حل المعادلة التفاضلية

حل المعادلة التفاضلية يكون من خلال ايجاد دالة او علاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل $y = y(x)$ تسمى هذه الدالة او العلاقة حلاً للمعادلة التفاضلية $F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$ اذا كانت :-

1- الدالة او العلاقة خالية من الاشتقاق كما تكون قابلة للاشتقاق n من المرات .

2- الدالة او العلاقة تحقق المعادلة التفاضلية
$F(x, y'(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$

خطوات حل المعادلة التفاضلية :

1- نشتق الدالة او العلاقة التي تقطرحي السؤال على اساس رتبة المعادلة التفاضلية التي ايضاً تقطرحي السؤال اي اذا كانت المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولى نشتق الدالة او العلاقة مرة واحدة واذا كانت المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية نشتق العلاقة مرتين وهكذا .

2- نعوض في المعادلة التفاضلية ما تم الحصول عليه من اشتقاق العلاقة او الدالة في الخطوة السابقة .

3- اذا تساوى الطرف الايسر مع الطرف الايمن للمعادلة التفاضلية نستنتج ان العلاقة او الدالة تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية أما اذا لم يتساوى الطرفين للمعادلة التفاضلية فأن العلاقة لا تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية .

Scanned by TapScanner

مثال: بين ان $y = x^2 + 3x$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية

$$xy' = x^2 + y$$

الحل:

①

$$xy' = x^2 + y$$

الطريقة

ان المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولى اي سوف يتم اشتقاق الدالة مرة واحدة فقط.

$$y = x^2 + 3x$$

$$y' = 2x + 3$$

② نعوض في المعادلة التفاضلية ماتم الحصول عليه من اشتقاق الدالة

$$xy' = x^2 + y$$

$$x(2x+3) = x^2 + x^2 + 3x$$

$$2x^2 + 3x = 2x^2 + 3x$$

③ بما ان الطرف الايمن للمعادلة التفاضلية يساوي الطرف الايسر اذن العلاقة تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية.

Scanned by TapScanner

5

مثال: هل العلاقة $y = x^3 + x - 7$ حل للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

الحل:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

الحل مشتقة

اذن المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية اي سوف يتم اشتقاق العلاقة مرتين

$$y = x^3 + x - 7$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

نعوض في المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

$$6x = 6x$$

اذن العلاقة تمثل حل للمعادلة التفاضلية.

Scanned by TapScanner

مثال: اثبت أن الدالة $y = 2e^x + 3x$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية $y''(1-x) + y'x - y = 0$.

الحل:

$$y''(1-x) + y'x - y = 0$$

الكلمة مشتقة

اذن المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية

$$y = 2e^x + 3x$$

$$y' = 2e^x + 3$$

$$y'' = 2e^x$$

نعوض في المعادلة التفاضلية.

$$y''(1-x) + y'x - y = 0$$

$$2e^x(1-x) + (2e^x + 3)x - (2e^x + 3x) = 0$$

$$2e^x - 2e^x x + 2e^x x + 3x - 2e^x - 3x = 0$$

$$0 = 0$$

اذن الدالة تمثل حل المعادلة التفاضلية

Scanned by TapScanner

٥

مثال: هل أن الدالة $y = 2\sin 2x + 3\cos 2x$ تمثل حل المعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 1$.

الحل:

$$y'' + 4y = 1$$

نشتق

اذن المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية

$$y = 2\sin 2x + 3\cos 2x$$

$$y' = 2(\cos 2x \cdot 2) + 3(-\sin 2x \cdot 2)$$

$$y' = 4\cos 2x - 6\sin 2x$$

$$y'' = 4(-\sin 2x \cdot 2) - 6(\cos 2x \cdot 2)$$

$$y'' = -8\sin 2x - 12\cos 2x$$

نعوض في المعادلة التفاضلية

$$y'' + 4y = 1$$

$$-8\sin 2x - 12\cos 2x + 4(2\sin 2x + 3\cos 2x) = 1$$

$$-8\sin 2x - 12\cos 2x + 8\sin 2x + 12\cos 2x = 1$$

$$0 \neq 1$$

اذن الدالة لا تمثل حل للمعادلة التفاضلية

Scanned by TapScanner