3- المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الكثيرة

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

اذا كانت كل من دالتي M, N عبارة عن دالة خطية في x, y اي تكون

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

حيث $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ ثوابت

فأن حل المعادلة التفاضلية من هذا النوع يكون من خلال البحث فيما اذا كان المستقيمان

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

يتقاطعان ام لا يتقاطعان.

الحالة الاولى:

اذا كان المستقيمان

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

يتقاطعان اذا تحقق الشرط

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \quad -1$$

2- حل معادلتي المستقيمين انياً لايجاد نقطة التقاطع (h,k) التي تمثل (x,y)

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Scanned by TapScanner

3- نفرض $X = x_1 + h \Rightarrow dX = dx_1$

$y = y_1 + k \Rightarrow dy = dy_1$

4- نعوض ما فرضناه في الخطوة السابقة في المعادلة التفاضلية لنحصل على معادلة تفاضلية متجانسة نحل وفق طريقة حل المعادلات التفاضلية المتجانسة.

الحالة الثانية

إذا كان المستقيمان:

$a_1 X + b_1 y + c_1 = 0$

$a_2 X + b_2 y + c_2 = 0$

متوازيان إذا تحقق الشرط

1- $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$

2- نفرض Z تساوي المعادلة التفاضلية

$Z = a_1 X + b_1 y$

ثم نشتق بالنسبة لـ x

$dZ = a_1 dX + b_1 dy$

نجد dy

$dZ - a_1 dX = b_1 dy$

$\therefore dy = \frac{dZ - a_1 dX}{b_1}$

Scanned by TapScanner

٦ نوجد قيمة y, dy في المعادلة التفاضلية كحل لكل معادلة تفاضلية يمكن فصل متغيراتها.

مثال:

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$(2x-3y+4)dx + (3x-2y+1)dy = 0$$

الحل: المستقيمان

$$2x-3y+4=0$$
$$3x-2y+1=0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4-(-9) = -4+9 = 5 \neq 0 \quad ①$$

∴ المستقيمان متقاطعان لذلك المعادلة التالية للحصول على نقطة التقاطع (h,k)

$$\begin{matrix} [\,2x-3y+4=0\,] * (-3) \\ [\,3x-2y+1=0\,] * 2 \end{matrix} \quad ②$$

نضرب المعادلة الأولى في (-3) ونضرب المعادلة الثانية في (2) ثم نجد معادلتين آنيتين

$$-6x+9y-12=0$$
$$6x-4y+2=0$$

$$5y-10=0 \Rightarrow 5y=10 \Rightarrow y=\frac{10}{5}$$

$$\therefore y=2 \Rightarrow \boxed{k=2}$$

نعوض قيمة y في احد المعادلتين

$2X - 3y + 4 = 0$

$2X - 3(2) + 4 = 0$

$2X - 6 + 4 = 0$

$2X - 2 = 0 \Rightarrow 2X = 2 \Rightarrow X = 1 \Rightarrow h = 1$

اذن نقطة التقاطع $(h,k) = (1,2)$

③ نفرض

let $X = X_1 + h \Rightarrow X = X_1 + 1$

$dX = dX_1$

$y = y_1 + k \Rightarrow y = y_1 + 2$

$dy = dy_1$

نعوضها في المعادلة التفاضلية نحصل على معادلة تفاضلية متجانسة

$(2X - 3y + 4)\,dX + (3X - 2y + 1)\,dy = 0$

$[2(X_1+1) - 3(y_1+2) + 4]\,dX_1 + [3(X_1+1) - 2(y_1+2) + 1]\,dy_1 = 0$

$[2X_1 + 2 - 3y_1 - 6 + 4]\,dX_1 + [3X_1 + 3 - 2y_1 - 4 + 1]\,dy = 0$

$[2X_1 - 3y_1]\,dX_1 + [3X_1 - 2y_1]\,dy_1 = 0$

$M(X,y)$ $\quad$ $N(X,y)$

تم التوصل الى معادلة تفاضلية متجانسة كل أمثلة فعلوات حل المعادلة التفاضلية المتجانسة

Scanned by TapScanner

22

$M(tx_1, ty_1) = 2tx_1 - 3ty_1 = t(2x_1 - 3y_1) = tM(x_1, y_1)$

∴ الدالة متجانسة من الدرجة الأولى.

$N(tx_1, ty_1) = 3tx_1 - 2ty_1 = t(3x_1 - 2y_1) = tN(x_1, y_1)$

∴ الدالة متجانسة من الدرجة الأولى.

∴ المعادلة التفاضلية متجانسة نحل عن طريق فصل المتغيرات

let $y_1 = vx_1$

$v = \frac{y_1}{x_1}$ $dy_1 = v\,dx_1 + x_1\,dv$

نعوض في المعادلة التفاضلية

$(2x_1 - 3y_1)\,dx_1 + (3x_1 - 2y_1)\,dy_1 = 0$

$(2x_1 - 3vx_1)\,dx_1 + (3x_1 - 2vx_1)(v\,dx_1 + x_1\,dv) = 0$

$x_1(2 - 3v)\,dx_1 + x_1(3 - 2v)(v\,dx_1 + x_1\,dv) = 0$

نقسم على x_1

$(2 - 3v)\,dx_1 + (3 - 2v)(v\,dx_1 + x_1\,dv) = 0$

$2\,dx_1 - 3v\,dx_1 + 3v\,dx_1 + 3x_1\,dv - 2v^2\,dx_1 - 2vx_1\,dv = 0$

$2\,dx_1 - 2v^2\,dx_1 + 3x_1\,dv - 2vx_1\,dv = 0$

$2(1 - v^2)\,dx_1 + x_1(3 - 2v)\,dv = 0$

نقسم على $(1 - v^2)x_1$

Scanned by TapScanner

$$\frac{2}{x_1}\,dx_1 + \frac{3-2v}{1-v^2}\,dv = 0$$

لإيجاد تكامل $\frac{3-2v}{1-v^2}$ نستخدم طريقة التكامل بالكسور الجزئية

نستخدم هذه الطريقة اذا كانا

1- لا يوجد كسر

2- المقام قابل للتحليل

3- درجة البسط اقل من درجة المقام

4- اذا كان $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$ بسط مقام

$$\frac{3-2v}{1-v^2} = \frac{3-2v}{(1-v)(1+v)}$$

$$\frac{3-2v}{(1-v)(1+v)} = \frac{A}{1-v} + \frac{B}{1+v}$$

$$A(1+v) + B(1-v) = 3-2v$$

let $v = 1$

$$A(1+1) + B(1-1) = 3-2(1)$$

$$2A = 3-2 \Rightarrow 2A = 1 \quad \therefore A = \frac{1}{2}$$

let $v = -1$

$$A(1-1) + B(1+1) = 3-2(-1)$$

$$2B = 3+2 \Rightarrow 2B = 5 \quad \therefore B = \frac{5}{2}$$

Scanned by TapScanner

23

$$\frac{2}{x_1}dx_1 + \left(\frac{A}{1-v} + \frac{B}{1+v}\right)dv = 0$$

$$\int \frac{2}{x_1}dx_1 + \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-v} + \frac{\frac{5}{2}}{1+v}\right)dv = 0$$

$$2\int \frac{1}{x_1}dx_1 - \frac{1}{2}\int \frac{-1}{1-v}dv + \frac{5}{2}\int \frac{1}{1+v}dv = 0$$

$$2\ln|x_1| - \frac{1}{2}\ln|1-v| + \frac{5}{2}\ln|1+v| = C$$

$$2\ln|x_1| - \frac{1}{2}\ln\left|1-\frac{y_1}{x_1}\right| + \frac{5}{2}\ln\left|1+\frac{y_1}{x_1}\right| = C$$

نعوض عن

$$x_1 = x - 1$$

$$y_1 = y - 2$$

$$2\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln\left|1-\frac{y-2}{x-1}\right| + \frac{5}{2}\ln\left|1+\frac{y-2}{x-1}\right| = C$$

Scanned by TapScanner

مثال: حل المعادلة التفاضلية

$$y' = \frac{-2x + 3y + 1}{12x - 18y - 1}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x + 3y + 1}{12x - 18y - 1}$$

$$(12x - 18y - 1)dy = (-2x + 3y + 1)dx$$

$$(2x - 3y - 1)dx + (12x - 18y - 1)dy = 0$$

المستقيمان

①

$$2x - 3y - 1 = 0$$
$$12x - 18y - 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 12 & -18 \end{vmatrix} = -36 - (-36) = -36 + 36 = 0$$

اذن المستقيمان متوازيان

② نفرض z هذا المعادلة التفاضلية

$$(2x - 3y - 1)dx + (6(2x - 3y) - 1)dy = 0$$

let $z = 2x - 3y \Rightarrow dz = 2dx - 3dy$

نستخرج dy

Scanned by TapScanner

$$3dy = 2dx - dz$$

$$dy = \frac{2}{3}dx - \frac{1}{3}dz$$

نعوض قيمة dy, z في المعادلة التفاضلية

$$(2x - 3y - 1)dx + (6(2x - 3y) - 1)dy = 0$$

$$(z - 1)dx + (6(z - 1)(\frac{2}{3}dx - \frac{1}{3}dz) = 0$$

$$zdx - dx + 4zdx - 2zdz - \frac{2}{3}dx + \frac{1}{3}dz = 0$$

$$zdx - dx + 4zdx - \frac{2}{3}dx - 2zdz + \frac{1}{3}dz = 0$$

$$(z - 1 + 4z - \frac{2}{3})dx + (\frac{1}{3} - 2z)dz = 0$$

$$(5z - \frac{5}{3})dx + (\frac{1}{3} - 2z)dz = 0$$

نقسم على $(5z - \frac{5}{3})$

$$dx + \frac{\frac{1}{3} - 2z}{5z - \frac{5}{3}}dz = 0$$

* نستخدم القسمة الطويلة كما يكون اس البسط اكبر او يساوي اس المقام

$$dx + \frac{(-2z + \frac{1}{3})}{5z - \frac{5}{3}}dz = 0$$

$-\frac{2}{5}$ ← الناتج

$5z - \frac{5}{3}$ ← المقسوم عليه	$-2z + \frac{1}{3}$
	$-2z + \frac{2}{3}$

$-\frac{1}{3}$ ← الباقي

Scanned by TapScanner

25

(الناتج + $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$)

$$dx + \frac{2}{5}dz + \frac{-\frac{1}{3}}{5z-\frac{5}{3}}dz = 0$$

$$\int dx - \int \frac{2}{5}dz - \frac{1}{3}\int \frac{1}{5z-\frac{5}{3}}dz = 0$$

ناتج المقام
المشتقة (5)
نضرب ونقسم $\frac{5}{5}$

$$\int dx - \frac{2}{5}\int dz - \frac{1}{15}\int \frac{5}{5z-\frac{5}{3}}dz = 0$$

$$x - \frac{2}{5}z - \frac{1}{15}\ln\left|5z-\frac{5}{3}\right| = c$$

نعوض عن $z = 2x-3y$

$$x - \frac{2}{5}(2x-3y) - \frac{1}{15}\ln\left|5(2x-3y)-\frac{5}{3}\right| = c$$

Scanned by TapScanner

مثال: اوجد حل المعادلة التفاضلية التالية

$$(x+2y+3)\,dx - (3x+6y+7)\,dy = 0$$

الحل: المستقيمان

①

$$x + 2y + 3 = 0$$
$$3x + 6y + 7 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$$

اذن المستقيمان متوازيان

② نفرض Z من المعادلة التفاضلية

$$(x+2y+3)dx - (3(x+2y)+7)\,dy = 0$$

let $z = x + 2y$

$$dz = dx + 2\,dy$$

$$dz - dx = 2\,dy$$

$$\therefore dy = \frac{dz - dx}{2}$$

نعوض dy, Z في المعادلة التفاضلية

$$(x+2y+3)dx - (3(x+2y)+7)\,dy = 0$$

$$(z+3)dx - (3z+7)\left(\frac{1}{2}dz - \frac{1}{2}dx\right) = 0$$

Scanned by TapScanner

$$z\,dx + 3\,dx - \frac{3}{2}z\,dz + \frac{3}{2}z\,dx - \frac{7}{2}dz + \frac{7}{2}dx = 0$$

$$z\,dx + 3\,dx + \frac{3}{2}z\,dx + \frac{7}{2}dx - \frac{3}{2}z\,dz - \frac{7}{2}dz = 0$$

$$\left(z + 3 + \frac{3}{2}z + \frac{7}{2}\right)dx - \left(\frac{3}{2}z + \frac{7}{2}\right)dz = 0$$

$$\left(\frac{5}{2}z + \frac{13}{2}\right)dx - \left(\frac{3}{2}z + \frac{7}{2}\right)dz = 0$$

نقسم على $\left(\frac{5}{2}z + \frac{13}{2}\right)$

$$dx - \frac{\left(\frac{3}{2}z + \frac{7}{2}\right)}{\left(\frac{5}{2}z + \frac{13}{2}\right)}dz = 0$$

المقسوم عليه

نقسم المقسوم على المقسوم عليه حتى يكون أس البسط اكبر او يساوي أس المقام.

الناتج

$\frac{3}{5}$

$\frac{5}{2}z + \frac{13}{2}$ ← المقسوم عليه	$\frac{3}{2}z + \frac{7}{2}$
	$\frac{3}{2}z + \frac{39}{10}$
	$-\frac{2}{5}$ ← الباقي

$$\left(\text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}\right)$$

$$dx - \frac{\left(\frac{3}{2}z + \frac{7}{2}\right)}{\left(\frac{5}{2}z + \frac{13}{2}\right)}dz = 0$$

$$dx - \left(\frac{3}{5} + \frac{-\frac{2}{5}}{\frac{5}{2}z + \frac{13}{2}}\right)dz = 0$$

Scanned by TapScanner

27

$$dx - \frac{3}{5}dz + \frac{2/5}{\frac{5}{2}z+\frac{13}{2}}dz = 0$$

لتوفير المشتقة في البسط
نضرب ونقسم على $\frac{5/2}{5/2}$

$$\int dx - \int \frac{3}{5}dz + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\int \frac{5/2}{\frac{5}{2}z+\frac{13}{2}}dz = 0$$

$$x - \frac{3}{5}z + \frac{4}{25}\ln\left|\frac{5}{2}z+\frac{13}{2}\right| = C$$

نعوض عن $z = x+2y$

$$x - \frac{3}{5}(x+2y) + \frac{4}{25}\ln\left|\frac{5}{2}(x+2y)+\frac{13}{2}\right| = C$$

Scanned by TapScanner