6 – متمم مجموعة:

لتكن Ω هي المجموعة الشاملة، إن متمم المجموعة A والذي نرمز له $\overline{A}$ هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى Ω ولا تنتمي إلى A ونكتب: $\overline{A}=\Omega-A$.

جدول العمليات على المجموعات:

الاسم	المطابقة
قوانين التطابق	$A \cup \phi = A$ $A \cap \Omega = A$
قوانين السيطرة	$A \cup \Omega = \Omega$ $A \cap \phi = \phi$
قوانين تساوي القوى	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
قانون الإتمام	$\overline{\overline{A}} = A$
القوانين التبديلية	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
القوانين التجميعية	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
قوانين التوزيع	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
قوانين دومورغان	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
قوانين الامتصاص	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
قوانين الإتمام	$A \cup \overline{A} = \Omega$ $A \cap \overline{A} = \phi$

ملاحظة: في الجدول السابق Ω هي المجموعة الشاملة.

تعميم الاتحاد والتقاطع:

نفرض أن $A_1, A_2,\ldots,A_n$ هي مجموعات عددها n، نعبر عن اتحاد هذه المجموعات بالرمز:

$$A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=2}^{n} A_i$$

ونعبر عن تقاطع هذه المجموعات بالرمز:

$$A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

مثال:

لتكن $A_i = \{i, i+1, i+2, \ldots\}$ عندئذ:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \ldots\} = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \ldots\} = \{1,2,3, \ldots\}$$

يمكن توسيع مفهوم الاتحاد والتقاطع لعدد غير منتهٍ من المجموعات ونستخدم:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

وبشكل أكثر عمومية $\bigcup_{i=1} A_i$ و $\bigcap_{i=1} A_i$ يستخدمان للإشارة إلى الاتحاد والتقاطع للمجموعات A_i من أجل $i \in I$ وتمثل I مجموعة قيم الدليل i.

مثال:

لتكن $A_i = \{1,2,3,\ldots,i\}$ من أجل $i = 1,2,3,\ldots$ عندئذ يكون اتحاد هذه المجموعات هو المجموعة:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{1,2,3,\ldots,i\} = \{1,2,3,\ldots\} = \mathbb{Z}^+$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{1,2,3,\ldots,i\} = \{1\}$$

مثال:

ليكن من أجل كل عدد طبيعي i لدينا المجموعة:

$$A_i = \{-i, -i+1, \ldots, -1, \ldots, i-1, i\}$$

مثلاً: A_4

$$A_4 = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

العد باستخدام مبدأ الإضافة والحذف:

نفرض أننا نريد عدد عناصر اتحاد المجموعتين:

$$A = \{1,2,3,4,5\} \qquad B = \{2,4,6,8\}$$

$$A \cup B = \{1,2,3,4,6,8\}$$

رئيس الاتحاد $|A \cup B| = 7$

$$A \cap B = \{2,4\}$$

رئيس التقاطع $|A \cap B| = 2$.

ملاحظة: إذا تمت معرفة أي ثلاثة أعداد من الأعداد الأربعة:

$$|A|, |B|, |A \cap B|, |A \cup B|$$

عندها يمكننا معرفة العدد الرابع باستخدام القاعدة التالية:

من أجل المجموعات المنتهية بعدد العناصر $|A \cup B|$, $|A \cap B|$, $|B|$, $|A|$.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

نوسع القاعدة السابقة من أجل ثلاث مجموعات:

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|\end{aligned}$$

إن تعميم القاعدة السابقة من أجل ثلاثة مجموعات أو أكثر يدعى بمبدأ الإضافة والحذف والذي يمكن صياغته على النحو الآتي:

لتكن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات منتهية عندئذ:

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| = \sum_{1 \le i \le n} \left|A_i\right| - \sum_{1 \le i < j \le n} \left|A_i \cap A_j\right| +$$

$$\sum_{1 \le i < j < k \le n} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| - \ldots + (-1)^{n+1} \left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right|$$

مثال:

اكتب مبدأ الإضافة والحذف من أجل أربع مجموعات منتهية A_1, A_2, A_3, A_4.

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = {} & |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \\ & |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ & + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|\end{aligned}$$

من الواضح أن هذه العلاقة تتضمن 15 حداً مختلفاً ناتجة من تقاطع المجموعات الجزئية من المجموعة $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.