قسم الاحصاء / المرحلة الثانية

المعادلات التفاضلية

مفهوم المعادلة التفاضلية

هي علاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل او مجموعة من المتغيرات المستقلة ترفق فيها المشتقات او التفاضلات. هناك نوعين من المعادلة التفاضلية هي:

1- المعادلة التفاضلية الاعتيادية Ordinary Differential Equation
تسمى المعادلة التفاضلية اعتيادية اذا كان المتغير التابع دالة في متغير مستقل واحد وبالتالي لا تحتوي الا على مشتقات عادية.

امثلة:

ليكن x المتغير المستقل و y المتغير التابع فالعلاقات التالية تمثل معادلات تفاضلية اعتيادية

1) $\frac{dy}{dx} + y = 3x^2$

2) $x\frac{d^3y}{dx^3} + (2\sin x)\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} = (3 - x^2)y$

3) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$

4) $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$

2- المعادلة التفاضلية الجزئية Partial Differential Equation
تسمى المعادلة التفاضلية جزئية اذا كان المتغير التابع دالة لاكثر من متغير مستقل اي تظهر فيها المشتقات الجزئية.

Scanned by TapScanner

امثلة :

ليكن U المتغير التابع و x, y, z المتغيرات المستقلة فالعلاقات التالية هي معادلات تفاضلية جزئية

5) $\frac{\partial U}{\partial x} + 3\frac{\partial U}{\partial y} = 0$

6) $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = f(x,y,z)$

7) $x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 3y\frac{\partial U}{\partial x} + (x - y^2)U = 0$

ملاحظة :

نستخدم اشارة الفتحة المائلة (/) للدلالة على المشتقة مثلاً :

المشتقة الاولى المتغير y بالنسبة الى x هي $y' = \frac{dy}{dx}$

المشتقة الثانية تكتب $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

المشتقة الثالثة تكتب $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$

المشتقة الرابعة تكتب $y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4}$

وهكذا تكتب المشتقات العليا وفق الصيغة

$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$

Scanned by TapScanner

رتبة المعادلة التفاضلية

تتحدد رتبة المعادلة التفاضلية من خلال اعلى مشتقة داخلة فيها فاذا كانت المشتقة النونية $y^{(n)}$ هي اعلى مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية فأن المعادلة التفاضلية تكون من الرتبة n.

درجة المعادلة التفاضلية

هي الأس الممنوع بها اعلى مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية.

مثال: اوجد رتبة ودرجة المعادلات التفاضلية التالية

1) $\frac{dy}{dx} + y = 3x^2$

معادلة تفاضلية اعتيادية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى

2) $y''' + y'' = xy$

اعلى مشتقة

معادلة تفاضلية من الرتبة الثالثة والدرجة الاولى

3) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + \frac{d^2y}{dx^2} = x$

اعلى مشتقة

معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية والدرجة الاولى

Scanned by TapScanner

4) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x\left(\frac{dy}{dx}\right) + x^2y^3 = e^x \sin x$

اعلى مشتقة

معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية والدرجة الثالثة.

5) $y''' + 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3\frac{d^2y}{dx^2} = 5x^9 + 7$

اعلى مشتقة

معادلة تفاضلية من الرتبة الثالثة والدرجة الاولى.

ملاحظة:

درجة المعادلة التفاضلية يجب ان تكون عدد صحيح موجب اي ليست كسر او جذر اذا كانت المعادلة تتضمن أس كسري او جذر يجب التخلص منها للوصول الى درجة المعادلة التفاضلية.

مثال

$$(y^{(5)})^{\frac{3}{4}} + 2xy' = 3$$

$$(y^{(5)})^{\frac{3}{4}} = 3 - 2xy'$$

نرفع طرفي المعادلة الى الأس (4)

$$\left((y^{(5)})^{\frac{3}{4}}\right)^4 = (3 - 2xy')^4$$

عند الرفع نضرب الأسس

$$\therefore (y^{(5)})^3 = (3 - 2xy')^4$$

∴ معادلة تفاضلية من الرتبة الخامسة والدرجة الثالثة.

Scanned by TapScanner

3

مثال ١:

$$(y'')^{1/2} + 1 = y'$$

$$(y'')^{1/2} = y' - 1$$

نرفع طرفي المعادلة اكس الأس (2)

$$((y'')^{1/2})^2 = (y' - 1)^2$$

$$\therefore (y'')^1 = (y' - 1)^2$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية والدرجة الاولى.

مثال ٢:

$$\sqrt{(x^2 - y')} = \sqrt{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4}$$

$$(x^2 - y')^{1/2} = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

نرفع طرفي المعادلة اكس الأس (2)

$$((x^2 - y')^{1/2})^2 = \left(\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right)^2$$

$$(x^2 - y')^1 = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية والدرجة الرابعة.

Scanned by TapScanner

مثال:

$$\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{1/2}+3\frac{d^2y}{dx^2}+xy=0$$

$$\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{1/2}=-3\frac{d^2y}{dx^2}-xy$$

نرفع طرفي المعادلة الى الأس 2

$$\left[\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{1/2}\right]^2=\left(-3\frac{d^2y}{dx^2}-xy\right)^2$$

$$\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^1=9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+6\frac{d^2y}{dx^2}xy+x^2y^2$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية والدرجة الثانية.

Scanned by TapScanner