الـدوالَ ورسـمهــا

1.2 المقدمة:

ان مفهوم الدالة من اهم المفاهيم في الرياضيات وهي العامل الاساسي في التطبيقات المذهلة للرياضيات في سائر العلوم وعلى وجه الخصوص في علمي الاقتصاد والادارة .

إذا كانت القيمة المتغيرة لـ y محددة تمامًا بقيمة x (أي ان y، تعتمد على قيمة x)، فإننا نقول إن y دالة لـ x .لذلك غالبًا ما تُعطى قيمة y بواسطة قاعدة أو صيغة توضح كيفية حسابها من المتغير x .وكطريقة رمزية للقول أن y دالة لـ x هي الكتابة $y = f(x)$ (y يساوي f لـ x)

في هذا الترميز: يمثل الرمز f الدالة ويمثل المتغير x المسمى بالمتغير ذي المسافة البادئة قيمة الإدخال لـ f والمتغير y هو المتغير التابع ، يمثل قيمة الإخراج المقابلة لـ f عند x .

تعريف (الدالة):

تعرف الدالة على انها علاقة f بين مجموعتين غير خاليتين A وB، بحيث أن لكل عنصر في A توجد صورة واحدة فقط في B

$$f : A \to B$$

$$\forall x \in A \to f(x) \in B$$

ممكن استخدام رموز أخرى للدالة بدلا من f مثل g , h وغيرها.

مثال 1:

لتكن المجموعة X والمجموعة Y مجموعتان غير خاليتان وبالشكل:

$$Y = \{1, 3, 4, 9\} \quad , X = \{1, 2, 3\}$$

أثبت ان f هي دالة

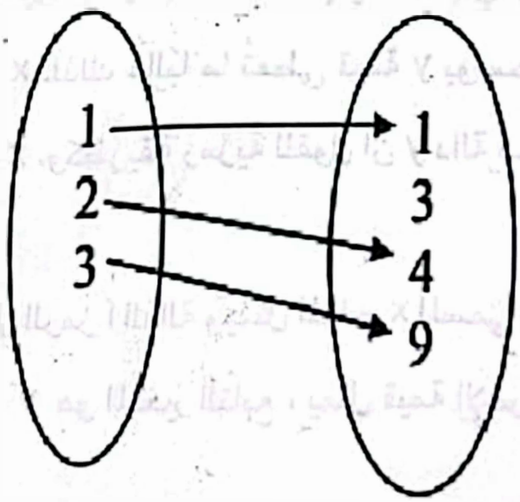
$f: X \to Y$

$f(x) = x^2. \ \forall x \in X$

الحل:

نختبر هل ان f دالة

$$f(1) = 1^2 = 1, \ f(2) = 2^2 = 4, \ f(3) = 3^2 = 9$$



الشكل (1)

اذن العلاقة f هي دالة لان كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الاكثر من Y وكما في الشكل رقم (1) اعلاه.

ل 2:

لتكن المجموعة X والمجموعة Y مجموعتان غير خاليتان وبالشكل

$X = \{0, 1, -1, 2, -2\}$,$Y = \{0, 2, -2, 4, -4\}$

والعلاقة f من X الى Y

$f: X \to Y$

$f(x) = 2x \quad , \forall x \in X$

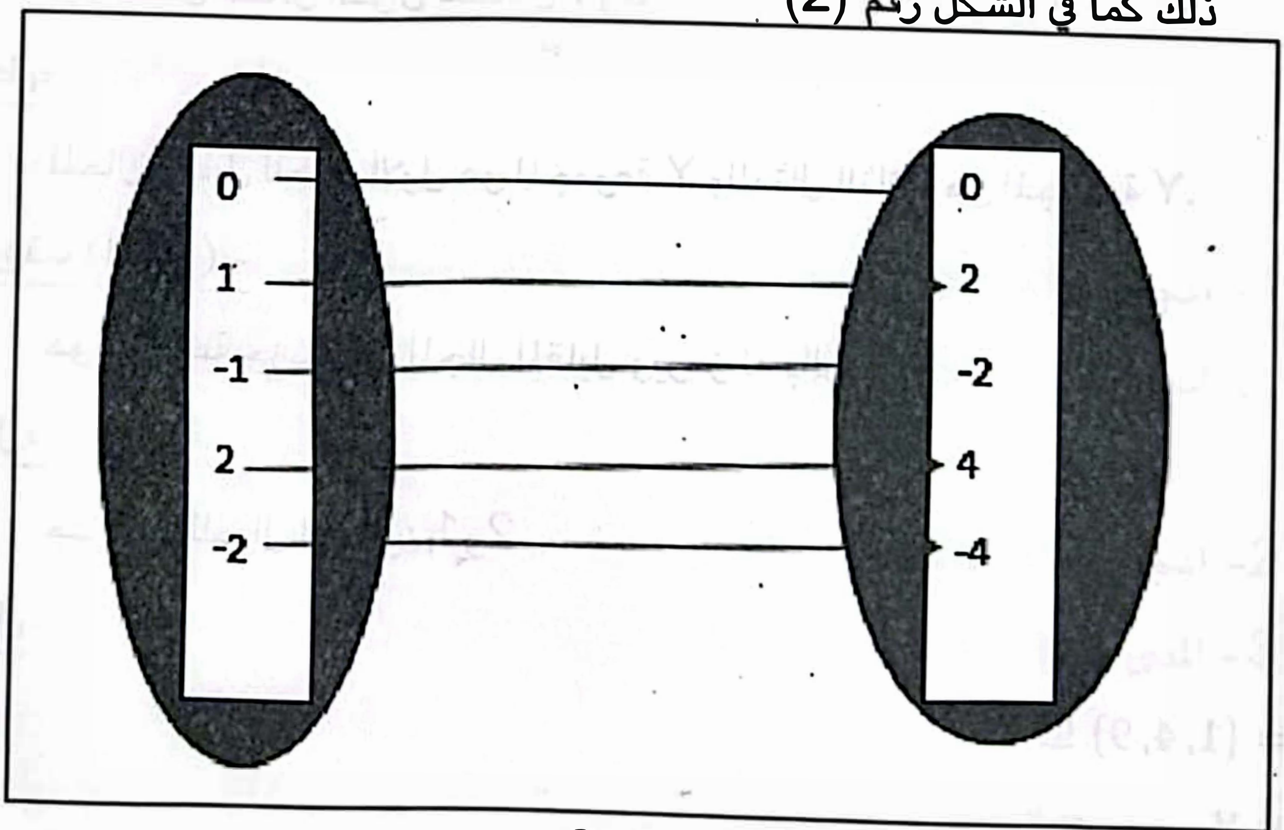
أثبت ان f هي دالة.

ل :

$f(0) = 0. \quad f(1) = 2. \quad f(-1) = -2\,. \quad f(2) = 4. \quad f(-2) = -4$

1- العلاقة f دالة لان كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الاكثر من Y.

2- العناصر 2- ,2 ,1- ,1 ,0 في علاقة مع عنصر واحد فقط من Y ويمكن توضيح ذلك كما في الشكل رقم (2)



الشكل (2)

تعريف (مجال الدالة) :-

يطلق على مجموعة العناصر الموجودة في منطلق الدالة f، ولها صورة بواسطة الدالة f بأنها مجال للدالة f ويرمز له بالرمز D_f .

مثال:

جد مجال الدوال للمثالين 1 و2.

الحل:-

$D_f = \{ 1, 2, 3 \}$

$D_f = \{ 0, 1, -1, 2, -2 \}$

تعريف (المجال المقابل):-

يطلق على المجموعة التي تحتوي مجموعة الصور وعناصر أخرى بأنها مجال الدالة f .

مثال:

جد المجال المقابل الدوال للمثالين 1و2

الحل:

المجال المقابل للمثال الاول هو المجموعة Y وللمثال الثاني هو المجموعة Y.

تعريف (المدى):-

هو مجموعة جزئية من المجال المقابل ويرمز له بالرمز R_f .

مثال:

جد المدى للدوال للمثالين 1و2

الحل:

$R_f = \{1, 4, 9\} \subseteq Y$

$R_f = Y$

ملاحظة:- قد يكون المجال المقابل مساوي للمدى في بعض الحالات.

مثال :

لتكن f دالة حدد مجالها والمجال المقابل والمدى لها. حيث ان :-

$A = \{0,1,2,3,4,5\}$

$B = \{0,1,4,9,16,25,33,41\}$

$f(x) = x^2.\ \forall x \in A$ $x^2 + 1$

الحل:

نجد صور عناصر A تحت تاثير الدالة f

$f(0) = (0)^2 = 0$

$f(1) = (1)^2 = 1$

$f(2) = (2)^2 = 4$

$f(3) = (3)^2 = 9$

$f(4) = (4)^2 = 16$

$f(5) = (5)^2 = 25$

1- المجال الدالة f هو كل عناصر المجموعة A لان جميع عناصر A واقعة تحت تاثير الدالة f .

$D_f = A$

2- المجال المقابل للدالة f هو B .

3- المدى للدالة f هو

$R_f = \{0,1,4,9,16,25\}$

لاحظ ان $R_f \subseteq B$.

مثال :

هل ان f دالة ثم جد المجال والمجال المقابل والمدى

$B = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}\}$ ، $A = \{1,2,3\}$

والعلاقة f من A الى B أثبت ان f هي دالة

$$f: A \to B$$

$$f(x) = \sqrt{x},\ \forall x \in A$$

الحل:

1- نحدد **عناصر** المجموعة A

$$f(1) = \sqrt{1} = 1$$

$$f(2) = \sqrt{2}$$

$$f(3) = \sqrt{3}$$

2- **المجال** للدالة f هو كل عناصر المجموعة A لان جميع عناصر A واقعة تحت تاثير الدالة f.

$$D_f = A$$

3- **المجال المقابل** للدالة f هو B.

4- **المدى** للدالة f هو

$$R_f = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$$

تعريف (الدوال المتساوية):-

يقال عن الدالة f أنها مساوية للدالة h اذا كان:-

1- $D_f = D_h$

2- $x \in D_f \Longrightarrow f(x) = h(x)$

مثال:

لتكن f و h دوال بحيث أن

$$f: N \longrightarrow N, \quad f(x) = x^2$$

$$h: N \longrightarrow N, \quad h(x) = x + 1$$

هل ان $f = h$؟

الحل:

نلاحظ ان :-

$$D_f = D_h = N$$

بحيث ان

$$x \in N \Longrightarrow f(x) = x^2$$

و $h(x) = x + 1$

نلاحظ ان $f(x) \neq h(x) \rightarrow x^2 \neq x + 1$

اذن الدالة f لا تساوي الدالة h.

تعريف (الدوال الفردية والزوجية):-

أ. يقال عن الدالة h أنها دالة زوجية اذا حقق الشرط التالي :-

$$h(-x) = h(x), \quad \forall x, -x \in D_h$$

ب. يقال عن الدالة h أنها دالة فردية اذا حقق الشرط التالي :-

$$h(-x) = -h(x), \quad \forall x, -x \in D_h$$

مثال1:

هل ان الدالة f التالية فردية ام زوجية بحيث ان

$$f: R \longrightarrow R, \quad f(x) = x^2 - \frac{1}{2}$$

ومن الدوال الجبرية:-

1 - الدالة الثابتة:

تعرف الدالة f على انها ثابتة اذا كانت عدد حقيقي ثابت لكل قيم x.

$$f(x) = c, \ \forall x \in R$$

خواص الدالة الثابتة

- $D_f = R$ معرفة لكل الاعداد الحقيقية
- $D_f = \{a\}$ المدى هو قيمة واحدة فقط.
- $f(x) = f(-x)$ دالة زوجية.
- تمثل بخط مستقيم يقطع محور y ويوازي محور x.

مثال1:-

$$f(x) = 1, \forall x \in R$$

مثال2:-

$f(x) = 3, \forall x \in R$ اي ان الدالة f تبقى ثابتة لكل قيم x.

2 - الدالة الخطية:

نقول على الدالة f على انها خطية اذا كانت متعددة حدود من الدرجة الاولى.

$$f: R \longrightarrow R, \ \ f(x) = ax + b, \ \forall x \in R, \ \ a, b \in R, \ a \neq 0$$

حيث ان $f(x)$ يمثل المتغير المعتمد و x يمثل المتغير المستقل و a,b ثوابت الدالة الخطية.

خواص الدالة الخطية

- $D_f = R$ معرفة لكل الاعداد الحقيقية.
- $R_f = R$ اذا كانت $a \neq 0$.
- ليست فردية ولا زوجية.

مثال 1: $f(x) = 2x, \forall x \in R$

مثال 2: $f(x) = x + 3, \forall x \in R$

3 - الدالة التربيعية:

نقول على الدالة f على انها تربيعة اذا كانت متعددة حدود من الدرجة الثانية.

حيث ان f(x) يمثل المتغير المعتمد و x يمثل المتغيرالمستقل و a,b,c ثوابت الدالة التربيعية.

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \ \forall x \in R, \ \ a, b, c \in R, \ a \neq 0$$

خواص الدالة التربيعية

- $D_f = R$ معرفة لكل الاعداد الحقيقية.
- $R_f \neq R$.
- تكون الدالة زوجية اذا كانت b =0.

مثال 1: $f(x) = x^2, \forall x \in R$

مثال 2: $f(x) = 2x^2 - 5x + 6, \forall x \in R$

4 - الدالة الكسرية:

نقول على الدالة f على انها كسرية أو نسبية اذا كانت على شكل كسر بسطه ومقامه متعددة حدود.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0}, \ \ \forall x \in R, Q(x) \neq 0$$

خواص الدالة الكسرية

- المجال D_f للدالة الكسرية هو جميع قيم R التي لاتجعل المقام مساويا الى الصفر.
- ليست فردية ولا زوجية.