2- المعادلات التفاضلية المتجانسة

يقال ان المعادلة التفاضلية

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

متجانسة اذا كان كل من M, N دالة متجانسة من نفس الدرجة.

تكون الدالة $f(x,y)$ متجانسة من الدرجة n $(n=0,1,2,3,\dots)$ اذا حققت الشرط التالي:

$$f(tx, ty) = t^n f(x,y)$$

n تسمى درجة التجانس.

لمعرفة اي معادلة اذا قمنا بأستبدال كل x بـ tx وكل y بـ ty فيقبل المعادلة دون تغيير نستنتج ان الدوال M, N متجانسة, بالتالي تكون المعادلة التفاضلية متجانسة ونحل بطريقة الفرض ثم فصل المتغيرات واتكامل العبارة.

مثال: حل المعادلة التفاضلية $x y' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$.

الحل:

كتابة المعادلة التفاضلية التي تقطع السؤال وفق الشكل

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$$x y' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$$

$$x \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$

نضرب طرفي المعادلة في dx

$$x\,dy = (\sqrt{x^2 - y^2} + y)\,dx$$

Scanned by TapScanner

$$\underbrace{(\sqrt{x^2-y^2}+y)\,dx}_{M(x,y)} \underbrace{-x\,dy}_{N(x,y)} = 0$$

نقوم بإجراء اختبار التجانس لكل دالة على حدة

$$M(tx,ty) = \sqrt{t^2x^2-t^2y^2}+ty$$

$$= \sqrt{t^2(x^2-y^2)}+ty$$

$$= t\sqrt{x^2-y^2}+ty$$

$$= t\,(\sqrt{x^2-y^2}+y) = t^1 M(x,y)$$

بما انه تم التوصل الى نفس الدالة $M(x,y)$ اذن الدالة $M(x,y)$ متجانسة من الدرجة الاولى (لان t أسها واحد).

$$N(tx,ty) = -tx$$

$$= t(-x) = t^1 N(x,y)$$

بما انه تم التوصل الى نفس الدالة اذن الدالة $N(x,y)$ متجانسة من الدرجة الاولى.

بما ان الدالتين متجانستين ومن نفس الدرجة اذن المعادلة التفاضلية متجانسة نحصل كالمعتاد كما ذكرنا في الفرض وفصل المتغيرات واخيرا التكامل المباشر.

Scanned by TapScanner

17

$$(\sqrt{x^2-y^2} + y)\,dx - x\,dy = 0$$

Let $y = vx \Rightarrow dy = v\,dx + x\,dv$

نشتق ونشتق بـ v $\Rightarrow v = \frac{y}{x}$

نعوض في المعادلة الفاضلية الاصلية ونقوم بفصل المتغيرات

$$(\sqrt{x^2-(vx)^2} + vx)\,dx - x(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$(\sqrt{x^2-v^2x^2} + vx)\,dx - x(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$\sqrt{x^2-v^2x^2}\,dx + vx\,dx - xv\,dx - x^2\,dv = 0$$

$$\sqrt{x^2(1-v^2)}\,dx - x^2\,dv = 0$$

$$x\sqrt{1-v^2}\,dx - x^2\,dv = 0$$

هنا نفصل المتغيرات نقسم مرة على x^2 ونقسم مرة على $\sqrt{1-v^2}$ او نقسم مرة واحدة على $(x^2\sqrt{1-v^2})$.

$$\frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,dv = 0$$

بالتكامل الحدي

$$\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,dv = 0$$

$\sin^{-1}(v)$ تكامل

Scanned by TapScanner

$$Ln|x| - \sin^{-1}(v) = C$$

نعوض عن $v = \frac{y}{x}$ للتوصل الى الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$Ln|x| - \sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = C$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{yx}$$

$$xy\,dy = (y^2 - x^2)\,dx$$

$$(y^2 - x^2)\,dx - xy\,dy = 0$$

$M(x,y)$ $\quad$ $N(x,y)$

نقوم بإجراء اختبار التجانس للبسط

$$M(tx,ty) = t^2y^2 - t^2x^2 = t^2(y^2 - x^2) = t^2 M(x,y)$$

$$N(tx,ty) = -txty = t^2(-xy) = t^2 N(x,y)$$

بما ان البسط متجانسة من الدرجة الثانية اذن المعادلة التفاضلية متجانسة

$$(y^2 - x^2)dx - xy\,dy = 0$$

$$\text{Let } y = vx \Rightarrow dy = v\,dx + x\,dv$$

$$\Rightarrow v = \frac{y}{x}$$

Scanned by TapScanner

- نعوض في المعادلة الفاضلية ثم نقوم بفصل المتغيرات

$$(y^2 - x^2)\,dx - xy\,dy = 0$$

$$((vx)^2 - x^2)\,dx - x(vx)(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$(v^2x^2 - x^2)\,dx - x^2v\,(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$x^2(v^2 - 1)\,dx - x^2(v^2\,dx + vx\,dv) = 0$$

نقسم على x^2

$$(v^2 - 1)\,dx - v^2\,dx - vx\,dv = 0$$

$$v^2\,dx - dx - v^2\,dx - vx\,dv = 0$$

$$[-dx - vx\,dv = 0] * -1$$

$$dx + vx\,dv = 0$$

لفرض فصل المتغيرات نقسم المعادلة على x

$$\frac{1}{x}\,dx + v\,dv = 0$$

بالتكامل الحد تحد

$$\int \frac{1}{x}\,dx + \int v\,dv = 0$$

$$\ln|x| + \frac{v^2}{2} = C$$

نعوض عن $v = \frac{y}{x}$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\,\frac{y^2}{x^2} = C$$

هيك اكل الحل للمعادلة التفاضلية.

Scanned by TapScanner

مثال: حل المعادلة التفاضلية $(x^2+y^2)dx - 2xy\,dy = 0$

الحل:

$$\underbrace{(x^2+y^2)}_{M(x,y)}dx \underbrace{- 2xy}_{N(x,y)}dy = 0$$

لمعرفة اختبار الجانس للدالتين

$$M(tx,ty) = t^2x^2 + t^2y^2 = t^2(x^2+y^2) = t^2M(x,y)$$

∴ الدالة متجانسة من الدرجة الثانية.

$$N(tx,ty) = -2tx\,ty = t^2(-2xy) = t^2N(x,y)$$

∴ الدالة متجانسة من الدرجة الثانية.

وبالتالي تكون المعادلة التفاضلية متجانسة.

$$(x^2+y^2)dx - 2xy\,dy = 0$$

$$\text{Let } y = vx \Rightarrow dy = v\,dx + x\,dv$$

$$\Rightarrow v = \frac{y}{x}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية

$$(x^2+v^2x^2)dx - 2x(vx)(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$(x^2+v^2x^2)dx - 2x^2(v^2dx + vx\,dv) = 0$$

$$x^2(1+v^2)dx - 2x^2(v^2dx + vx\,dv) = 0$$

نقسم على x^2

$$(1+v^2)dx - 2(v^2dx + vx\,dv) = 0$$

$$dx + v^2dx - 2v^2dx - 2vx\,dv = 0$$

Scanned by TapScanner

19

$$dx - v^2 dx - 2vx\,dv = 0$$

$$(1-v^2)\,dx - 2vx\,dv = 0$$

نقسم على $x(1-v^2)$

$$\frac{1}{x}dx - \frac{2v}{(1-v^2)}dv = 0$$

بالتكامل الحدّ

$$\int \frac{1}{x}dx - \underbrace{\int \frac{2v}{1-v^2}dv}_{\text{نعوض بالاشارة -}} = 0$$

للمؤشر لأن مشتقة اكبر

$$\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{-2v}{1-v^2}dv = 0$$

$$\ln|x| + \ln|1-v^2| = C$$

$$\ln|x| + \ln\left|1-\frac{y^2}{x^2}\right| = C$$

هذا حل المعادلة التفاضلية المعطاة.

Scanned by TapScanner