المجموعات (Sets)

تعريف:

تعرف المجموعة بأنها جماعة غير مرتبة من الأغراض التي تتمتع بنفس الصفة.

ندعو الأغراض في المجموعة بعناصر المجموعة.

نرمز للمجموعات بأحرف كبيرة D, C, B, A...

ونرمز للعناصر بأحرف صغيرة d, c, b, a...

نستخدم أحد الرمزين للتعبير عن العلاقة بين المجموعة والعنصر:

1 - $\in$ تكتب $a \in A$ للدلالة على أن العنصر a من المجموعة A.

2 - $\notin$ نكتب $a \notin A$ للدلالة على أن العنصر a ليس من المجموعة A.

طرق كتابة المجموعات:

نعبر عن المجموعات بإحدى الطريقتين التاليتين:

1 – طريقة القائمة: في هذه الطريقة نذكر جميع عناصر المجموعة مع وضع فاصلة بين كل عنصرين ونضع عناصر المجموعة بين قوسين كبيرين { } مثلاً $A = \{a,b,c,d\}$ مجموعة مكونة من العناصر الأربعة a,b,c,d.

ملاحظة:

عند كتابة المجموعات بطريقة القائمة لا نكرر العنصر أكثر من مرة واحدة.

مثال:

اكتب عناصر المجموعة التالية بطريقة القائمة:

مجموعة أحرف كلمة sets:

$$A = \{s,e,t\}$$

ملاحظة: لا تخضع عناصر المجموعة لترتيب خاص.

في المثال السابق يمكن أيضاً كتابة:

$$A = \{t,e,s\}$$

2 – طريقة القاعدة (طريقة الخاصية المميزة): هنا نكتب عناصر المجموعة بالشكل:

A = {a: نضع هنا الخاصية المميزة لعناصر المجموعة}

مثال:

اكتب مجموعة أحرف كلمة sets بطريقة الخاصية المميزة:

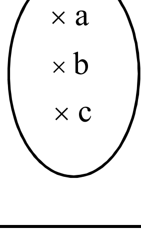
A = {a: حيث a حرف من أحرف كلمة sets}

تمثيل المجموعات: مخططات فن

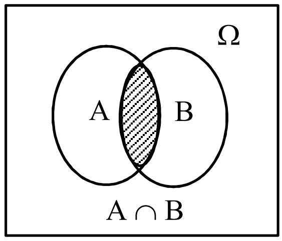
لتسهيل التعامل مع المجموعات نقوم بتمثيلها عن طريق مخططات ندعوها مخططات فن حيث نرسم منحني مغلق ونضع عناصر المجموعة داخله.

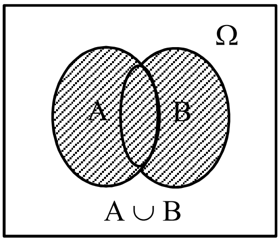
مثال:

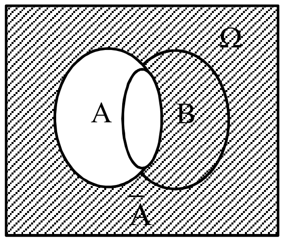
لتكن المجموعة $A = \{a,b,c\}$ تمثيل فن لها هو:

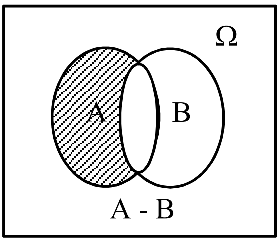


تمثل العمليات على المجموعات بمخططات فن كما يلي:









المستطيل هو تمثيل للمجموعة الشاملة.

مجموعات الأعداد:

a – مجموعة الأعداد الطبيعية:

$$\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots.\}$$

b – مجموعة الأعداد الصحيحة:

$$\mathbb{Z}=\{\ldots., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

c – مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة:

$$\mathbb{Z}^{+}=\{1,2,3,\ldots\}$$

d – مجموعة الأعداد النسبية:

$$\mathbb{Q}=\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} , q \in \mathbb{Z} , q \neq 0\}$$

e – مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

ملاحظة:

يمكن أن تكون المجموعة مشكلة من عناصر هي مجموعات.

إن المجموعة $\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ هي مجموعة تعطي أربعة عناصر كل منها مجموعة.

f – المجموعة الخالية: هي مجموعة لا تحوي أي عنصر ونرمز لها بأحد الرمزين ϕ ,$\{\ \}$.

من الخطأ الشائع التعبير عن المجموعة الخالية بهذا الرمز $\{\phi\}$، لأن الخالية ϕ لا تحوي أي عنصر، أما المجموعة $\{\phi\}$ فهي مجموعة عناصرها مجموعات فيها عنصر واحد هو المجموعة الخالية.

المجموعة الجزئية:

نقول عن المجموعة A إنها مجموعة جزئية من B إذاً وفقط إذا كان كل عنصر من A هو عنصر من B ونستخدم لذلك الرمز $\subseteq$ ونكتبه $A \subseteq B$.

نتيجة:

من أجل مجموعة Ω يكون:

$$\Omega \subseteq \Omega \text{ و } \phi \subseteq \Omega$$

المجموعات المتساوية:

تتساوى مجموعتان B, A إذاً وفقط إذا كانت $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

المجموعات المنتهية:

إذا كانت Ω مجموعة فيها n عنصراً مختلفاً حيث n عدد صحيح غير سالب نقول في هذه الحالة إن Ω مجموعة منتهية وأن رئيس هذه المجموعة يساوي n (أي عدد عناصر هذه المجموعة n) ونرمز لرئيس المجموعة Ω بالرمز $|\Omega|$.

مثال:

إن رئيس مجموعة الأحرف الصوتية V في اللغة الإنكليزية هو $|V| = 5$.

المجموعات غير المنتهية:

نقول عن مجموعة إنها غير منتهية إذا كان عدد عناصرها غير منتهي كما في مجموعات الأعداد: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{W}$.

قوة مجموعة:

قوة مجموعة Ω هو مجموعة كل المجموعات الجزئية من المجموعة Ω ونرمز لقوة مجموعة Ω بالرمز $P(\Omega)$.

مثال:

لتكن المجموعة $A = \{0,1,2\}$ أوجد قوة A أي $P(A)$.

نستطيع تشكيل المجموعات الجزئية التالية من المجموعة A:

$$\phi , \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}$$

ونكتب:

$$P(A) = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}\}$$

ملاحظة (1):

عدد عناصر مجموعة المجموعات الجزئية من المجموعة Ω التي عدد عناصرها n هو 2^n أي:

$$|P(\Omega)| = 2^n$$

في المثال السابق:

$$|P(A)| = 2^3 = 8$$

ملاحظة (2):

يبنى مفهوم نمط المعطيات في علوم الحاسب على المجموعات وخاصة data type أو type هو اسم لمجموعة من مجموعة العمليات التي تطبق على عناصر المجموعة.

مثال:

البوليان (Boolean) هو اسم المجموعة {0,1} مع العمليات AND, OR, NOT على عناصر هذه المجموعة..

العمليات على المجموعات:

1 – اتحاد المجموعات:

لتكن A ,B مجموعتان، إن اتحاد المجموعة A ,B الذي نرمز له بالرمز $A \cup B$ هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A أو المجموعة B ونكتب:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$$

2 – تقاطع المجموعات:

لتكن A ,B مجموعتين إن تقاطع المجموعتين A ,B هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A و B معاً ونرمز له بالرمز $A \cap B$ ونكتب:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$$

3 – فرق المجموعات:

لتكن A ,B مجموعتان، إن فرق المجموعتين A ,B والذي نرمز له بالرمز $A - B$ هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A ولا تنتمي إلى B ونكتب:

$$A - B = \{x : x \in A \text{ and } x \notin B\}$$

4 – الفرق التناظري:

هو المجموعة الناتجة من اتحاد المجموعتين $A - B$، $B - A$ ونرمز له بـ $\oplus$ ونكتب:

$$A \oplus B = \{x : x \in A - B \text{ or } x \in B - A\}$$

5 – الجداء الديكارتي للمجموعات:

تستدعي الحاجة في كثير من الأحيان إلى تمثيل المعلومات على شكل متعددات، إن العناصر في كل متعدد تأتي من مجموعات معروفة.

مثل هذه المجموعة تدعى بالجداء الديكارتي.

تعريف:

إذا كانت A, B مجموعتين نعرف الجداء الديكارتي لـ A في B ونرمز له بالرمز $A \times B$ هو مجموعة كل الأزواج المرتبة (a,b) بحيث يكون $a \in A$ و $b \in B$ ونعبر عنه كما يلي:

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ and } b \in B\}$$

مثال: لتكن $A = \{x,y\}$, $B = \{0,1\}$ أوجد $A \times B$.

$$A \times B = \{(0,x), (0,y), (1,x), (1,y)\}$$

ملاحظة:

إذا كانت $A = \phi$, $B = \{0,1\}$ فإن $A \times B = \phi$ لأنه لا توجد أزواج مرتبة حدها الأول من A لأن A خالية وعليه تكون المجموعة $A \times B$ غير خالية إذاً وفقط إذا كانت المجموعتان A, B غير خاليتين معاً.

الجداء الديكارتي لعدد من المجموعات:

لتكن لدينا المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ فإن:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) : x_i \in A_i\}$$

ملاحظة:

إذا كانت كل المجموعات A_i في الجداء الديكارتي هي نفس المجموعة A فإننا نستخدم:

$$A^n = A \times A \times \ldots \times A$$

مثال:

لتكن $A = \{a,b,c\}$ أوجد: A^2, A^3

$A^2 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (ca), (c,b), (c,c)\}$
$A^3 = \{(a,a,a), (a,a,b), (a,a,c), (a,b,a), (a,b,b), (a,b,c), (a,c,a), (a,c,b), (a,c,c), (b,a,a), (b,a,b), (b,a,c), (b,b,a), (b,b,b), (b,b,c), (b,c,a), (b,c,b), (b,c,c), (c,a,a), (c,a,b), (c,a,c), (c,b,a), (c,b,b), (c,b,c), (c,c,a), (c,c,b), (c,c,c)\}$

إن A^3 هي مجموعة كبيرة تتكون من ثلاثيات مرتبة عددها 27.

مثال:

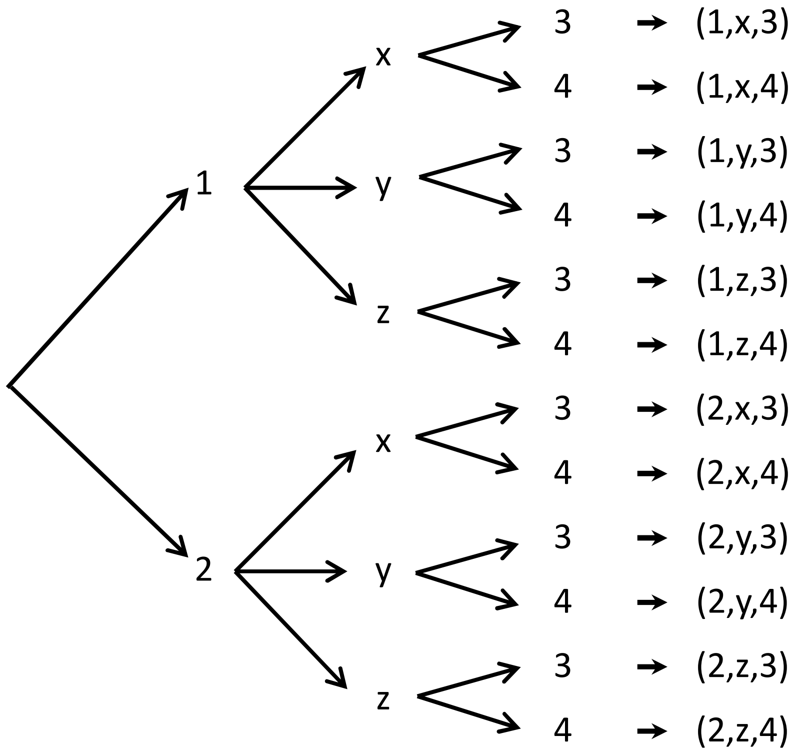
لتكن:

$A = \{1,2\}$، $B = \{x,y,z\}$، $C = \{3,4\}$.

أوجد الجداء الديكارتي $A \times B \times C$.

$A \times B \times C$ يتكون من الثلاثيات المرتبة (a,b,c) حيث: $a \in A$، $b \in B$، $c \in C$

يمكن الحصول على $A \times B \times C$ بشكل منظم باستخدام المخطط الشجري.


1
2
x
y
z
x
y
z
3
4
3
4
3
4
3
4
3
4
3
4
(1,x,3)
(1,x,4)
(1,y,3)
(1,y,4)
(1,z,3)
(1,z,4)
(2,x,3)
(2,x,4)
(2,y,3)
(2,y,4)
(2,z,3)
(2,z,4)