منتوج او سلعة تحتوي على اكثر من متغير كانت الحاجة ماسة الى تصميم لوحات سيطرة لمراقبة اكثر من متغير ، وبدأ العلماء ومنهم العالم هوتلنك (Hotelling) عام 1967 بتصميم هذا النوع من اللوحات ، وسمي بأسلوب متعدد المتغيرات في السيطرة النوعية.

ان حد السيطرة الأدنى في لوحة متعدد المتغيرات يساوي صفر.

ان حد السيطرة الأعلى يستخرج وفق الصيغة التالية:

$$\boxed{\mathbf{UCL\ T^2} = \frac{\mathbf{P(K-1)(n-1)}}{\mathbf{Kn-K-P+1}} * \left(\mathbf{F}_{(\alpha)^{0.05}_{0.01},\mathbf{p},\mathbf{Kn-K-P+1}}\right)}$$

حيث ان:

P: عدد المتغيرات ، n : حجم العينة ، k : عدد العينات.

$\mathbf{F}_{\alpha,\mathbf{p},\mathbf{Kn-K-P+1}}$: قيمة جدولية ، $(\alpha)^{0.05}_{0.01}$: مستوى المعنوية.

ملاحظة: اذا كان عدد العينات اكثر من 100 عينة أي ان $k > 100$ فيمكن إيجاد الحد الأعلى للوحة متعدد المتغيرات وفق الصيغة التالية:

$$\boxed{\mathbf{UCL\ T^2} = \frac{\mathbf{P(k-1)}}{\mathbf{k-P}} * \left(\mathbf{F}_{(\alpha)^{0.05}_{0.01},\mathbf{p},\mathbf{k-p}}\right)}$$

ولتحديد إذا كان الانتاج تحت السيطرة نستخرج قيمة $\mathbf{T^2}$ لكل عينة من العينات ، فإذا كان لدينا متغيرين فقط نستخدم الصيغة التالية:

$$\boxed{\mathbf{T^2}_i = \frac{\mathbf{n}}{(\bar{\mathbf{S}}^2{}_1)(\bar{\mathbf{S}}^2{}_2) - (\bar{\mathbf{S}}_{12})^2}\left[(\bar{\mathbf{S}}^2{}_2) * (\bar{\mathbf{X}}_{1i} - \bar{\bar{\mathbf{X}}}_1)^2 + (\bar{\mathbf{S}}^2{}_1) * (\bar{\mathbf{X}}_{2i} - \bar{\bar{\mathbf{X}}}_2)^2 - 2(\bar{\mathbf{S}}_{12})(\bar{\mathbf{X}}_{1i} - \bar{\bar{\mathbf{X}}}_1)(\bar{\mathbf{X}}_{2i} - \bar{\bar{\mathbf{X}}}_2)\right]}$$

مثال: اخذت (20) عينة من انتاج احدى السلع بحجم (8) وحدات ، وبأوقات منتظمة وكانت البيانات المسجلة كما يلي: اذا علمت ان $\bar{\bar{X}}_1 = 15.3$ ، $\bar{\bar{X}}_2 = 2.95$

العينات	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$
1	15.8	3.02
2	14.8	2.7
3	15.4	3
4	15.7	3.04
5	14.7	2.9
6	15.5	2.8
7	14.9	3.1
8	15.8	3.03
9	15.9	2.88
10	14.9	3.01
11	15.7	2.82
12	15	2.92
13	15.9	3.1
14	15.9	3.2
15	15.1	2.9
16	14.6	3.08
17	15.2	2.75
18	15.3	3
19	14.7	2.9
20	14.9	2.85

$\bar{S}^2{}_1 = 1.26$

$\bar{S}^2{}_2 = 0.81$

$\bar{S}_{12} = 0.78$

المطلوب: حدد اذا كان الإنتاج تحت السيطرة مستخدماً لوحة متعدد المتغيرات T^2 ، بأخذ $\alpha = 0.001$

الحل: من معطيات السؤال نحدد ما يلي:

$P = 2$: عدد المتغيرات ، $n = 8$: حجم العينة ، $k = 20$: عدد العينات.

$F_{0.001\,,2,160-20-2+1} = F_{0.001\,,2,139} \cong F_{0.001\,,2,120} \cong 7.3$: قيمة جدولية

$$\boxed{\text{UCL } T^2 = \frac{P(K-1)(n-1)}{Kn-K-P+1} * \left(F_{(\alpha)^{0.05}_{0.01}\,,p,Kn-K-P+1}\right)}$$

$$\text{UCL } T^2 = \frac{2(20-1)(8-1)}{160-20-2+1} * \left(F_{(\alpha)0.001\,,2,139}\right)$$

$$\text{UCL } T^2 = \frac{2(19)(7)}{139} * (7.3) = \frac{266}{139} * (7.3) \cong 13.97$$

للعينة (1):

$$\boxed{T^2{}_i = \frac{n}{(\bar{S}^2{}_1)(\bar{S}^2{}_2) - (\bar{S}_{12})^2}\left[(\bar{S}^2{}_2) * \left(\bar{X}_{1i} - \bar{\bar{X}}_1\right)^2 + (\bar{S}^2{}_1) * \left(\bar{X}_{2i} - \bar{\bar{X}}_2\right)^2 - 2(\bar{S}_{12})(\bar{X}_{1i} - \bar{\bar{X}}_1)(\bar{X}_{2i} - \bar{\bar{X}}_2)\right]}$$

$$T^2{}_1 = \frac{8}{(1.26)(0.81) - (0.78)^2}[(0.81) * (15.8 - 15.3)^2 + (1.26) * (3.02 - 2.95)^2 - 2(0.78)(15.8 - 15.3)(3.02 - 2.95)]$$

$$\frac{8}{(1.26)(0.81) - (0.78)^2} = \frac{8}{1.021 - 0.608} = \frac{8}{0.413} = 19.371$$

$$(0.81) * (15.8 - 15.3)^2 = (0.81) * (0.5)^2 = 0.203$$

$$(1.26) * (3.02 - 2.95)^2 = (1.26) * (0.07)^2 = 0.006$$

$$2(0.78)(15.8 - 15.3)(3.02 - 2.95) = 1.56(0.5)(0.07) = 0.055$$

$$T^2{}_1 = 19.371[0.203 + 0.006 - 0.055] = 19.371[0.154] = 2.98$$

للعينة (2):

$$T^2{}_2 = 19.371[(0.81) * (14.8 - 15.3)^2 + (1.26) * (2.7 - 2.95)^2 - 2(0.78)(14.8 - 15.3)(2.7 - 2.95)]$$

$$(0.81) * (14.8 - 15.3)^2 = (0.81) * (-0.5)^2 = 0.203$$

$$(1.26) * (2.7 - 2.95)^2 = (1.26) * (-0.25)^2 = 0.079$$

$$2(0.78)(14.8 - 15.3)(2.7 - 2.95) = 1.56(-0.5)(-0.25) = 0.195$$

$$T^2{}_2 = 19.371[0.203 + 0.079 - 0.195] = 19.371[0.087] = 1.69$$

و هكذا لبقية العينات.

تمرين: اذا علمت ان:

$P = 2$: عدد المتغيرات ، $n = 5$: حجم العينة ، $k = 20$: عدد العينات.

$F_{0.05\,,2,100-20-2+1} = F_{0.05\,,2,79} \cong F_{0.05\,,2,79} \cong 3.1$: قيمة جدولية

وان $\bar{\bar{X}}_1 = 20.4$ ، $\bar{\bar{X}}_2 = 6.2$

$\bar{S}^2{}_1 = 1.2$

$\bar{S}^2{}_2 = 0.82$

$\bar{S}_{12} = 0.79$

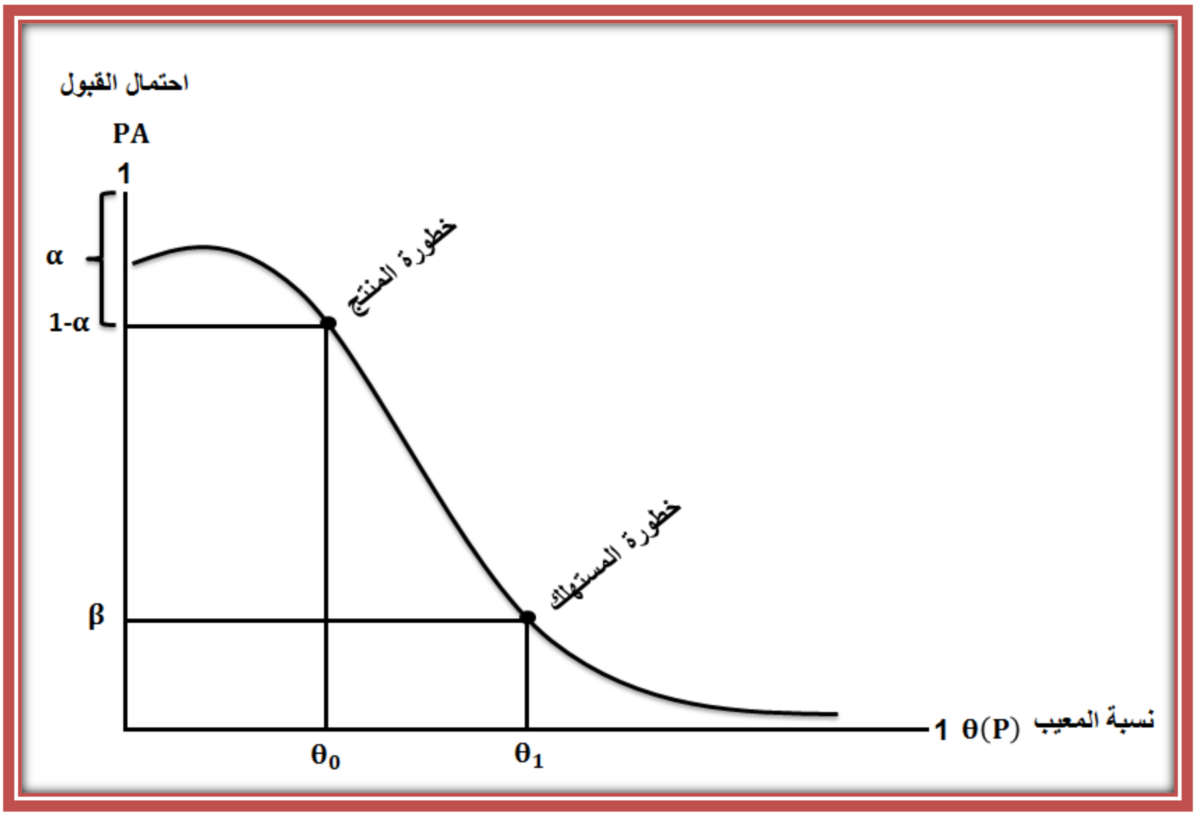
المطلوب: ارسم لوحة متعدد المتغيرات بأخذ $\alpha = 0.05$ ، ثم حدد اذا كانت العينة التي وسطيها

$\bar{X}_1 = 19$ ، $\bar{X}_2 = 5.2$ ، تحت السيطرة.

المحاضرة (5) : الفحص بالمعاينة وخططها: (Sampling inspection and its plans)

منحنى خاصية التشغيل: وهو عبارة عن رسم بياني يمثل العلاقة بين مستوى النوعية متمثلاً بمعيار نسب المعيب واحتمال القبول.

ويمكن التعبير عن ذلك وفق الرسم الآتي:



(منحنى خاصية التشغيل)

خطورة المنتج: وتتمثل باحتمال رفض دفعة انتاج جيدة وقيمتها الاحتمالية α .

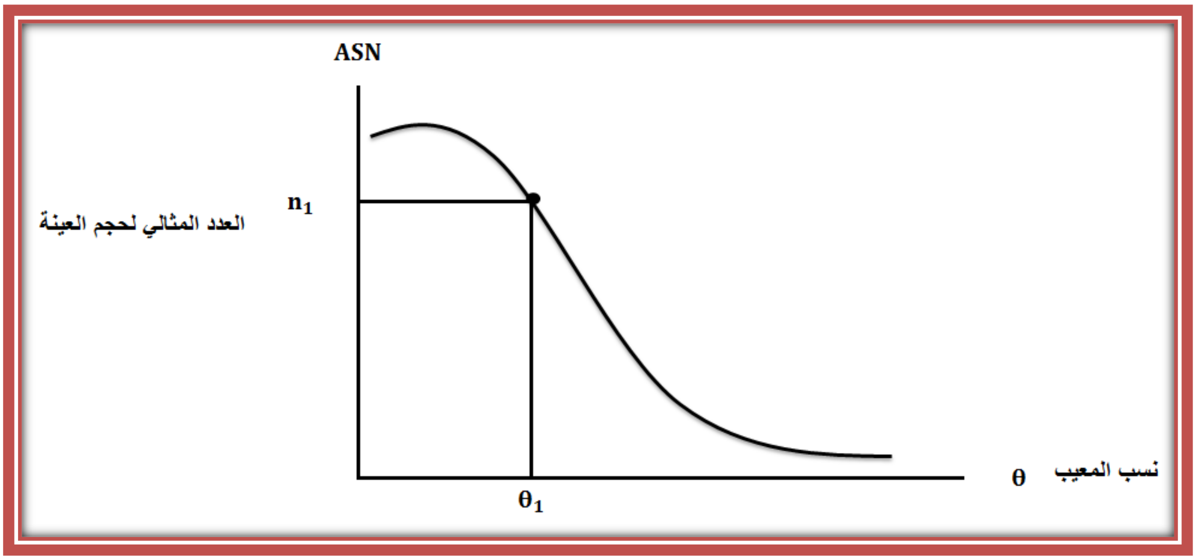
خطورة المستهلك: وتتمثل باحتمال قبول دفعة انتاج رديء وقيمتها الاحتمالية β .

عدد القبول: يمثل احد المعايير الرئيسية في خطط المعاينة وفي حالة الفحص بالصفات التمييزية يكون عدد القبول عبارة عن عدد العيوب او عدد الوحدات المعيبة التي يسمح بقبولها لقبول دفعة الانتاج ، وفي حالة الفحص للمتغيرات تتمثل بقيمة مثالية او معيارية يتطلب عدم تجاوزها لقبول دفعة الانتاج.

العدد المتوسط للعينة: وهو عبارة عن حجم العينة المتوقع للوصول الى اتخاذ قرار بقبول او رفض دفعة الانتاج ويمكن استخراجه وفق الصيغة التالية:

$$ASN = n + (1 - \beta)(N - n)$$

كذلك يمكن رسم منحنى العدد المتوسط للعينة ASN بجعل المحور الافقي لنسب المعيب والمحور العمودي لقيم العدد المتوسط للعينة ASN.



(**منحنى العدد المتوسط للعينة** ASN)

انواع خطط المعاينة:

يوجد نوعين من اساليب الفحص بالمعاينة هما الفحص بالمعاينة للمتغيرات والفحص بالمعاينة للخواص وهنالك اربعة انواع رئيسية من خطط الفحص بالمعاينة وهي:

1. خطة المعاينة المفردة.
2. خطة المعاينة المزدوجة.
3. خطة المعاينة متعددة المراحل.
4. خطة المعاينة التتابعية.

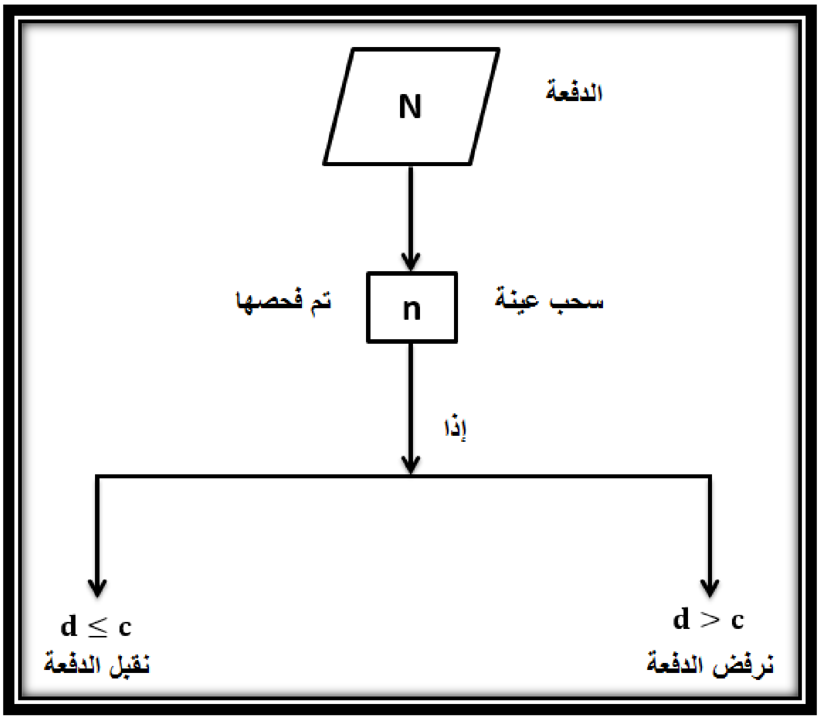
اولاً : خطة المعاينة المفردة: (Single Sampling Plan)

وهي من ابسط انواع الخطط واسهلها لوضوح خطواتها وتتطلب معرفة حجم العينة المراد سحبها (n) ، وكذلك عدد القبول (c) ، وتكون خطواتها بالشكل الآتي:

1) نحدد الدفعة المراد فحصها وهي تمثل المجتمع (N).
2) يتم سحب عينة بحجم (n) من الدفعة (N).
3) يتم فحص مفردات العينة من الوحدات المسحوبة ومقارنتها بالمعايير المحددة مسبقاً وتحديد عدد الوحدات غير المطابقة (المعيبة) (d) التي تم تأشيرها.
4) مقارنة عدد الوحدات غير المطابقة (d) مع عدد القبول (c) ، واتخاذ القرار بقبول او رفض الدفعة وفقاً لما يلي:

⇐ إذا كان عدد الوحدات غير المطابقة (d) اقل من او يساوي عدد القبول (c) اي ان $(d \leq c)$ ، نقبل دفعة الانتاج وتصحيح او تبديل الوحدات المعيبة.

⇐ إذا كان عدد الوحدات غير المطابقة (d) اكبر من عدد القبول (c) اي ان $(d > c)$ ، ترفض دفعة الانتاج و يمكن معالجة ذلك بإجراء الفحص الشامل ان امكن ، ثم معالجة الوحدات غير المطابقة (D) في الدفعة (N). والشكل التوضيحي لخطة المعاينة المفردة هو الآتي:



الشكل التوضيحي لخطة المعاينة المفردة

ثانياً : خطة المعاينة المزدوجة: (Double Sampling Plan)

بالرغم من بساطة النوع الأول من الخطط (خطة المعاينة المفردة) ، فإن من العيوب المحددة هو إمكانية رفض دفعة انتاج جيدة لاسباب تتعلق بعاملي **الصدفة** و **التحيز** ، ولغرض الوصول الى القرار السليم تم وضع خطة المعاينة المزدوجة والتي استخدمت في العام 1929م ، من قبل (Dodge-Roming) ، وتتطلب المعاينة المزدوجة سحب عينتين (n_1, n_2) وعلى مرحلتين وتحديد عدد القبول لكل منهما (c_1, c_2)، ولا بد من توفر المعلومات التالية:

(N): حجم الدفعة او المجتمع.
(n_1) : حجم العينة الأولى التي تسحب في المرحلة الأولى.
(n_2) : حجم العينة الثانية التي تسحب في المرحلة الثانية.
(d_1) : عدد الوحدات غير المطابقة في العينة الأولى (n_1).
(d_2) : عدد الوحدات غير المطابقة في العينة الثانية (n_2).
(c_1) : عدد القبول في المرحلة الأولى للعينة الأولى (n_1).
(c_2) : عدد القبول في المرحلة الثانية للعينتين الأولى والثانية (n_1, n_2) ، (يمكن اعتباره عدد الرفض للمرحلة الأولى).

وتكون خطواتها بالشكل الآتي:

1. نحدد الدفعة المراد فحصها وهي تمثل المجتمع (N).
2. يتم سحب العينة الأولى (n_1) ويتم فحص مفرداتها وتحديد عدد الوحدات غير المطابقة (d_1) ، ويتم اتخاذ القرار بالمقارنة مع عددي القبول (c_1, c_2) بواحدة من ثلاث:

⇐ **إذا كان عدد الوحدات غير المطابقة (d_1) اصغر من او يساوي عدد القبول (c_1) اي ان $(d_1 \leq c_1)$ ، نقبل دفعة الانتاج ونتوقف مع معالجة الوحدات غير المطابقة او إبدالها.**

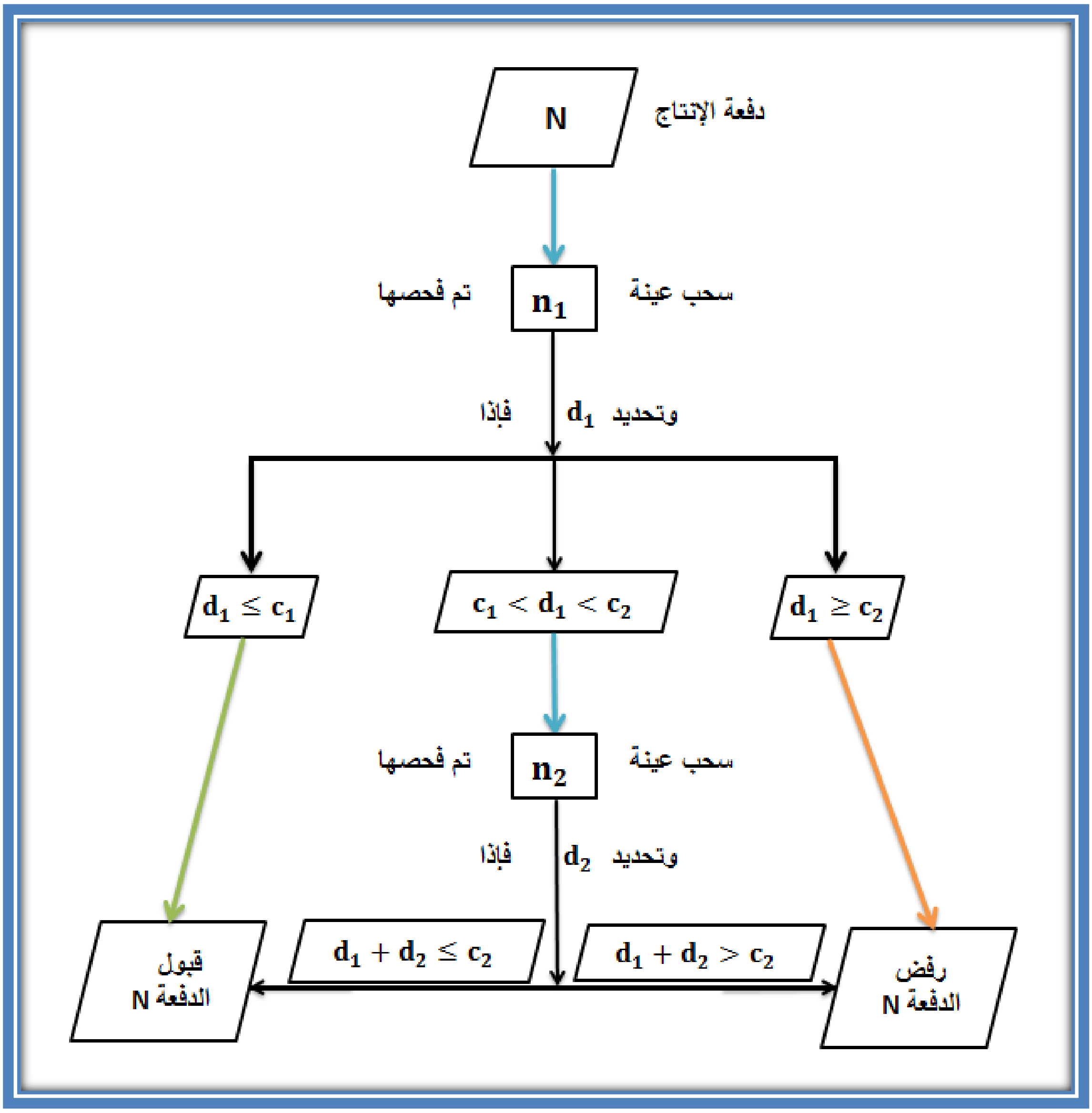
⇐ **إذا كان عدد الوحدات غير المطابقة (d_1) اكبر من او يساوي عدد القبول (c_2) اي ان $(d_1 \geq c_2)$ ، نرفض دفعة الإنتاج ونتوقف وتتم المعالجة باستخدام الفحص الشامل ان امكن.**

⇐ **اذا كان $c_1 < d_1 < c_2$ ، أي ان (d_1) اكبر من (c_1) واصغر من (c_2) نتجه لسحب عينة ثانية (n_2).**

3. يتم سحب العينة الثانية (n_2) ويتم فحص مفرداتها وتحديد عدد الوحدات غير المطابقة (d_2) ، ويتم اتخاذ القرار بعد المقارنة مع عددي القبول (c_1, c_2) وفقاً لما يلي:

⇐ إذا كان مجموع عدد الوحدات غير المطابقة للعينتين $(d_1 + d_2)$ اصغر من او يساوي عدد القبول (c_2) اي ان $(d_1 + d_2 \leq c_2)$ ، نقبل دفعة الانتاج ونتوقف مع معالجة الوحدات غير المطابقة.

⇐ إذا كان مجموع عدد الوحدات غير المطابقة $(d_1 + d_2)$ اكبر من عدد القبول (c_2) اي ان $(d_1 + d_2 > c_2)$ ، ترفض دفعة الإنتاج ونلجأ الى الفحص الشامل ومعالجة الوحدات غير المطابقة، والشكل الآتي يوضح خطة المعاينة المزدوجة:



الشكل التوضيحي لخطة المعاينة المزدوجة

ثالثاً : خطة المعاينة متعددة المراحل: (Multiple Sampling Plan)

وهي الخطة المقترحة من قبل (Bartky) عام 1943 قبل ان تجرى عليها بعض التعديلات عام 1950 من قبل (Hamaker&Enters) ، لانهُ بالرغم من ان خطة المعاينة المزدوجة تعطي فرصة ثانية لإتخاذ القرار لكن يبقى الشك في عدم كفاية اتخاذ قرار بمرحلتين وانهُ بالإمكان تكرار المحاولات والاستمرار بسحب عينات أخرى ، (سحب عينة ثالثة ، رابعة ، ... الخ) وفي الغالب تتم عملية سحب العينات متعددة المراحل الى حد المرحلة السابعة او المرحلة الثامنة باتباع نفس الإجراءات المتبعة في خطة المعاينة المزدوجة.

إذاً خطة المعاينة متعددة المراحل تمثل تطوير لخطة المعاينة المزدوجة وتستند الى الاستمرار بسحب العينات لغاية اتخاذ القرار السليم بقبول او رفض دفعة الإنتاج من خلال تحديد معياري عدد القبول (c) وعدد الرفض (r) لكل مرحلة من المراحل مع إمكانية اخذ العينات بحجوم متساوية وللمراحل كافة.

وتكون خطواتها بالشكل الآتي:

1. نحدد الدفعة المراد فحصها وهي تمثل المجتمع (N).
2. يتم سحب العينة الأولى (n_1) ويتم فحص مفرداتها وتحديد عدد الوحدات غير المطابقة (d_1) ، ويتم اتخاذ القرار بالمقارنة مع عدد القبول (c_1) وعدد الرفض (r_1) بواحدة من ثلاث:

⇐ **إذا كان عدد الوحدات غير المطابقة (d_1) اصغر من او يساوي عدد القبول (c_1) اي ان $(d_1 \leq c_1)$ ، نقبل دفعة الانتاج ونتوقف مع معالجة الوحدات غير المطابقة او إبدالها.**

⇐ **إذا كان عدد الوحدات غير المطابقة (d_1) اكبر من او يساوي عدد الرفض (r_1) اي ان $(d_1 \geq r_1)$ ، نرفض دفعة الإنتاج ونتوقف وتتم المعالجة باستخدام الفحص الشامل ان امكن.**

⇐ **اذا كان $c_1 < d_1 < r_1$ ، أي ان (d_1) اكبر من (c_1) واصغر من (r_1) نتجه لسحب عينة ثانية (n_2).**

3. يتم سحب العينة الثانية (n_2) ويتم فحص مفرداتها وتحديد عدد الوحدات غير المطابقة (d_2) ، ويتم اتخاذ القرار بعد المقارنة مع عدد القبول (c_2) وعدد الرفض (r_2) بواحدة من ثلاث وفقاً لما يلي:

⇐ إذا كان مجموع عدد الوحدات غير المطابقة للعينتين $(d_1 + d_2)$ اصغر من او يساوي عدد القبول (c_2) اي ان $(d_1 + d_2 \leq c_2)$ ، نقبل دفعة الانتاج ونتوقف مع معالجة الوحدات غير المطابقة.

⇐ إذا كان مجموع عدد الوحدات غير المطابقة $(d_1 + d_2)$ اكبر من او يساوي عدد الرفض (r_2) اي ان: $(d_1 + d_2 \geq r_2)$ ، ترفض دفعة الإنتاج ونلجأ الى الفحص الشامل ومعالجة الوحدات غير المطابقة.

⇐ اذا كان $c_2 < d_1 + d_2 < r_2$ ، أي ان $(d_1 + d_2)$ اكبر من (c_2) واصغر من (r_2) نتجه لسحب عينة ثالثة (n_3).

4. يتم سحب العينة الثالثة (n_3) ويتم فحص مفرداتها وتحديد عدد الوحدات غير المطابقة (d_3) ، ويتم اتخاذ القرار بعد المقارنة مع عدد القبول (c_3) وعدد الرفض (r_3) بواحدة من ثلاث وفقاً لما يلي:

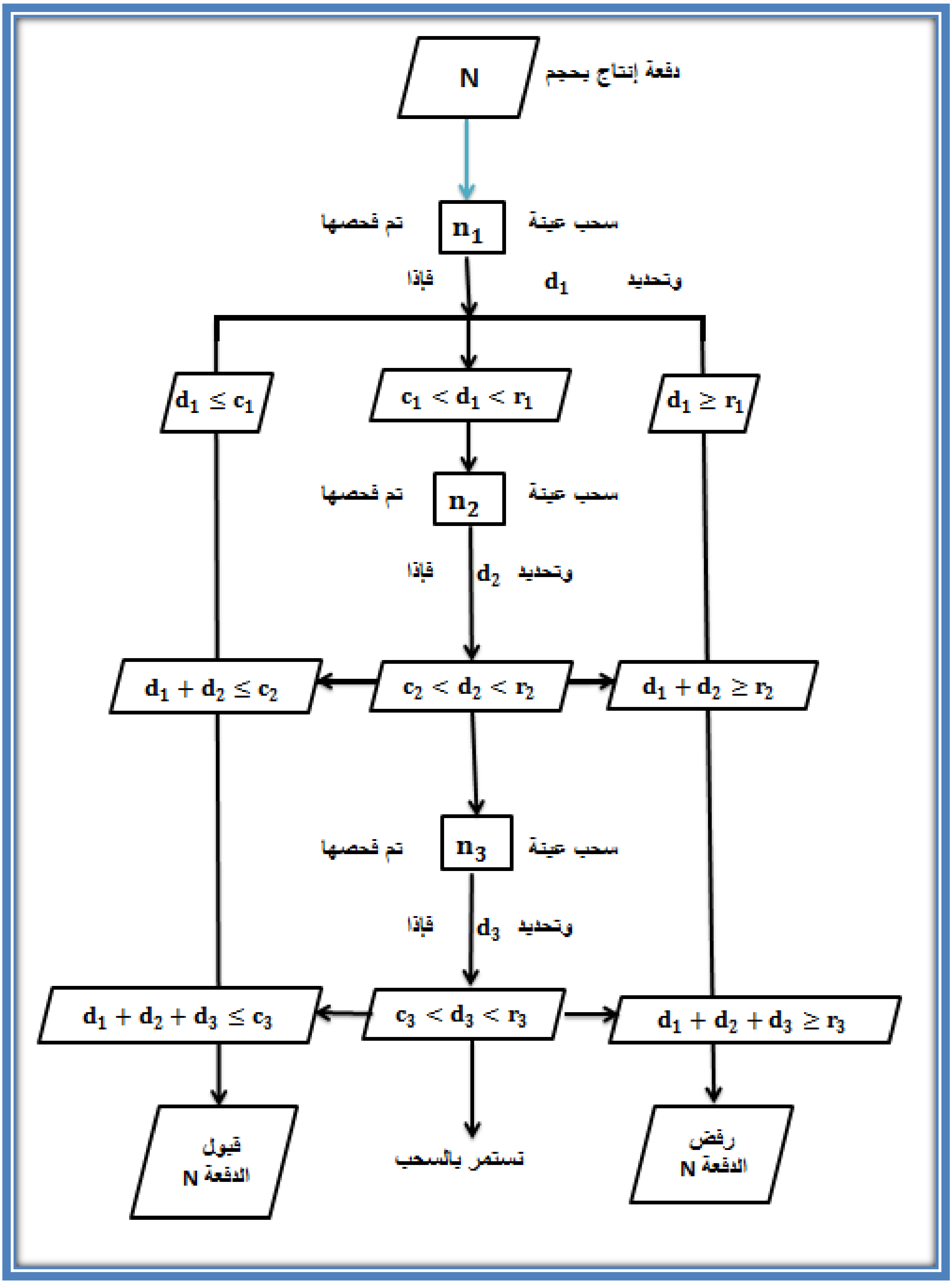
⇐ إذا كان مجموع عدد الوحدات غير المطابقة للعينتين $(d_1 + d_2 + d_3)$ اصغر من او يساوي عدد القبول (c_3) اي ان $(d_1 + d_2 + d_3 \leq c_3)$ ، نقبل دفعة الانتاج ونتوقف مع معالجة الوحدات غير المطابقة.

⇐ إذا كان مجموع عدد الوحدات غير المطابقة $(d_1 + d_2 + d_3)$ اكبر من او يساوي عدد الرفض (r_3) اي ان: $(d_1 + d_2 + d_3 \geq r_3)$ ، ترفض دفعة الإنتاج ونلجأ الى الفحص الشامل ومعالجة الوحدات غير المطابقة.

⇐ اذا كان $c_3 < d_1 + d_2 + d_3 < r_3$ ، أي ان $(d_1 + d_2 + d_3)$ اكبر من (c_3) واصغر من (r_3) نسحب عينة رابعة (n_4).

وهكذا نستمر بالفحص عينة بعد أخرى الى ان نقبل دفعة الإنتاج وفقاً للإجراءات السابقة في أعلاه على ان لا تتجاوز المرحلة السابعة او الثامنة ثم نتوقف.

ملاحظة: عدد القبول يكون اقل من عدد الرفض

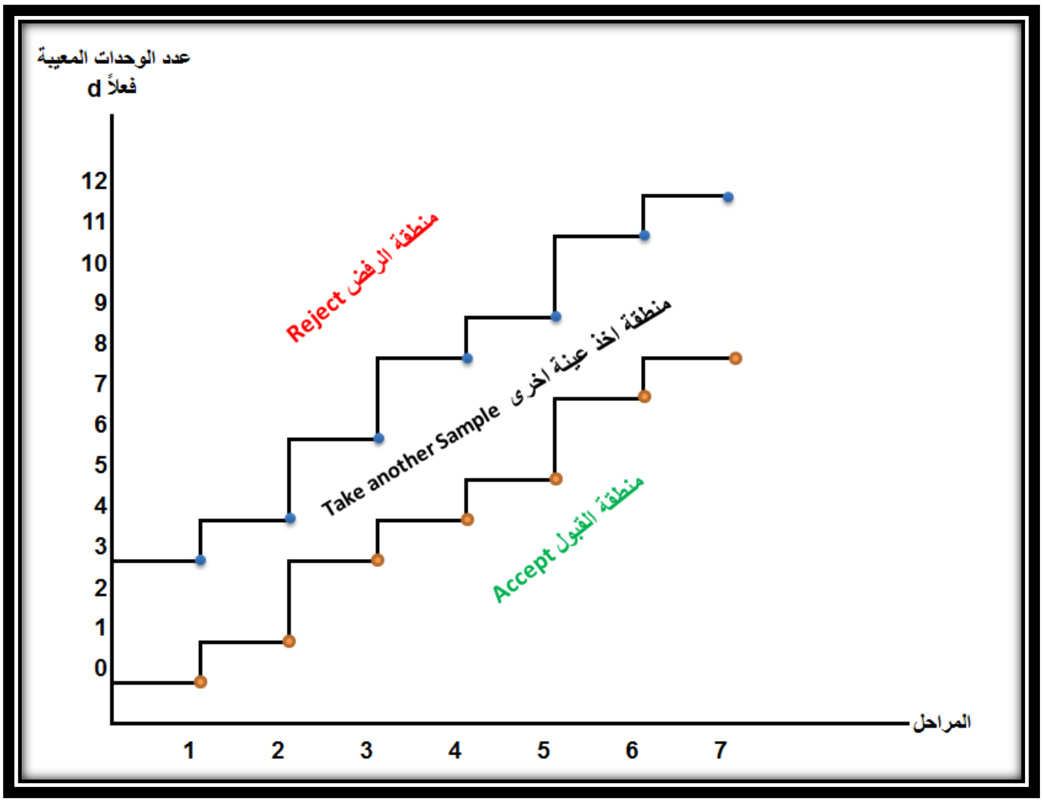


الشكل التوضيحي لخطة المعاينة متعددة المراحل

مثال: الجدول في الأدنى يوضح اعداد القبول (c) ، و اعداد الرفض (r) ، لخطة معاينة بسبعة مراحل اخذت بحجم 15 وحدة في كل مرة تضاعفياً ، والمطلوب رسم بياني يوضح مناطق القرار الثلاثة (منطقة الرفض ، منطقة القبول ، منطقة اخذ عينات أخرى)

المرحلة	c	r
1	0	3
2	1	4
3	3	6
4	4	8
5	5	9
6	7	11
7	8	12

الحل:



رسم بياني: يوضح المناطق الثلاثة

5-7. خطة المعاينة التتابعية Sequential Sampling Plan

في الخطط الثلاث السابقة يتم تحديد حجم العينة مسبقاً وإن معدل الوحدات (المفردات) المفحوصة في خطة المعاينة في المتعددة أقل من المزدوجة التي بدورها أقل من المفردة مع أن المزدوجة تعطينا فرص أخرى لاتخاذ القرار بسحب عينات جديدة، لذلك جاءت خطة المعاينة التتابعية بأن يكون حجم العينة متغير مرحلة بعد أخرى وغير محدد (عشوائياً) بالاعتماد على نتائج الفحص التي تتميز بأن القرار يؤخذ بعد فحص كل مفردة من العينة بالاعتماد على نسبة الاحتمال التتابعي (Sequential Prob-Ratio SPR) لذلك تسمى هذه الخطة item – by – item sequential sampling (طورها العالم Wald 1947)

حيث أن:

$$SPR = \frac{P_2\, n}{P_1\, n}$$

148

وتمثل: P_1 ، P_2 مستويات النوعية باحتمال قبول$(\beta, 1-\alpha)$وتتبع وحدات العينة $(x_1, \dots, x_n)$ توزيع ذي الحدين.

ويتم اتخاذ القرار وفق الحالات التالية:

أولاً: يتم رفض الدفعة عندما: $\frac{P_2\, n}{P_1\, n} \geq A$ حيث أن: $A > 1 \approx \frac{1-\beta}{\alpha}$

ثانياً: يتم قبول الدفعة عندما: $\frac{P_2\, n}{P_1\, n} \leq B$ حيث أن: $B < 1 \approx \frac{\beta}{1-\alpha}$

ثالثاً: الاستمرار وأخذ مفردة أخرى عندما: $B < \frac{P_2\, n}{P_1\, n} < A$

كما ويمكن ان نحدد حالات الرفض والقبول في خطة المعاينة التتابعية من خلال رسم خط القبول (Acceptance line) وخط الرفض (Rejection line) بموجب المعادلتين التالتين:

$\mathrm{X_a = -h_1 + Sn}$ .... معادلة خط القبول

$\mathrm{X_r = -h_2 + Sn}$ .... معادلة خط الرفض

حيث ان

$$\mathrm{h_1 = (\log \frac{1-\alpha}{\beta})/K}$$

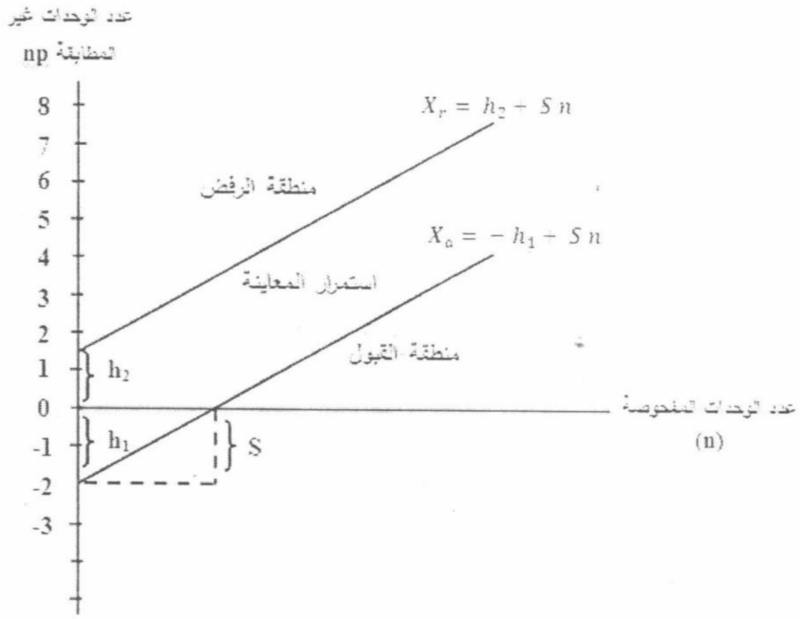
$$\mathrm{h_2 = (\log \frac{1-\beta}{\alpha})/K}$$

$$\mathrm{K = \log \frac{P_2(1-P_1)}{P_1(1-P_2)}}$$

$$\mathrm{S = \log\,[(1-P_1)/(1-P_2)]/K}$$

$n =$ عدد الوحدات المفحوصة

ونلاحظ ان قيم $(\alpha, \beta, P_1, P_2)$ يجب ان تحدد لاستخراج معالم المعادلتين (S, h_1, h_2) والشكل التالي يبين رسم خطي القبول والرفض ومناطقهما اضافة الى منطقة استمرار المعاينة.



شكل (5.7) التمثيل البياني لخطة المعاينة التتابعية

ويتم اتخاذ القرار بعد رسم النقطة (n,np) فاذا كانت واقعة على الخط X_a (خط القبول) او اسفل منه نقبل الدفعة ، وترفض الدفعة اذا كانت على الخط X_r (خط الرفض) او اعلا منه ، ونستمر بالمعاينة اذا كانت بين الخطين مع ملاحظة ان اعداد الرفض والقبول تكون صحيحة(بدون كسور).

تمارين الفصل الخامس

ت1 عرف كل من : الفحص ،الفحص بالمعاينة ، الفحص الشامل ، خطة الفحص بالمعاينة ؟

ت2 متى يتم اللجوء الى كل من الفحص الشامل والفحص بالمعاينة ؟

ت3 ما هي أنواع المخالفات (العيوب) في العملية الانتاجية ؟

ت4 أذكرأهم مزايا خطة المعاينة المفردة ؟

ت5 عرف كل من : منحنى خاصية التشغيل ، العدد المتوسط للعينة ، معدل الكمية المفحوصة ،معدل النوعية المصدرة ؟

ت6 بين خطوات خطة المعاينة المفردة مع الشكل التوضيحي ؟

ت7 بين خطوات = = المزدوجة = = = ؟

ت8 ماذا يقصد ب = = المتعددة المراحل مع مثال توضيحي ؟

ت9 = = = = التتابعية مع الشكل التوضيحي ؟

المحاضرة (6) : خطط المعاينة باستخدام التوزيعات الاحتمالية

(Sampling inspection plans Using Probabilities Distribution)

المقدمة (Introduction)

استخدام توزيع ثنائي الحدين (Binomial Distribution)

استخدام التوزيع الهندسي الفوقي (Hyper geometric Distribution)

استخدام توزيع بواسون (Poisson Distribution)

استخدام التوزيع الطبيعي (Normal Distribution)

المقدمة: (Introduction)

ان تحديد حجم العينة (n) ، لغرض الفحص من المسائل المهمة التي اخذت الكثير من اهتمام علماء الإحصاء ، وتوصلوا الى العديد من الأساليب من أهمها استخدام التوزيعات الاحتمالية سواء للمتغيرات او للخواص.

وفي مجال السيطرة على النوعية وبالذات في موضوع (الفحص بالمعاينة) ، استند استخدام التوزيعات الاحتمالية الى استخدام منحنى خاصية التشغيل (OC Curve) والمكمل لهُ (Power curve) ، ويعتمد بناء المنحنى على اربع ثوابت مهمة هي $(\theta_0, \theta_1, \alpha, \beta)$ ، وهذه الثوابت تستند الى ما يسمى بمخاطر السيطرةِ النوعية ، وهما خطورة المستهلك و خطورة المنتج.

وهنا نعرف بالرموز (θ_0, θ_1) ويمثلان نسبتين من نسب عدم المطابقة:

θ_0 : تمثل النسبة الأقل من عدم المطابقة وعندها يعتبر الإنتاج جيد لذلك تقابل احتمال رفضها بمقدار (α) ، واحتمال قبولها بمقدار $(1-\alpha)$ ، وعندها تتمثل خطورة المنتج (باحتمال ان يرفض انتاج جيد بسبب خطأ من النوع الثاني) ، ومنهُ يمكن تعريف:

خطورة المنتج (**Producers Risk**): احتمال اتخاذ قرار برفض انتاج جيد وقيمتهُ الاحتمالية (α). أي ان المنتج يخشى ان يحدث خطأ والذي يعرف في التطبيقات الإحصائية على انهُ خطأ من النوع الثاني ، ويرفض انتاجهُ الجيد مما يسبب لهُ الخسارة المالية والسوقية.

θ_1 : تمثل النسبة الاكبر من عدم المطابقة وعندها يعتبر الإنتاج رديء لذلك تقابل احتمال قبولها بمقدار (β) ، واحتمال رفضها بمقدار $(1-\beta)$ ، وعندها تتمثل خطورة المستهلك (باحتمال ان يقبل انتاج رديء بسبب خطأ من النوع الاول) ، ومنهُ يمكن تعريف:

خطورة المستهلك (**Consumers Risk**): احتمال اتخاذ قرار بقبول انتاج رديء وقيمتهُ الاحتمالية (β). أي ان المستهلك يخشى ان يحدث خطأ والذي يعرف في التطبيقات الإحصائية على انهُ خطأ من النوع الأول ، ويقبل انتاج رديء غير صالح للاستهلاك مما يسبب لهُ الخسارة المالية والمادية فضلاً عن ذلك يفقد ثقتهِ في السوق وما يعرض من منتوجات.

ان تحديد الثوابت الأربعة $(\theta_0, \theta_1, \alpha, \beta)$ ليس بالامر السهل ويحتاج الى عمليات رياضية صعبة لذلك سيترك هذا الامر لذوي الاختصاص من الاحصائيين المتخصصين في احتساب قيم الثوابت الأربعة ، ونحن بدورنا نستخدم ذلك لنصل الى تحديد حجم العينة الأمثل (n) وعدد القبول (c) عند الفحص ، ونبدأ بوضع الفرضيتين:

$\mathbf{H_0: \theta = \theta_0}$ **or** $\mathbf{H_0: \theta - \theta_0 = 0}$
Versus **or** **V.S**
$\mathbf{H_1: \theta = \theta_1}$ **or** $\mathbf{H_1: \theta_0 < \theta_1}$ **or** $\mathbf{H_1: \theta_1 > \theta_0}$

وسنعتمد في كتابة الفرضيتين على الشكل :

$\mathbf{H_0: \theta = \theta_0}$
V.S
$\mathbf{H_1: \theta = \theta_1}$

ويتم وضع صيغتين على أساس مخاطرتي المستهلك والمنتج احدهما توصلنا الى اكبر قيمة لحجم العينة (Large Sample) ، وتكتب اختصاراً (Ln) ، وأخرى توصلنا الى اصغر قيمة لحجم العينة (Small Sample) ، وتكتب اختصاراً (Sn) ، وبعد ان يتم فرض قيم للمؤشرات الأربعة نحصل على قيم حجم العينة الأمثل (n) وعدد القبول (c) باستخدام التوزيعات الاحتمالية المختلفة للخواص ولخطة المعاينة المفردة.

اولاً: خطة المعاينة المفردة على أساس توزيع ثنائي الحدين:

(Single Sampling Plan based on the Binomial Distribution)

يستخدم توزيع ثنائي الحدين في معاينة الخواص وفق الشروط التالية:

1) كل وحدة انتاجية مفحوصة يمكن ان تصنف بانها مطابقة او غير مطابقة.
2) احتمال الحصول على وحدة غير مطابقة هو نفس الاحتمال لجميع الوحدات المسحوبة.
3) سحب أي وحدة يكون مستقل عن سحب غيرها.
4) يكون لدينا عدد ثابت من الوحدات المسحوبة.

الان ، لنفترض ان (X) يمثل عدد الوحدات غير المطابقة في العينة (n) فان احتمال الحصول عليها وفق التوزيع يكون باستخدام الصيغة:

$$\mathbf{f(X;n,p)} = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & , x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E(x) = np \qquad , var(x) = np(1-p)$$

ونبدأ بوضع الفرضية

$$H_0: \theta = \theta_0$$
v.s
$$H_1: \theta = \theta_1 \qquad \text{or} \qquad H_1: \theta_1 > \theta_0$$

وعندما نعبر عن الوحدات غير المطابقة المشاهدة بـ (x) وتكون كبيرة بحيث انها اكبر من عدد القبول (c) وتصل الى ان تمثل عدد الرفض (r) أي ان:

$$x \geq c + 1 = r$$

وبالصيغ الاحتمالية على منحنى القوة (Power curve)

$$Pr(x \geq r) \leq \alpha$$
$$Pr(x \geq r) \geq 1 - \beta$$

وبصيغ الجمع لتوزيع ثنائي الحدين (Binomial Sums)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r};\mathbf{n},\boldsymbol{\theta}_0) \leq \alpha$$
$$\mathbf{E}(\mathbf{r};\mathbf{n},\boldsymbol{\theta}_1) \geq 1-\beta$$

وللحصول على حجم العينة المثالي وعدد القبول (c) عند السحب لغرض الفحص نستخدم الصيغة الاتية:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r};\mathbf{n},\boldsymbol{\theta}_0) \leq \alpha$$

لتحديد (Max n) ، اما الصيغة $\mathbf{E}(\mathbf{r};\mathbf{n},\boldsymbol{\theta}_1) \geq 1-\beta$ ، تستخدم لتحديد (Min n) ، ولأجل ذلك يجب ان نحدد اولاً القيم الأربعة $(\theta_0, \theta_1, \alpha, \beta)$ ، ونفترض ان قيم (r) من خلال البدء بعدد القبول (c=0) وبالتالي نبدأ (r=1) ويبقى المجهول هو (n) نستخرجها من خلال جداول توزيع ثنائي الحدين.

وعندما نستخرج (Max n) وفق الصيغة $\mathbf{E}(\mathbf{r};\mathbf{n},\boldsymbol{\theta}_0) \leq \boldsymbol{\alpha}$ ، و (Min n) وفق الصيغة $\mathbf{E}(\mathbf{r};\mathbf{n},\boldsymbol{\theta}_1) \geq \mathbf{1}-\boldsymbol{\beta}$

ومن المنطقي ان $(\text{Max n}) > (\text{Min n})$ أي ان$(\mathbf{Min\ n}) < \mathbf{n} < (\mathbf{Max\ n})$ ، لكن عندما تكون القيم المستخرجة تؤشر العكس أي ان $(\text{Max n}) < (\text{Min n})$ فان ذلك يمثل حالة مستحيلة غير منطقية (impossible) ، عندما نلجأ الى زيادة عدد القبول درجة فعندما نبدأ بـ

بعدد القبول (c=0) وبالتالي نبدأ بعدد الرفض (r=1) وتكون النتيجة غير منطقية نأخذ عدد القبول (c=1) أي ان عدد الرفض (r=2) فاذا كانت النتيجة منطقية نتوقف ونأخذ ادنى قيمة لـ (n) لتمثل حجم العينة الأمثل مقابل عدد القبول (c) المستخدم.

اما اذا كانت النتيجة غير منطقية ايضاً نستمر بزيادة عدد القبول وهكذا نستمر في المحاولات حتى نصل الى الحالة المنطقية ، وكما سنرى في المثال.

ومن خلال ذلك وبعد الحصول على حجم العينة (n) وقيمة عدد الرفض (r) نستطيع تحديد قوة الاحتمال لأي قيمة لـ ($\boldsymbol{\theta}$) حيث ان:

$$\text{Power} = \mathbf{E}(\mathbf{r}; \mathbf{n}, \boldsymbol{\theta})$$

ملاحظة: مما تقدم يمثل اسلوباً مناسباً لحجم العينة لايتجاوز 150 ، لانهُ عندما $\mathbf{n} \geq \mathbf{150}$ يصبح استخدام الجداول صعب والعمليات الرياضية اكثر تعقيداً لذلك نتجه الى البدائل للحل فكان انسبها تقريب $\left(\mathcal{X}^2\right)$ بحيث عندما تكون لدينا $\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}$ فان

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}; \mathbf{n}, \boldsymbol{\theta}) = P$$

يمكن الحصول على (n) من خلال

$$n \simeq \frac{1}{2}\left[\mathcal{X}^2{}_{2r,P}\left(\frac{1}{\theta} - 0.5\right) + (r-1)\right]$$

حيث ان

$\mathcal{X}^2{}_{2r,P}$: قيمة جدولية (توجد جداول خاصة بتوزيع $\mathcal{X}^2$) والتي تعتمد على درجة الحرية (2r).

وبالتعويض عن P بـ $1-\beta$ وعن $\boldsymbol{\theta}$ بـ $\boldsymbol{\theta_1}$ في الصيغة:

$$n \simeq \frac{1}{2}\left[\mathcal{X}^2{}_{2r,P}\left(\frac{1}{\theta} - 0.5\right) + (r-1)\right]$$

للحصول على (Min n)

وبالتعويض عن P بـ α وعن $\boldsymbol{\theta}$ بـ $\boldsymbol{\theta_0}$ في الصيغة:

$$n \simeq \frac{1}{2}\left[\mathcal{X}^2{}_{2r,P}\left(\frac{1}{\theta} - 0.5\right) + (r-1)\right]$$

للحصول على (Max n) ليكون لدينا:

$$\frac{1}{2}\left[\mathcal{X}^2{}_{2r,1-\beta}\left(\frac{1}{\theta_1} - 0.5\right) + (r-1)\right] \leq n \leq \frac{1}{2}\left[\mathcal{X}^2{}_{2r,\alpha}\left(\frac{1}{\theta_0} - 0.5\right) + (r-1)\right]$$

وبنفس أسلوب الطريقة السابقة نبدأ بعدد القبول (c=0) وبالتالي نبدأ (r=1) ، ونزيد قيمتها كلما كانت النتيجة غير منطقية الى ان نصل الى الحل المنطقي.

مثال(1): إذا علمت ان

$\boxed{\theta_0 = 0.06}$, $\boxed{\theta_1 = 0.35}$, $\boxed{\alpha = 0.05}$, $\boxed{\beta = 0.10}$

اوجد حجم العينة (n) مع عدد القبول (c) لخطة المعاينة المفردة باستخدام توزيع ثنائي الحدين ، مفترضاً ان

$(c = 1) \rightarrow (r = 2)$ ، ثم بين هل ان الحل منطقي ام غير منطقي؟

الحل : نكتب الفرضية

$$\mathbf{H_0: \theta = \theta_0 = 0.06}$$
v.s
$$\mathbf{H_1: \theta = \theta_1 = 0.35}$$

اولاً : للحصول على (Max n)، نطبق الصيغة التالية بالاعتماد على القيم الجدولية لتوزيع ثنائي الحدين

$$\mathbf{E(r; n, \theta_0) \leq \alpha}$$

$$\mathbf{E(2; n, 0.06) \leq 0.05}$$

بما ان $\theta_0 = 0.06$ وان r=2 ، يجب ان نصل الى قيمة $\alpha = 0.05$ ، من الجداول

	p=	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
n=2	r=0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	.0199	.0396	.0591	.0784	.0975	.1164	.1351	.1536	.1719
	2	.0001	.0004	.0009	.0016	.0025	.0036	.0049	.0064	.0081
n=5	r=0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	.0490	.0961	.1413	.1846	.2262	.2661	.3043	.3409	.3760
	2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.0319	.0425	.0544	.0674
	3		.0001	.0003	.0006	.0012	.0020	.0031	.0045	.0063
	4						.0001	.0001	.0002	.0003
n=10	r=0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	.0956	.1829	.2626	.3352	.4013	.4614	.5160	.5656	.6106
	2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.1176	.1517	.1879	.2254
	3	.0001	.0009	.0028	.0062	.0115	.0188	.0283	.0401	.0540
	4			.0001	.0004	.0010	.0020	.0036	.0058	.0088
	5					.0001	.0002	.0003	.0006	.0010
	6									.0001

عندما

$$\mathbf{n = 5 \rightarrow 0.0319}$$
$$\mathbf{n = 10 \rightarrow 0.1176}$$

نلاحظ ان القيمة $\alpha = 0.05$ تقع بين القيمتين الجدولية $0.0319 < \alpha = 0.05 < 0.1176$ ، ولكي نصل الى القيمة $\alpha = 0.05$ بشكل اكثر تقريبي

نتبع الخطوات الآتية:

اولاً : نطرح القيمة الجدولية عندما $n = 10$ والتي تساوي (0.1176) من قيمة $\alpha = 0.05$ لنحصل على :

$$0.1176 - 0.05 = \boxed{0.0676}$$

ثانياً: نحصل على القيمة الجدولية عندما $n = 1$ ، باتباع الخطوات الاتية:

1) نطرح القيمة الجدولية عندما $n = 10$ والتي تساوي (0.1176) من القيمة الجدولية عندما $n = 5$ والتي تساوي (0.0319) لنحصل على :

$$0.1176 - 0.0319 = \boxed{0.0857}$$

2) نقسم ناتج الطرح 0.0857 على اصغر (n) وفي هذه الحالة تساوي (5) (لماذا) لنحصل على :

$$n = 1 \Rightarrow 0.0857 \div 5 = \boxed{0.01714}$$

ثالثاً: نحصل على (Max n)، باتباع الخطوات الاتية:

1) نقسم ناتج (اولاً) ، والذي يساوي (0.0676) على ناتج (ثانياً) ، والذي يساوي (0.01714) لنحصل على :

$$\frac{0.0676}{0.01714} = 3.94399 \cong 4$$

2) نطبق الصيغة التالية:

$$(\text{Max n}) = \frac{(n = 10)}{0.1176} - (4) * \frac{(n = 1)}{0.01714} = 0.1176 - 4 * 0.01714$$

$$(\text{Max n}) = 0.1176 - 0.06856 = \boxed{0.04904} \cong 0.05$$

نستنتج ان ، (Max n = 6) والسبب في ذلك ان القيمة الجدولية المستخرجة عندما $n = 6$ ، تساوي (0.04904) وهي اصغر من قيمة $\alpha = 0.05$ وقريبة منها.

ثانياً : للحصول على (Min n)

$$E(r; n, \theta_1) \geq 1 - \beta$$

$$E(2; n, 0.35) \geq 0.9$$

بما ان $\theta_1 = 0.35$ وان r=2 ، يجب ان نصل الى قيمة $1 - \beta = 0.9$ من الجداول

	21									[illegible]
	22									.0001
	p=	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
n=2	r=0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	.1900	.2775	.3600	.4375	.5100	.5775	.6400	.6975	.7500
	2	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1225	.1600	.2025	.2500
n=5	r=0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	.4095	.5563	.6723	.7627	.8319	.8840	.9222	.9497	.9688
	2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.5716	.6630	.7438	.8125
	3	.0086	.0266	.0579	.1035	.1631	.2352	.3174	.4069	.5000
	4	.0005	.0022	.0067	.0156	.0308	.0540	.0870	.1312	.1875
	5		.0001	.0003	.0010	.0024	.0053	.0102	.0185	.0313
n=10	r=0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	.6513	.8031	.8926	.9437	.9718	.9865	.9940	.9975	.9990
	2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.9140	.9536	.9767	.9893
	3	.0702	.1798	.3222	.4744	.6172	.7384	.8327	.9004	.9453
	4	.0128	.0500	.1209	.2241	.3504	.4862	.6177	.7430	.8281
	5	.0016	.0099	.0328	.0781	.1503	.2485	.3669	.4956	.6230
	6	.0001	.0014	.0064	.0197	.0473	.0949	.1662	.2616	.3770
	7		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

عندما

$$n = 5 \rightarrow 0.5716$$
$$n = 10 \rightarrow 0.9140$$

نلاحظ ان القيمة $1 - \beta = 0.9$ تقع بين القيمتين الجدولية $0.5716 < 1 - \beta = 0.9 < 0.9140$ ، ولكي نصل الى القيمة $1 - \beta = 0.9$ بشكل اكثر تقريبي

نتبع الخطوات الآتية:

اولاً : نطرح القيمة الجدولية عندما $n = 10$ والتي تساوي (0.9140) من قيمة $1 - \beta = 0.9$ لنحصل على :

$$0.9140 - 0.9 = \boxed{0.014}$$

ثانياً: نحصل على القيمة الجدولية عندما $n = 1$ ، باتباع الخطوات الاتية:

3) نطرح القيمة الجدولية عندما $n = 10$ والتي تساوي (0.9140) من القيمة الجدولية عندما $n = 5$ والتي تساوي (0.5716) لنحصل على :

$$0.9140 - 0.5716 = \boxed{0.3424}$$

4) نقسم ناتج الطرح 0.3424 على اصغر (n) وفي هذه الحالة تساوي (5) (لماذا) لنحصل على :

$$n = 1 \Rightarrow 0.3424 \div 5 = \boxed{0.06848}$$

ثالثاً: نحصل على $(\mathrm{Min\ n})$، باتباع الخطوات الاتية:

1) نقسم ناتج (اولاً) ، والذي يساوي (0.014) على ناتج (ثانياً) ، والذي يساوي (0.06848) لنحصل على :

$$\frac{0.014}{0.06848} = 0.20444 \cong 0$$

2) نطبق الصيغة التالية:

$$(\mathrm{M}in\ \mathrm{n}) = \frac{(\mathrm{n} = 10)}{0.9140} - (0) * \frac{(\mathrm{n} = 1)}{0.06848} = 0.9140 \cong 0.9$$

نستنتج ان ، $(\mathrm{Min\ n} = 10)$ والسبب في ذلك ان القيمة الجدولية المستخرجة عندما $\mathrm{n} = 10$ ، تساوي (0.9140) وهي اكبر من قيمة $1 - \beta = 0.9$ وقريبة منها.

وطالما ان :

$$(\mathrm{Min\ n}) \leq \mathrm{n} \leq (\mathrm{Max\ n})$$

$$10 \leq \mathrm{n} \leq 6$$

وهذه النتيجة غير منطقية عندما c=1

ملاحظة: في حالة نريد الحصول على نتيجة منطقية نزيد عدد القبول وعدد الرفض وكما يلي:

نفترض ان: $(\mathrm{c} = 2) \rightarrow (\mathrm{r} = \mathrm{c} + 1 = 3)$

اولاً : للحصول على $(\mathbf{Max\ n})$

$$E(r; n, \theta_0) \leq \alpha$$

$$E(3; n, 0.06) \leq 0.05$$

بما ان $\theta_0 = 0.06$ وان r=3 ، يجب ان نصل الى قيمة $\alpha = 0.05$ من الجداول

	p=	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
n=2	r=0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	.0199	.0396	.0591	.0784	.0975	.1164	.1351	.1536	.1719
	2	.0001	.0004	.0009	.0016	.0025	.0036	.0049	.0064	.0081
n=5	r=0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	.0490	.0961	.1413	.1846	.2262	.2661	.3043	.3409	.3760
	2	.0010	.0038	.0085	.0148	.0226	.0319	.0425	.0544	.0674
	3		.0001	.0003	.0006	.0012	.0020	.0031	.0045	.0063
	4						.0001	.0001	.0002	.0003
n=10	r=0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	.0956	.1829	.2626	.3352	.4013	.4614	.5160	.5656	.6106
	2	.0043	.0162	.0345	.0582	[illegible]	.1176	.1517	.1879	.2254
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.0188	.0283	.0401	.0540
	4			.0001	.0004	[illegible]	.0020	.0036	.0058	.0088
	5					.0001	.0002	.0003	.0006	.0010
	6									.0001
n=20	r=0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	.1821	.3324	.4562	.5580	.6415	.7099	.7658	.8113	.8484
	2	.0169	.0599	.1198	.1897	.2642	.3395	.4131	.4831	.5484
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.1150	.1610	.2121	.2666
	4		.0006	.0027	.0074	[illegible]	.0290	.0471	.0706	.0993
	5			.0003	.0010	.0026	.0056	.0107	.0183	.0290
	6				.0001	.0003	.0009	.0019	.0038	.0068
	7						.0001	.0003	.0006	.0013
	8								.0001	.0002

عندما

$$n = 10 \rightarrow 0.0188$$

$$n = 20 \rightarrow 0.1150$$

$$0.1150 - 0.05 = \boxed{0.065}$$

$$0.1150 - 0.0188 = 0.0962 \div 10 = \boxed{0.00962}$$

$$\boxed{(n = 1) \rightarrow 0.00962}$$

$$\frac{0.065}{0.00962} = 6.8 \cong 7$$

نجد قيمة $(\mathbf{Max\ n})$ وكما يلي:

$$(n = 13) = (n = 20) - 7 * (n = 1)$$

$$(n = 13) = 0.115 - 7 * (0.00962) = 0.115 - 0.06734 = \boxed{0.04766}$$

$$\mathbf{Max\ n} = 13$$

ثانياً : للحصول على $(\mathbf{Min\ n})$

$\mathbf{E(r; n, \theta_1) \geq 1 - \beta}$

$\mathbf{E(3; n, 0.35) \geq 0.9}$

$\mathbf{n = 10 \rightarrow 0.7384}$

$\mathbf{n = 20 \rightarrow 0.9879}$

$(0.9879 - 0.9) = \boxed{0.0879}$

$\mathbf{0.9879 - 0.7384 = 0.2495 \div 10 = 0.02495 \rightarrow (n = 1) \rightarrow \boxed{0.02495}}$

$\frac{0.0879}{0.02495} = 3.5231 \cong 4$

$\mathbf{(n = 16) = (n = 20) - (4)(n = 1)}$

$\mathbf{(n = 16) = 0.9879 - (4)0.02495 = 0.8881}$

$\mathbf{(Min\ n) = 16}$

$\mathbf{16 \leq n \leq 13}$

وهذه النتيجة غير منطقية عندما c=2

نفترض ان: $(c = 3) \rightarrow (r = c + 1 = 4)$

اولاً : للحصول على $(\mathbf{Max\ n})$

$\mathbf{E(r; n, \theta_0) \leq \alpha}$

$\mathbf{E(4; n, 0.06) \leq 0.05}$

$\mathbf{n = 20 \rightarrow 0.029}$

$\mathbf{n = 50 \rightarrow 0.3527}$

$\mathbf{0.3527 - 0.05 = \boxed{0.3027}}$

$\mathbf{0.3527 - 0.029 = \frac{0.3237}{20} = \boxed{0.016185}}$

$\frac{\mathbf{0.3027}}{\mathbf{0.016185}} = 18.7025 \cong 19$

$\mathbf{(n = 31) = (n = 50) - 19 * (n = 1)}$

$\mathbf{(n = 31) = 0.3527 - 19 * 0.016185 = 0.3527 - 0.307515 = 0.045185}$

$\mathbf{Max\ n = 31}$

اولاً : للحصول على $(\mathbf{Max\ n})$

$\mathbf{E(r; n, \theta_1) \geq 1 - \beta}$

$\mathbf{E(4; n, 0.35) \geq 0.9}$

$\mathbf{n = 10 \rightarrow 0.4862}$

$\mathbf{n = 20 \rightarrow 0.9556}$

$(\mathbf{0.9556} - 0.9) = \boxed{0.0556}$

$\mathbf{0.9556 - 0.4862 = 0.4694 \div 10 = 0.04694 \rightarrow (n = 1) \rightarrow \boxed{0.04694}}$

$\frac{0.0556}{0.04694} = 1.18449 \cong 1$

$\mathbf{(n = 19) = (n = 20) - (1)(n = 1)}$

$\mathbf{(n = 19) = 0.9556 - 0.04694 = 0.90866}$

$\mathbf{(Min\ n) = 19}$

$\mathbf{19 \leq n \leq 31}$

وهذه النتيجة منطقية عندما c=3 ، وان n=19

طريقة ثانية للحل:

$\boxed{\theta_0 = 0.06}$, $\boxed{\theta_1 = 0.35}$, $\boxed{\alpha = 0.05}$, $\boxed{\beta = 0.10}$

الحالة (1): نفرض ان $(c = 1) \rightarrow (r = 2)$

$\mathbf{H_0 : \theta = \theta_0}$
v.s
$\mathbf{H_1 : \theta = \theta_1}$

ثانياً : نستخرج (Max n) ، (Min n) وفق الصيغ الاتية:

$$\frac{1}{2}\left[\mathcal{X}^2{}_{2r,1-\beta}\left(\frac{1}{\theta_1} - 0.5\right) + (r-1)\right] \le n \le \frac{1}{2}\left[\mathcal{X}^2{}_{2r,\alpha}\left(\frac{1}{\theta_0} - 0.5\right) + (r-1)\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\mathcal{X}^2{}_{4,0.9}\left(\frac{1}{0.35} - 0.5\right) + (2-1)\right] \le n \le \frac{1}{2}\left[\mathcal{X}^2{}_{4,0.05}\left(\frac{1}{0.06} - 0.5\right) + (2-1)\right]$$

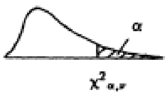
$$\frac{1}{2}\left[\mathcal{X}^2{}_{4,0.9}\left(\frac{1}{0.35} - 0.5\right) + (2-1)\right] \le n \le \frac{1}{2}\left[\mathcal{X}^2{}_{4,0.05}\left(\frac{1}{0.06} - 0.5\right) + (2-1)\right]$$

حيث ان: $\mathcal{X}^2{}_{4,0.05} = 0.711$, $\mathcal{X}^2{}_{4,0.9} = 7.779$

Table 8

PERCENTAGE POINTS OF THE χ^2 DISTRIBUTION

Table of $\chi^2_{\alpha;\nu}$ — the 100 α percentage point of the χ^2 distribution for ν degrees of freedom



α =	.995	.99	.98	.975	.95	.90	.80	.75	.70	.50	.30	.25	.20	.10	.05	.025
ν = 1	$.0^4393$	$.0^3157$	$.0^3628$	$.0^3982$	.00393	.0158	.0642	.102	.148	.455	1.074	1.323	1.642	2.706	3.841	5.024
2	.0100	.0201	.0404	.0506	.103	.211	.446	.575	.713	1.386	2.408	2.773	3.219	4.605	5.991	7.378
3	.0717	.115	.185	.216	.352	.584	1.005	1.213	1.424	2.366	3.665	4.108	[illegible]	6.251	7.815	9.348
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.711	1.064	1.649	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	7.779	9.488	11.143
5	.412	.554	.752	.831	1.145	1.610	2.343	2.675	3.000	4.351	6.064	6.626	[illegible]	9.236	11.070	12.832
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1.635	2.204	3.070	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	10.645	12.592	14.449
7	.989	1.239	1.564	1.690	2.167	2.833	3.822	4.255	4.671	6.346	8.383	9.037	[illegible]	12.017	14.067	16.013
8	1.344	1.646	2.032	2.180	2.733	3.490	4.594	5.071	5.527	7.344	9.524	10.219	11.030	13.362	15.507	17.535
9	1.735	2.088	2.532	2.700	3.325	4.168	5.380	5.899	6.393	8.343	10.656	11.389	12.242	14.684	16.919	19.023
10	2.156	2.558	3.059	3.247	3.940	4.865	6.179	6.737	7.267	9.342	11.781	12.549	13.442	15.987	18.307	20.483
11	2.603	3.053	3.609	3.816	4.575	5.578	6.989	7.584	8.148	10.341	12.899	13.701	14.631	17.275	19.675	21.920
12	3.074	3.571	4.178	4.404	5.226	6.304	7.807	8.438	9.034	11.340	14.011	14.845	15.812	18.549	21.026	23.337
13	3.565	4.107	4.765	5.009	5.892	7.042	8.634	9.299	9.926	12.340	15.119	15.984	16.985	19.812	22.362	24.736
14	4.075	4.660	5.368	5.629	6.571	7.790	9.467	10.165	10.821	13.339	16.222	17.117	18.151	21.064	23.685	26.119
15	4.601	5.229	5.985	6.262	7.261	8.547	10.307	11.036	11.721	14.339	17.322	18.245	19.311	22.307	24.996	27.488

$$\frac{1}{2}[7.779(2.357) + (1)] \le n \le \frac{1}{2}[0.711(16.167) + (1)]$$

$$9.668 \le n \le 6.247$$

والنتيجة غير منطقية لذلك ، نفرض ان $(c = 2) \rightarrow (r = 3)$ وبالتعويض نحصل على

$$\frac{1}{2}\left[\mathcal{X}^2{}_{6,0.9}\left(\frac{1}{0.35}-0.5\right)+(3-1)\right]\leq n\leq\frac{1}{2}\left[\mathcal{X}^2{}_{6,0.05}\left(\frac{1}{0.06}-0.5\right)+(3-1)\right]$$

حيث ان: $\mathcal{X}^2{}_{6,0.9}=10.645 \quad ,\mathcal{X}^2{}_{6,0.05}=1.635$

$$\frac{1}{2}[10.645(2.357)+(2)]\leq n\leq\frac{1}{2}[1.635(16.167)+(2)]$$

$$13.545\leq n\leq 14.217$$

النتيجة منطقية وتمثل الحل وحجم العينة يكون:

$$\boldsymbol{n=14 \;\; with\; c=2}$$

مثال(2)/تمرين: إذا علمت ان:

$\boxed{\theta_0=0.02}$, $\boxed{\theta_1=0.08}$, $\boxed{\alpha=0.10}$, $\boxed{\beta=0.10}$

اوجد الحجم الأمثل للعينة مع عدد القبول لخطة المعاينة المفردة باستخدام توزيع ثنائي الحدين ، مفترضاً ان c=2 ثم اكمل الحل اذا كانت النتيجة غير منطقية.

Table 1

CUMULATIVE BINOMIAL PROBABILITIES

p = probability of success in a single trial; n = number of trials. The table gives the probability of obtaining r or more successes in n independent trials. i.e.

$$\sum_{x=r}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

When there is no entry for a particular pair of values of r and p, this indicates that the appropriate probability is less than 0.000 05. Similarly, except for the case r = 0, when the entry is exact, a tabulated value of 1.0000 represents a probability greater than 0.999 95.

	p=	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
n=2	r=0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	.0199	.0396	.0591	.0784	.0975	.1164	.1351	.1536	.1719
	2	.0001	.0004	.0009	.0016	.0025	.0036	.0049	.0064	.0081
n=5	r=0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	.0490	.0961	.1413	.1846	.2262	.2661	.3043	.3409	.3760
	2	.0010	.0038	.0085	.0148	.0226	.0319	.0425	.0544	.0674
	3		.0001	.0003	.0006	.0012	.0020	.0031	.0045	.0063
	4						.0001	.0001	.0002	.0003
n=10	r=0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	.0956	.1829	.2626	.3352	.4013	.4614	.5160	.5656	.6106
	2	.0043	.0162	.0345	.0582	.0861	.1176	.1517	.1879	.2254
	3	.0001	.0009	.0028	.0062	.0115	.0188	.0283	.0401	.0540
	4			.0001	.0004	.0010	.0020	.0036	.0058	.0088
	5					.0001	.0002	.0003	.0006	.0010
	6									.0001
n=20	r=0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	.1821	.3324	.4562	.5580	.6415	.7099	.7658	.8113	.8484
	2	.0169	.0599	.1198	.1897	.2642	.3395	.4131	.4831	.5484
	3	.0010	.0071	.0210	.0439	.0755	.1150	.1610	.2121	.2666
	4		.0006	.0027	.0074	.0159	.0290	.0471	.0706	.0993
	5			.0003	.0010	.0026	.0056	.0107	.0183	.0290
	6				.0001	.0003	.0009	.0019	.0038	.0068
	7						.0001	.0003	.0006	.0013
	8								.0001	.0002
n=50	r=0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	.3950	.6358	.7819	.8701	.9231	.9547	.9734	.9845	.9910
	2	.0894	.2642	.4447	.5995	.7206	.8100	.8735	.9173	.9468
	3	.0138	.0784	.1892	.3233	.4595	.5838	.6892	.7740	.8395
	4	.0016	.0178	.0628	.1391	.2396	.3527	.4673	.5747	.6697
	5	.0001	.0032	.0168	.0490	.1036	.1794	.2710	.3710	.4723
	6		.0005	.0037	.0144	.0378	.0776	.1350	.2081	.2928
	7		.0001	.0007	.0036	.0118	.0289	.0583	.1019	.1596
	8			.0001	.0008	.0032	.0094	.0220	.0438	.0768
	9				.0001	.0008	.0027	.0073	.0167	.0328
	10					.0002	.0007	.0022	.0056	.0125
	11						.0002	.0006	.0017	.0043
	12							.0001	.0005	.0013
	13								.0001	.0004
	14									.0001

	p=	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
n=100	r=0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	.6340	.8674	.9524	.9831	.9941	.9979	.9993	.9998	.9999
	2	.2642	.5967	.8054	.9128	.9629	.9848	.9940	.9977	.9991
	3	.0794	.3233	.5802	.7679	.8817	.9434	.9742	.9887	.9952
	4	.0184	.1410	.3528	.5705	.7422	.8570	.9256	.9633	.9827
	5	.0034	.0508	.1821	.3711	.5640	.7232	.8368	.9097	.9526
	6	.0005	.0155	.0808	.2116	.3840	.5593	.7086	.8201	.8955
	7	.0001	.0041	.0312	.1064	.2340	.3936	.5557	.6968	.8060
	8		.0009	.0106	.0475	.1280	.2517	.4012	.5529	.6872
	9		.0002	.0032	.0190	.0631	.1463	.2660	.4074	.5506
	10			.0009	.0068	.0282	.0775	.1620	.2780	.4125
	11			.0002	.0022	.0115	.0376	.0908	.1757	.2882
	12				.0007	.0043	.0168	.0469	.1028	.1876
	13				.0002	.0015	.0069	.0224	.0559	.1138
	14					.0005	.0026	.0099	.0282	.0645
	15					.0001	.0009	.0041	.0133	.0341
	16						.0003	.0016	.0058	.0169
	17						.0001	.0006	.0024	.0078
	18							.0002	.0009	.0034
	19							.0001	.0003	.0014
	20								.0001	.0005
	21									.0002
	22									.0001

	p=	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
n=2	r=0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	.1900	.2775	.3600	.4375	.5100	.5775	.6400	.6975	.7500
	2	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1225	.1600	.2025	.2500
n=5	r=0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	.4095	.5563	.6723	.7627	.8319	.8840	.9222	.9497	.9688
	2	.0815	.1648	.2627	.3672	.4718	.5716	.6630	.7438	.8125
	3	.0086	.0266	.0579	.1035	.1631	.2352	.3174	.4069	.5000
	4	.0005	.0022	.0067	.0156	.0308	.0540	.0870	.1312	.1875
	5		.0001	.0003	.0010	.0024	.0053	.0102	.0185	.0313
n=10	r=0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	.6513	.8031	.8926	.9437	.9718	.9865	.9940	.9975	.9990
	2	.2639	.4557	.6242	.7560	.8507	.9140	.9536	.9767	.9893
	3	.0702	.1798	.3222	.4744	.6172	.7384	.8327	.9004	.9453
	4	.0128	.0500	.1209	.2241	.3504	.4862	.6177	.7430	.8281
	5	.0016	.0099	.0328	.0781	.1503	.2485	.3669	.4956	.6230
	6	.0001	.0014	.0064	.0197	.0473	.0949	.1662	.2616	.3770
	7		.0001	.0009	.0035	.0106	.0260	.0548	.1020	.1719
	8			.0001	.0004	.0016	.0048	.0123	.0274	.0547
	9					.0001	.0005	.0017	.0045	.0107
	10							.0001	.0003	.0010
n=20	r=0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	.8784	.9612	.9885	.9968	.9992	.9998	1.0000	1.0000	1.0000
	2	.6083	.8244	.9308	.9757	.9924	.9979	.9995	.9999	1.0000
	3	.3231	.5951	.7939	.9087	.9645	.9879	.9964	.9991	.9998
	4	.1330	.3523	.5886	.7748	.8929	.9556	.9840	.9951	.9987
	5	.0432	.1702	.3704	.5852	.7625	.8818	.9490	.9811	.9941
	6	.0113	.0673	.1958	.3828	.5836	.7546	.8744	.9447	.9793
	7	.0024	.0219	.0867	.2142	.3920	.5834	.7500	.8701	.9423
	8	.0004	.0059	.0321	.1018	.2277	.3990	.5841	.7480	.8684
	9	.0001	.0013	.0100	.0409	.1133	.2376	.4044	.5857	.7483
	10		.0002	.0026	.0139	.0480	.1218	.2447	.4086	.5881
	11			.0006	.0039	.0171	.0532	.1275	.2493	.4119
	12			.0001	.0009	.0051	.0196	.0565	.1308	.2517
	13				.0002	.0013	.0060	.0210	.0580	.1316
	14					.0003	.0015	.0065	.0214	.0577
	15						.0003	.0016	.0064	.0207
	16							.0003	.0015	.0059
	17								.0003	.0013
	18									.0002

	p=	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
n=50	r=0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	.9948	.9997	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	2	.9662	.9971	.9998	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	3	.8883	.9858	.9987	.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	4	.7497	.9540	.9943	.9995	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	5	.5688	.8879	.9815	.9979	.9998	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	6	.3839	.7806	.9520	.9930	.9993	.9999	1.0000	1.0000	1.0000
	7	.2298	.6387	.8966	.9806	.9975	.9998	1.0000	1.0000	1.0000
	8	.1221	.4812	.8096	.9547	.9927	.9992	.9999	1.0000	1.0000
	9	.0579	.3319	.6927	.9084	.9817	.9975	.9998	1.0000	1.0000
	10	.0245	.2089	.5563	.8363	.9598	.9933	.9992	.9999	1.0000
	11	.0094	.1199	.4164	.7378	.9211	.9840	.9978	.9998	1.0000
	12	.0032	.0628	.2893	.6184	.8610	.9658	.9943	.9994	1.0000
	13	.0010	.0301	.1861	.4890	.7771	.9339	.9867	.9982	.9998
	14	.0003	.0132	.1106	.3630	.6721	.8837	.9720	.9955	.9995
	15	.0001	.0053	.0607	.2519	.5532	.8122	.9460	.9896	.9987
	16		.0019	.0308	.1631	.4308	.7199	.9045	.9780	.9967
	17		.0007	.0144	.0983	.3161	.6111	.8439	.9573	.9923
	18		.0002	.0063	.0551	.2178	.4940	.7631	.9235	.9836
	19		.0001	.0025	.0287	.1406	.3784	.6644	.8727	.9675
	20			.0009	.0139	.0848	.2736	.5535	.8026	.9405
	21			.0003	.0063	.0478	.1861	.4390	.7138	.8987
	22			.0001	.0026	.0251	.1187	.3299	.6100	.8389
	23				.0010	.0123	.0710	.2340	.4981	.7601
	24				.0004	.0056	.0396	.1562	.3866	.6641
	25				.0001	.0024	.0207	.0978	.2840	.5561
	26					.0009	.0100	.0573	.1966	.4439
	27					.0003	.0045	.0314	.1279	.3359
	28					.0001	.0019	.0160	.0780	.2399
	29						.0007	.0076	.0444	.1611
	30						.0003	.0034	.0235	.1013
	31						.0001	.0014	.0116	.0595
	32							.0005	.0053	.0325
	33							.0002	.0022	.0164
	34							.0001	.0009	.0077
	35								.0003	.0033
	36								.0001	.0013
	37									.0005
	38									.0002

Table 1 gives binomial probabilities only for a limited range of values of n and p since, in practice, either the more compact tabulation of the Poisson distribution (Table 2) or that of the Normal distribution (Table 3) can usually be used to give an adequate approximation.

As a reasonable working rule,

(i) use the Poisson approximation if $p < 0.1$, putting $m = np$.

(ii) use the Normal approximation if $0.1 \leqslant p \leqslant 0.9$ and $np > 5$, putting $\mu = np$ and $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

(iii) use the Poisson approximation if $p > 0.9$, putting $m = n(1-p)$ and working in terms of 'failures'.

Note: For values of $p > 0.5$, work in terms of 'failures' which have probability $q\ (= 1 - p)$.

Example: What is the probability of 40 or more 'successes' with $n = 50$ and $p = 0.7$? This is the same as the probability of 10 or fewer 'failures'. The probability of 10 or fewer 'failures' = 1 – probability of 11 or more 'failures' = 1 – 0.9211 = 0.0789 (found by replacing $p = 0.7$ by $q = 0.3$ in the above table).

	p=	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
n=100	r=0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	2	.9997	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	3	.9981	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	4	.9922	.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	5	.9763	.9996	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	6	.9424	.9984	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	7	.8828	.9953	.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	8	.7939	.9878	.9997	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	9	.6791	.9725	.9991	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	10	.5487	.9449	.9977	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	11	.4168	.9006	.9943	.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	12	.2970	.8365	.9874	.9996	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	13	.1982	.7527	.9747	.9990	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	14	.1239	.6526	.9531	.9975	.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	15	.0726	.5428	.9196	.9946	.9998	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	16	.0399	.4317	.8715	.9889	.9996	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	17	.0206	.3275	.8077	.9789	.9990	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	.0100	.2367	.7288	.9624	.9978	.9999	1.0000	1.0000	1.0000
	19	.0046	.1628	.6379	.9370	.9955	.9999	1.0000	1.0000	1.0000
	20	.0020	.1065	.5398	.9005	.9911	.9997	1.0000	1.0000	1.0000
	21	.0008	.0663	.4405	.8512	.9835	.9992	1.0000	1.0000	1.0000
	22	.0003	.0393	.3460	.7886	.9712	.9983	1.0000	1.0000	1.0000
	23	.0001	.0221	.2611	.7136	.9521	.9966	.9999	1.0000	1.0000
	24		.0119	.1891	.6289	.9245	.9934	.9997	1.0000	1.0000
	25		.0061	.1314	.5383	.8864	.9879	.9994	1.0000	1.0000
	26		.0030	.0875	.4465	.8369	.9789	.9988	1.0000	1.0000
	27		.0014	.0558	.3583	.7756	.9649	.9976	.9999	1.0000
	28		.0006	.0342	.2776	.7036	.9442	.9954	.9998	1.0000
	29		.0003	.0200	.2075	.6232	.9152	.9916	.9996	1.0000
	30		.0001	.0112	.1495	.5377	.8764	.9852	.9992	1.0000
	31			.0061	.1038	.4509	.8270	.9752	.9985	1.0000
	32			.0031	.0693	.3669	.7669	.9602	.9970	.9999
	33			.0016	.0446	.2893	.6971	.9385	.9945	.9998
	34			.0007	.0276	.2207	.6197	.9087	.9902	.9996
	35			.0003	.0164	.1629	.5376	.8697	.9834	.9991
	36			.0001	.0094	.1161	.4542	.8205	.9728	.9982
	37			.0001	.0052	.0799	.3731	.7614	.9571	.9967
	38				.0027	.0530	.2976	.6932	.9349	.9940
	39				.0014	.0340	.2301	.6178	.9049	.9895
	40				.0007	.0210	.1724	.5379	.8657	.9824
	41				.0003	.0125	.1250	.4567	.8169	.9716
	42				.0001	.0072	.0877	.3775	.7585	.9557
	43				.0001	.0040	.0594	.3033	.6913	.9334
	44					.0021	.0389	.2365	.6172	.9033
	45					.0011	.0246	.1789	.5387	.8644
	46					.0005	.0150	.1311	.4587	.8159
	47					.0003	.0088	.0930	.3804	.7579
	48					.0001	.0050	.0638	.3069	.6914
	49					.0001	.0027	.0423	.2404	.6178
	50						.0015	.0271	.1827	.5398
	51						.0007	.0168	.1346	.4602
	52						.0004	.0100	.0960	.3822
	53						.0002	.0058	.0662	.3086
	54						.0001	.0032	.0441	.2421
	55							.0017	.0284	.1841
	56							.0009	.0176	.1356
	57							.0004	.0106	.0967
	58							.0002	.0061	.0666
	59							.0001	.0034	.0443
	60								.0018	.0284
	61								.0009	.0176
	62								.0005	.0105
	63								.0002	.0060
	64								.0001	.0033
	65									.0018
	66									.0009
	67									.0004
	68									.0002
	69									.0001

Table 8

PERCENTAGE POINTS OF THE χ^2 DISTRIBUTION

Table of $\chi^2_{\alpha;\,\nu}$ – the 100 α percentage point of the χ^2 distribution for ν degrees of freedom

$\chi^2_{\alpha,\nu}$

α =	.995	.99	.98	.975	.95	.90	.80	.75	.70	.50	.30	.25	.20	.10	.05	.025	.02	.01	.005	.001	= α
ν = 1	$.0^4393$	$.0^3157$	$.0^3628$	$.0^3982$	.00393	.0158	.0642	.102	.148	.455	1.074	1.323	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879	10.827	ν = 1
2	.0100	.0201	.0404	.0506	.103	.211	.446	.575	.713	1.386	2.408	2.773	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.210	10.597	13.815	2
3	.0717	.115	.185	.216	.352	.584	1.005	1.213	1.424	2.366	3.665	4.108	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838	16.268	3
4	.207	.297	.429	.484	.711	1.064	1.649	1.923	2.195	3.357	4.878	5.385	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.860	18.465	4
5	.412	.554	.752	.831	1.145	1.610	2.343	2.675	3.000	4.351	6.064	6.626	7.289	9.236	11.070	12.832	13.388	15.086	16.750	20.517	5
6	.676	.872	1.134	1.237	1.635	2.204	3.070	3.455	3.828	5.348	7.231	7.841	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	18.548	22.457	6
7	.989	1.239	1.564	1.690	2.167	2.833	3.822	4.255	4.671	6.346	8.383	9.037	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	20.278	24.322	7
8	1.344	1.646	2.032	2.180	2.733	3.490	4.594	5.071	5.527	7.344	9.524	10.219	11.030	13.362	15.507	17.535	18.168	20.090	21.955	26.125	8
9	1.735	2.088	2.532	2.700	3.325	4.168	5.380	5.899	6.393	8.343	10.656	11.389	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	23.589	27.877	9
10	2.156	2.558	3.059	3.247	3.940	4.865	6.179	6.737	7.267	9.342	11.781	12.549	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209	25.188	29.588	10
11	2.603	3.053	3.609	3.816	4.575	5.578	6.989	7.584	8.148	10.341	12.899	13.701	14.631	17.275	19.675	21.920	22.618	24.725	26.757	31.264	11
12	3.074	3.571	4.178	4.404	5.226	6.304	7.807	8.438	9.034	11.340	14.011	14.845	15.812	18.549	21.026	23.337	24.054	26.217	28.300	32.909	12
13	3.565	4.107	4.765	5.009	5.892	7.042	8.634	9.299	9.926	12.340	15.119	15.984	16.985	19.812	22.362	24.736	25.472	27.688	29.819	34.528	13
14	4.075	4.660	5.368	5.629	6.571	7.790	9.467	10.165	10.821	13.339	16.222	17.117	18.151	21.064	23.685	26.119	26.873	29.141	31.319	36.123	14
15	4.601	5.229	5.985	6.262	7.261	8.547	10.307	11.036	11.721	14.339	17.322	18.245	19.311	22.307	24.996	27.488	28.259	30.578	32.801	37.697	15
16	5.142	5.812	6.614	6.908	7.962	9.312	11.152	11.912	12.624	15.338	18.418	19.369	20.465	23.542	26.296	28.845	29.633	32.000	34.267	39.252	16
17	5.697	6.408	7.255	7.564	8.672	10.085	12.002	12.792	13.531	16.338	19.511	20.489	21.615	24.769	27.587	30.191	30.995	33.409	35.718	40.790	17
18	6.265	7.015	7.906	8.231	9.390	10.865	12.857	13.675	14.440	17.338	20.601	21.605	22.760	25.989	28.869	31.526	32.346	34.805	37.156	42.312	18
19	6.844	7.633	8.567	8.907	10.117	11.651	13.716	14.562	15.352	18.338	21.689	22.718	23.900	27.204	30.144	32.852	33.687	36.191	38.582	43.820	19
20	7.434	8.260	9.237	9.591	10.851	12.443	14.578	15.452	16.266	19.337	22.775	23.828	25.038	28.412	31.410	34.170	35.020	37.566	39.997	45.315	20
21	8.034	8.897	9.915	10.283	11.591	13.240	15.445	16.344	17.182	20.337	23.858	24.935	26.171	29.615	32.671	35.479	36.343	38.932	41.401	46.797	21
22	8.643	9.542	10.600	10.982	12.338	14.041	16.314	17.240	18.101	21.337	24.939	26.039	27.301	30.813	33.924	36.781	37.659	40.289	42.796	48.268	22
23	9.260	10.196	11.293	11.688	13.091	14.848	17.187	18.137	19.021	22.337	26.018	27.141	28.429	32.007	35.172	38.076	38.968	41.638	44.181	49.728	23
24	9.886	10.856	11.992	12.401	13.848	15.659	18.062	19.037	19.943	23.337	27.096	28.241	29.553	33.196	36.415	39.364	40.270	42.980	45.558	51.179	24
25	10.520	11.524	12.697	13.120	14.611	16.473	18.940	19.939	20.867	24.337	28.172	29.339	30.675	34.382	37.652	40.646	41.566	44.314	46.928	52.620	25
26	11.160	12.198	13.409	13.844	15.379	17.292	19.820	20.843	21.792	25.336	29.246	30.434	31.795	35.563	38.885	41.923	42.856	45.642	48.290	54.052	26
27	11.808	12.879	14.125	14.573	16.151	18.114	20.703	21.749	22.719	26.336	30.319	31.528	32.912	36.741	40.113	43.194	44.140	46.963	49.645	55.476	27
28	12.461	13.565	14.847	15.308	16.928	18.939	21.588	22.657	23.647	27.336	31.391	32.620	34.027	37.916	41.337	44.461	45.419	48.278	50.993	56.893	28
29	13.121	14.256	15.574	16.047	17.708	19.768	22.475	23.567	24.577	28.336	32.461	33.711	35.139	39.087	42.557	45.722	46.693	49.588	52.336	58.302	29
30	13.787	14.953	16.306	16.791	18.493	20.599	23.364	24.478	25.508	29.336	33.530	34.800	36.250	40.256	43.773	46.979	47.962	50.892	53.672	59.703	30
40	20.706	22.164	23.838	24.433	26.509	29.051	32.345	33.660	34.872	39.335	44.165	45.616	47.269	51.805	55.759	59.342	60.436	63.691	66.766	73.402	40
50	27.991	29.707	31.664	32.357	34.764	37.689	41.449	42.942	44.313	49.335	54.723	56.334	58.164	63.167	67.505	71.420	72.613	76.154	79.490	86.661	50
60	35.535	37.485	39.699	40.482	43.188	46.459	50.641	52.294	53.809	59.335	65.227	66.981	68.972	74.397	79.082	83.298	84.580	88.379	91.952	99.607	60
70	43.275	45.442	47.893	48.758	51.739	55.329	59.898	61.698	63.346	69.334	75.689	77.577	79.715	85.527	90.531	95.023	96.388	100.425	104.215	112.317	70
80	51.171	53.539	56.213	57.153	60.391	64.278	69.207	71.145	72.915	79.334	86.120	88.130	90.405	96.578	101.880	106.629	108.069	112.329	116.321	124.839	80
90	59.196	61.754	64.634	65.646	69.126	73.291	78.558	80.625	82.511	89.334	96.524	98.650	101.054	107.565	113.145	118.136	119.648	124.116	128.299	137.208	90
100	67.327	70.065	73.142	74.222	77.929	82.358	87.945	90.133	92.129	99.334	106.906	109.141	111.667	118.498	124.342	129.561	131.142	135.807	140.170	149.449	100

For values of $\nu > 30$, approximate values for χ^2 may be obtained from the expression $\nu\left[1 - \frac{2}{9\nu} \pm \frac{x}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{9\nu}}\right]^3$, where $\frac{x}{\sigma}$ is the normal deviate cutting off the corresponding tails of a normal distribution. If $\frac{x}{\sigma}$ is taken at the 0.02 level, so that 0.01 of the normal distribution is in each tail, the expression yields χ^2 at the 0.99 and 0.01 points. For very large values of ν it is sufficiently accurate to compute $\sqrt{2\chi^2}$, the distribution of which is approximately normal around a mean of $\sqrt{2\nu - 1}$ and with a standard deviation of 1. This table is taken by consent from Statistical Tables for Biological, Agricultural, and Medical Research, by R. A. Fisher and F. Yates, published by Oliver and Boyd, Edinburgh, and from Table 8 of Biometrika Tables for Statisticians, Vol. I, by permission of the Biometrika Trustees.

المحاضرة (7) : خطط المعاينة باستخدام التوزيعات الاحتمالية

ثانياً : خطة المعاينة المفردة على أساس توزيع الهندسي الفوقي:

(Single Sampling Plan based on the Hyper Geometric Distribution)

يستخدم التوزيع فوق الهندسي(الزائدي – التوافقي Hyper geometric Distribution) ، في معاينة الخواص وفق الشروط التالية:

⇐ يتم سحب عينة عشوائية بسيطة بحجم (n) من مجتمع بحجم (N).

⇐ يكون سحب المفردات بدون ارجاع.

⇐ بعد الفحص يكون لدينا k من المفردات غير المطابقة من عينة بحجم (n) وعلى أساس التوزيع فوق الهندسي ، وان الدالة الاحتمالية للتوزيع تكون باستخدام الصيغة:

$$\mathbf{P(N,n,k,x)} = \begin{cases} \dfrac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} & , \mathbf{a \le x \le b} \\ \mathbf{0} & , \mathbf{otherwise} \end{cases}$$

$$\mathbf{a = Max[0, n-(N-k)] \quad , b = Min[k, n]}$$

وبديهياً ان نحتاج للاحتمالات ومنها:

$$\Pr = (X \le r) = P(N,n,k,r) = \sum_{x=a}^{r} P(N,n,k,x)$$

وحيث ان هنالك علاقة تقريبية بين التوزيع فوق الهندسي **(Hyper geometric Distribution)** وتوزيع ذي الحدين **(Binomial Distribution)** من خلال حقيقة ان حجم العينة (n) المحدد بموجب التوزيع فوق الهندسي هو اقل من المحدد بموجب توزيع ذي الحدين ، ولأجل اختصار الخطوات وجد انهُ من الممكن البدء باستخدام أسلوب ذي الحدين وبالذات مع تقريب مربع كاي $\left(\chi^2\right)$ للحصول على ادنى n و c من خلال استخراج قيم θ_0 و θ_1 وفق الصيغتين التالية:

$$\boldsymbol{\theta_0} = \boxed{\frac{\mathbf{k_0}}{\mathbf{N}}}$$

$$\theta_1 = \boxed{\frac{k_1}{N}}$$

يمكن الحصول على (n) من خلال الصيغة

$$n \simeq \frac{1}{2}\left[\left(\mathcal{X}^2_{2r,P}\right)\left(\frac{1}{\theta} - 0.5\right) + C\right]$$

حيث ان

$\mathcal{X}^2_{2r,P}$: قيمة جدولية (توجد جداول خاصة بتوزيع $\mathcal{X}^2$) والتي تعتمد على درجة الحرية (2r).

وبالتعويض عن قيمة C الناتجة من الخطوة السابقة في الصيغتين التاليتين:

$$\mathbf{a_1} = \frac{\mathbf{C(k_0 - 0.5C) + \left(\mathcal{X}^2{}_{2C+2,\alpha}\right)[N - 0.5(k_0 - 0.5C - 1)]}}{\mathbf{2k_0 - C + 0.5\left(\mathcal{X}^2{}_{2C+2,\alpha}\right)}}$$

$$\mathbf{a_2} = \frac{\mathbf{C(k_1 - 0.5C) + \left(\mathcal{X}^2{}_{2C+2,(1-\beta)}\right)[N - 0.5(k_1 - 0.5C - 1)]}}{\mathbf{2k_1 - C + 0.5\left(\mathcal{X}^2{}_{2C+2,(1-\beta)}\right)}}$$

ونصل الى الحل المنطقي عندما $\mathbf{a_2} \le n \le \mathbf{a_1}$ ، ونتوقف بعكس ذلك في الخطوة اللاحقة نعوض بـ (c-1) وبعدها (c-2) الى ان نصل ان يكون $\mathbf{a_2} > \mathbf{a_1}$ عندها نتوقف ونحدد قيمة (n) مقابل قيمة C وفق السياق السابق.

مثال(1): إذا علمت ان

$\boxed{\mathbf{k_0} = 1}$, $\boxed{\mathbf{k_1} = 12}$, $\boxed{\alpha = 0.05}$, $\boxed{\beta = 0.10}$, $\boxed{N = 100}$

اوجد الحجم الأمثل للعينة مع عدد القبول لخطة المعاينة المفردة باستخدام توزيع فوق الهندسي (**Hyper geometric Distribution**).

الحل:

نبدأ اولاً باستخدام صيغة ذي الحدين مع χ^2 ، نستخرج θ_0 ، θ_1 وكما يلي:

$$\boldsymbol{\theta_0 = \frac{k_0}{N} = \frac{1}{100} = 0.01}$$

$$\boldsymbol{\theta_1 = \frac{k_1}{N} = \frac{12}{100} = 0.12}$$

وباستخدام العلاقة :

$$\frac{1}{2}\left[\chi^2{}_{2r,1-\beta}\left(\frac{1}{\theta_1} - 0.5\right) + C\right] \le n \le \frac{1}{2}\left[\chi^2{}_{2r,\alpha}\left(\frac{1}{\theta_0} - 0.5\right) + C\right]$$

عندما r=1 حيث C=0

$$\frac{1}{2}\left[(\chi^2{}_{2,0.90})\left(\frac{1}{0.12} - 0.5\right) + 0\right] \le n \le \frac{1}{2}\left[(\chi^2{}_{2,0.05})\left(\frac{1}{0.01} - 0.5\right) + 0\right]$$

$$\frac{1}{2}[(4.605)(7.834)] \le n \le \frac{1}{2}[(0.103)(99.5)]$$

$$18.04 \le n \le 5.12$$ غير منطقية

عندما $r = 2$ حيث C=1

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}[(\chi^2{}_{4,0.90})(7.84) + 1] \le n \le \frac{1}{2}[(\chi^2{}_{4,0.05})(99.5) + 1]}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}[(7.779)(7.84) + 1] \le n \le \frac{1}{2}[(0.711)(99.5) + 1]}$$

$$\boldsymbol{30.99 \le n \le 35.87}$$ **منطقية**

نأخذ n=31 مقابل C=1

الان نستخدم صيغ a_1 و a_2 مع C=1 المستخرجة ، r=2 وبالتعويض نحصل على الآتي:

$$a_1 = \frac{C(k_0 - 0.5C) + \left(\chi^2_{2C+2,\alpha}\right)[N - 0.5(k_0 - 0.5C - 1)]}{2k_0 - C + 0.5\left(\chi^2_{2C+2,\alpha}\right)}$$

$$a_1 = \frac{1(1 - 0.5) + \left(\chi^2_{4,0.05}\right)[100 - 0.5(1 - 0.5 - 1)]}{2 - 1 + 0.5\left(\chi^2_{4,0.05}\right)}$$

$$a_1 = \frac{0.5 + (0.711)[100.25]}{1 + 0.5(0.711)} = \frac{71.778}{1.356} = \boxed{52.93}$$

$$a_2 = \frac{C(k_1 - 0.5C) + \left(\chi^2_{2c+2,(1-\beta)}\right)[N - 0.5(k_1 - 0.5C - 1)]}{2k_1 - C + 0.5\left(\chi^2_{2C+2,(1-\beta)}\right)}$$

$$a_2 = \frac{(12 - 0.5) + \left(\chi^2_{4,0.90}\right)[100 - 0.5(12 - 0.5 - 1)]}{24 - 1 + 0.5\left(\chi^2_{4,0.90}\right)}$$

$$a_2 = \frac{11.5 + (7.779)[100 - 0.5(10.5)]}{23 + 0.5(7.779)} = \frac{748.56}{26.889} = \boxed{27.84}$$

بما ان $\boxed{a_2 = 27.84} < a_1 = 52.93$ نستخدم c=0 و r=1 ونعوض مرة أخرى في الصيغ a_1 و a_2 وكما يلي:

$$a_1 = \frac{C(k_0 - 0.5C) + \chi^2_{2C+2,\alpha}[N - 0.5(k_0 - 0.5C - 1)]}{2k_0 - C + 0.5\chi^2_{2C+2,\alpha}}$$

$$a_1 = \frac{0 + \left(\chi^2_{2,0.05}\right)[100 - 0.5(1 - 1)]}{2 + 0.5\left(\chi^2_{2,0.05}\right)} = \frac{(0.103)[100]}{2 + 0.5(0.103)} = \frac{10.3}{2.052} = \boxed{5.02}$$

$$\mathbf{a_2} = \frac{C(k_1 - 0.5C) + \mathcal{X}^2{}_{2c+2,(1-\beta)}[N - 0.5(k_1 - 0.5C - 1)]}{2k_1 - C + 0.5\mathcal{X}^2{}_{2C+2,(1-\beta)}}$$

$$\mathbf{a_2} = \frac{0 + (\mathcal{X}^2{}_{2,0.90})[100 - 0.5(12 - 1)]}{24 + 0.5(\mathcal{X}^2{}_{2,0.90})} = \frac{(4.605)[100 - 5.5]}{24 + 0.5(4.605)} = \frac{435.173}{26.303} = \boxed{16.55}$$

بما ان $\mathbf{a_2} > \mathbf{a_1}$ ، نرجع للخطوة السابقة أي ان C=1 و $\mathbf{n = 28}$

مثال(2)/تمرين: إذا علمت ان

$\boxed{N = 200}$, $\boxed{\beta = 0.10}$, $\boxed{\alpha = 0.05}$, $\boxed{k_1 = 24}$, $\boxed{k_0 = 2}$

اوجد الحجم الأمثل للعينة مع عدد القبول لخطة المعاينة المفردة باستخدام توزيع فوق الهندسي (**Hyper geometric Distribution**).