المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى

يكون الشكل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى وفق الصيغة :-

$$y' = \frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

او وفق الصيغة :

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

لحل مثل هذه المعادلات نستخدم احدى الطرق التالية :-

١- طريقة فصل المتغيرات

هي المعادلة التي يمكن فيها فصل متغير x على حدة ومتغير y على حدة بحيث تكون مكتوبة وفق الشكل التالي :-

$$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$$

حيث ان $f(x)$ دالة في x فقط و $g(y)$ دالة في y فقط وكل المعادلة بعد عملية الفصل نستخدم التكامل المباشر :-

$$\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = C$$

Scanned by TapScanner

مثال: حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{x}{y}$

الحل:

نفصل متغيرات المعادلة كل متغير لوحده

$$y' = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$y\,dy = x\,dx$$

نأخذ تكامل كل طرف للمعادلة نكامل كل طرف بحد

$$\int y\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$$

هذا الحل العام للمعادلة التفاضلية.

Scanned by TapScanner

مثال: اوجد الحل العام والحل الذي يحقق المعادلة التفاضلية

$$e^x \cos y \, dx + (1+e^x) \sin y \, dy = 0$$

حيث ما $y(0) = 0$

الحل:

نفصل متغيرات المعادلة

$$e^x \cos y \, dx + (1+e^x) \sin y \, dy = 0$$

نقسم طرفي المعادلة على

$$\cos y (1+e^x)$$

$$\frac{e^x}{1+e^x} dx + \frac{\sin y}{\cos y} dy = 0$$

بالتكامل المباشر

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx + \underbrace{\int \frac{\sin y}{\cos y} dy}_{\text{نضرب } \frac{-1}{-1} \text{ لتوفير المشتقة}} = 0$$

$$\ln(1+e^x) - \ln|\cos(y)| = \ln c$$

$$\ln \frac{1+e^x}{|\cos y|} = \ln c$$

نرفع كمدلول للدالة الأسية للتخلص من $\ln$

$$e^{\ln \frac{1+e^x}{|\cos y|}} = e^{\ln c}$$

$$\frac{1+e^x}{|\cos y|} = c$$

Scanned by TapScanner

$1 + e^x = c\,|\cos y|$ ----> نعوض الحل العام

$x = 0 , y = 0$ نعوض

$1 + \underbrace{e^0}_{1} = c\,|\underbrace{\cos 0}_{1}|$

$\therefore c = 2$

نعوض قيمة $c = 2$ في الحل العام للحصول على الحل الخاص

$1 + e^x = 2\,|\cos y|$ ----> الحل الخاص

Scanned by TapScanner

• مثال: اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' + e^x y = e^x y^2$

الحل:

نفصل متغيرات المعادلة

$$y' + e^x y = e^x y^2$$

$$y' = e^x y^2 - e^x y$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x (y^2 - y)$$

$$e^x (y^2 - y)\, dx = dy$$

نقسم طرفي المعادلة على $y^2 - y$

$$e^x\, dx = \frac{1}{y^2 - y}\, dy$$

$$e^x\, dx = \frac{1}{y(y-1)}\, dy$$

$$e^x\, dx = \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right) dy$$

بالتكامل المباشر

$$\int e^x\, dx = \int \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\, dy$$

$$e^x = \ln|y-1| - \ln|y| + C$$

تمثل الحل العام للمعادلة.

Scanned by TapScanner

مثال: حل المعادلة التفاضلية

$$y' - 3x^2\sqrt{y} = 0$$

الحل:

$$y' - 3x^2\sqrt{y} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - 3x^2 y^{1/2} = 0$$

نضرب طرفي المعادلة في dx

$$dy - 3x^2 y^{1/2} dx = 0$$

نقسم طرفي المعادلة على $y^{1/2}$

$$\frac{dy}{y^{1/2}} - 3x^2 dx = 0$$

بالتكامل المباشر

$$\int \frac{1}{y^{1/2}} dy - \int 3x^2 dx = 0$$

$$\int y^{-1/2} dy - \int 3x^2 dx = 0$$

$$\frac{y^{1/2}}{1/2} - 3\frac{x^3}{3} = C$$

$$2\sqrt{y} - x^3 = C$$

هيك حل المعادلة التفاضلية

Scanned by TapScanner

15

$$x(y+2)y' = (\ln x + 1)$$

حل المعادلة التفاضلية

الحل:

$$x(y+2)y' = (\ln x + 1)$$

$$x(y+2)\frac{dy}{dx} = (\ln x + 1)$$

نضرب طرفي المعادلة في dx

$$x(y+2)\,dy = (\ln x + 1)\,dx$$

نقسم طرفي المعادلة على x

$$(y+2)\,dy = \frac{\ln x + 1}{x}\,dx$$

$$\int (y+2)\,dy = \int \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int (y+2)\,dy = \int ((\ln x)\frac{1}{x} + \frac{1}{x})\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} + 2y = \frac{(\ln(x))^2}{2} + \ln x + c$$

Scanned by TapScanner

مثال: أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$\sin^2 x \cos y\, dx + \sin y \sec x\, dy = 0$$

أكمل:

$$\sin^2 x \cos y\, dx + \sin y \sec x\, dy = 0$$

لفصل كل متغير على حدة نقسم المعادلة على $\frac{1}{\cos y \sec x}$

$$\sin^2 x \frac{1}{\sec x} dx + \sin y \frac{1}{\cos y} dy = 0$$

بالتكامل المباشر

$$\int \sin^2 x \frac{1}{\sec x} dx + \int \sin y \frac{1}{\cos y} dy = 0$$

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \Rightarrow \sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sec x}$$

$$\int (\sin x)^2 \cos x\, dx + \int \sin y \frac{1}{\cos y} dy = 0$$

مشتقة داخل القوس متوفرة — المشتقة متوفرة بضرب $\frac{-1}{-1}$

$$\int (\sin x)^2 \cos x\, dx - \int (-\sin y) \frac{1}{\cos y} dy = 0$$

$$\frac{(\sin x)^3}{3} - \ln|\cos y| = C$$

هذا حل المعادلة التفاضلية.

Scanned by TapScanner