الفصل الثالث

اختبارات الفرق بين متوسطين

1.3 تمهيد:

سوف نتناول في هذا الفصل الاختبارات المتعلقة بالوسط الحسابي (المتوسط) في حالات مختلفة منها اختبارات تتعلق بمتوسط مجتمع واحد، او الفرق بين متوسطي مجتمعين عندما تكون العينات المسحوبة من المجتمعين مستقلة و غير مستقلة.

2.3 اختبار الفرق بين متوسطين لعينات مستقلة:

بافتراض ان $\bar{x}_1$ يمثل الوسط الحسابي لعينة عشوائية بحجم n_1 ماخوذة من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ_1 وتباين σ_1^2، ان $\bar{x}_2$ يمثل الوسط الحسابي لعينة اخرى بحجم n_2 ماخوذة من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ_2 وتباين σ_2^2. فاذا كان المجتمعين مستقلين عندها يمكن اختبار فرضية العدم H_0 الاتية التي تنص على تساوي متوسطي المجتمعين ضد اي فرضية بديلة:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \Rightarrow \quad H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

وحسب الحالات الاتية:

1. اذا كان تباينا المجتمعين (σ_1^2, σ_2^2) معلومين فان احصاءة الاختبار تعطى وفق الصيغة الاتية:

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu - \mu_0)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad \text{where } Z \sim N(0,1) \qquad \dots (7)$$

2. اذا كان تباينا المجتمعين (σ_1^2, σ_2^2) غير معلومين وحجم العينتين كبير$(n_1, n_2 \geq 30)$ فان احصاءة الاختبار تعطى وفق الصيغة الاتية:

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu - \mu_0)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \qquad \text{where } Z \sim N(0,1) \qquad \dots (8)$$

3. اذا كان تباينا المجتمعين (σ_1^2, σ_2^2) غير معلومين وغير متجانسين وحجم العينتين صغير$(n_1, n_2 < 30)$ فان احصاءة الاختبار تعطى وفق الصيغة الاتية:

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu - \mu_0)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \qquad \text{where } T \sim t_{(1-\alpha,\ n_1+n_2-2)} \qquad \ldots (9)$$

4. اذا كان تباينا المجتمعين (σ_1^2, σ_2^2) غير معلومين ومتجانسين وحجم العينتين صغير $(n_1, n_2 < 30)$ فان احصاءة الاختبار تعطى وفق الصيغة الاتية:

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu - \mu_0)}{Sp\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \qquad \text{where } T \sim t_{(1-\alpha,\ n_1+n_2-2)} \qquad \ldots (10)$$

اذ ان Sp هو التباين التجميعي (Pooled Variance)، ويحسب وفق الصيغة الاتية:

$$Sp = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \qquad \ldots (11)$$

ملاحظة: ان تجانس التباينات له اختبارات خاصة تعرف باختبارات تجانس التباين سيتم التطرق له الفصول القادمة.

مثال 1.3: تروج احدى الشركات لعلاج عشبي لانقاص الوزن، وقد تم اعطاء العلاج لمجموعتين المجموعة الاولى شملت 50 من الذكور والمجموعة الثانية شملت 100 من الاناث. فاذا علمت ان متوسط اوزان المجموعة الاولى بعد تلقي العلاج بلغ 70 كغم بتباين بلغ 10 كغم، ومتوسط اوزان المجموعة الثانية بلغ 68 كغم بتباين بلغ 20 كغم. فهل تعتقد وعند مستوى معنوية ملائم بان هذا العلاج قد حقق متوسط اوزان متساو بين الذكور والاناث.

الحل:

- الفرضيات:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \Rightarrow \quad H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \quad \Rightarrow \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

- احصاءة الاختبار:

$$Z_{cal} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu - \mu_0)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad , \quad Z \sim N(0,1)$$

$$Z_{cal} = \frac{70 - 68 - 0}{\sqrt{\frac{10}{50} + \frac{20}{100}}} = \frac{2}{\sqrt{0.4}} = 3.175$$

- مستوى المعنوية: يمكن اجراء هذا الاختبار عند مستوى معنوية 0.1.
- القيمة الحرجة (الجدولية): الاختبار من جانبين لذلك فان القيمة الجدولية للاختبار تستخرج من جداول التوزيع الطبيعي القياسي وكما ياتي:

$$Z_{tab} = Z_{\alpha/2} = Z_{(0.05)} = 1.645$$

- القرار الاحصائي و القرار الحيوي:

بما ان $|Z_{cal}| > Z_{tab}$ لذلك ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة، وهذا يدل على ان الفروق معنوية بين متوسط اوزان الذكور ومتوسط اوزان الاناث بعد تلقي العلاج.

ملاحظة: لاوجود لقرار حيوي مناسب للحالة في المثال 1.3، لذلك فان القرار الاحصائي يفي بالغرض من الناحية الحيوية. لكن يمكن اتخاذ قرار حيوي اذا تم اختبار متوسط اوزان كل مجموعة على حدة باعتبارها مجموعتين مستقلتين.

مثال 2.3: في دراسة لبيان الفرق بين متوسطي اوزان الذكور واوزان الاناث، تم قياس الاوزان لـ 11 شخصا من الذكور و 18 فردا من الاناث، وتم الحصول على المعلومات الاتية:

الذكور	الاناث
$\bar{x}_1 = 82$	$\bar{x}_2 = 73$
$S_1^2 = 10$	$S_2^2 = 7$

فهل تشير النتائج الى ان متوسطي اوزان الذكور والاناث متساوية عند مستوى معنوية ملائم. (افترض ان تباينات المجتمعين متجانسة)

الحل:

- الفرضيات:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \Rightarrow \quad H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \quad \Rightarrow \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

- احصاءة الاختبار:

$$T_{cal} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu - \mu_0)}{Sp\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \qquad , \qquad T \sim t_{(1-\alpha,\ n_1+n_2-2)}$$

$$Sp = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{(11-1)(10) + (18-1)(7)}{11+18-2}}$$

$$Sp = \sqrt{\frac{219}{27}} = \sqrt{8.11} = 2.85$$

$$T_{cal} = \frac{82 - 73 - 0}{(2.85)\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{18}}} = \frac{9}{1.1} = 8.18$$

- مستوى المعنوية: يمكن اجراء هذا الاختبار عند مستوى معنوية 0.05.
- القيمة الحرجة (الجدولية): الاختبار من جانبين لذلك فان القيمة الجدولية للاختبار تستخرج من جداول توزيع t وكما ياتي:

$$T_{tab} = t_{(1-\alpha/2,\ n_1+n_2-2)} = t_{(0.975,27)} = 2.05$$

- القرار الاحصائي و القرار الحيوي:

لما كانت $|T_{cal}| > T_{tab}$ لذلك ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة، هذا يعني ان متوسط اوزان الذكور يختلف عن متوسط اوزان الاناث.

مثال 3.3: تم اخضاع مجموعتين من المرضى يعانون من ارتفاع ضغط الدم الى نظام علاج معين، تتالف المجموعة الاولى من 49 شخصا من الذكور وتتالف المجموعة الثانية من 36 فردا من الاناث، وتم الحصول على المعلومات الاتية:

الذكور	الاناث
$\bar{x}_1 = 130$	$\bar{x}_2 = 131$
$S_1^2 = 14.4$	$S_2^2 = 11$

فهل تعتقد ان تاثير العلاج على متوسط مستوى ضغط الدم للذكور كان اكبر من تاثير العلاج على متوسط مستوى ضغط الدم للاناث عند مستوى معنوية ملائم.

الحل:

- الفرضيات:

$$H_0: \mu_1 > \mu_2 \quad \Rightarrow \quad H_0: \mu_1 - \mu_2 > 0$$

$$H_1: \mu_1 \leq \mu_2 \quad \Rightarrow \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \leq 0$$

- احصاءة الاختبار:

$$Z_{cal} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu - \mu_0)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \quad , \quad Z \sim N(0,1)$$

$$Z_{cal} = \frac{131 - 130 - 0}{\sqrt{\frac{9}{30} + \frac{14.4}{36}}} = \frac{1}{\sqrt{0.7}} = \frac{1}{0.84} = 1.19$$

- مستوى المعنوية: يمكن اجراء هذا الاختبار عند مستوى معنوية 0.1.
- القيمة الحرجة (الجدولية): الاختبار من جانبين لذلك فان القيمة الجدولية للاختبار تستخرج من جداول التوزيع الطبيعي القياسي وكما ياتي:

$$Z_{tab} = Z_{\alpha/2} = Z_{(0.05)} = 1.645$$

- القرار الاحصائي والقرار الحيوي:

لما كانت $|Z_{cal}| < Z_{tab}$ لذلك تقبل فرضية العدم وترفض الفرضية البديلة، اي ان الفروق غير معنوية، وهذا يعني ان متوسط الذكور ضغط الدم لدى الذكور بعد تلقي العلاج اكبر من متوسط ضغط الدم لدى الاناث بعد تلقي العلاج.

3.3 اختبار الفرق بين متوسطين لعينات غير مستقلة:

يستخدم هذا النوع من الاختبارات عند المقارنة بين مجموعتين من الاجراءات تم حسابها لنفس المشاهدات (العينة ذاتها). عندها يمكن اختبار فرضية العدم H_0 التي تنص على تساوي متوسطي المجموعتين ضد اي فرضية بديلة:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \Rightarrow \quad H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

وان احصاءة الاختبار تعطى وفق الصيغة الاتية:

$$T = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}} \qquad \text{where } T \sim t\,(1-\alpha, n-1) \qquad \ldots (12)$$

وان:

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} \quad , \quad S_d = \sqrt{\frac{\sum \left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n-1}}$$

مثال 4.3: تم اخضاع 10 مرضى يعانون من ارتفاع ضغط الدم الى نظام علاج يشمل مرحلتين كل مرحلة تستمر لمدة ثلاثة اشهر، وبعد انتهاء كل مرحلة تم تسجيل ضغط الدم، وتم الحصول على المعلومات الاتية:

المرحلة1	138	142	130	128	131	140	139	141	135	140
المرحلة2	135	140	128	125	130	136	139	140	132	136

اختبر تاثير العلاج على مستوى ضغط الدم عند مستوى معنوية ملائم.

الحل:

- الفرضيات:

$$H_0: \mu_2 > \mu_1 \quad \Rightarrow \quad H_0: \mu_2 - \mu_1 > 0$$

$$H_1: \mu_2 \leq \mu_1 \quad \Rightarrow \quad H_1: \mu_2 - \mu_1 \leq 0$$

- احصاءة الاختبار:

$$T = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}} \qquad , \quad T \sim t\,(1-\alpha, n-1)$$

$$T_{cal} = \frac{-2.3}{1.34/\sqrt{10}} = \frac{-2.3}{1.34/3.16} = \frac{1}{0.99} = -2.323$$

- مستوى المعنوية: يمكن اجراء هذا الاختبار عند مستوى معنوية 0.05.

- القيمة الحرجة (الجدولية): الاختبار من جانبين لذلك فان القيمة الجدولية للاختبار تستخرج من جداول التوزيع الطبيعي القياسي وكما ياتي:

$$T_{tab} = t_{(1-\alpha/2, n-1)} = t_{(0.975,9)} = 2.202$$

- القرار الاحصائي:

لما كانت $|T_{cal}| > T_{tab}$ لذلك ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة، اي ان الفروق معنوية، وهذا يعني ان متوسط ضغط الدم في المرحلة الثانية من نظام العلاج اقل من متوسط ضغط الدم في المرحلة الاولى من نظام العلاج.

- القرار الحيوي: يمكن القول ان العلاج في المرحلة الثانية قد ساعد في انخفاض ضغط الدم العالي، اي ان نظام العلاج المتبع هو نظام صالح للتطبيق.

المرحلة1	المرحلة2	d_i	$d_i - \bar{d}$	$(d_i - \bar{d})^2$
140	136	-4	-1.7	2.89
135	132	-3	-0.7	0.49
141	140	-1	1.3	1.69
139	139	0	2.3	5.29
140	136	-4	-1.7	2.89
131	130	-1	1.3	1.69
128	125	-3	-0.7	0.49
130	128	-2	0.3	0.09
142	140	-2	0.3	0.09
138	135	-3	-0.7	0.49
		$\sum d_i = -23$		$\sum (d_i - \bar{d})^2 = 16.1$

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{-23}{10} = -2.3$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{16.1}{9}} = 1.34$$