4- المعادلات التفاضلية التامة

لتكن الدالة $f(x,y)$ دالة بمتغيرين x, y التفاضل لهذه الدالة سمي بالتفاضل التام

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

اذا كان المقدار الايمن من المعادلة يساوي صفر أي ان

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

فأن المعادلة الناتجة تسمى بالمعادلة التفاضلية التامة حل هذه المعادلة يكون $f(x,y) = C$.

الطريقة الاولى لحل المعادلات التفاضلية التامة:

اذا كان لدينا المعادلة التفاضلية

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

فأن الشرط الضروري حتى تكون المعادلة التفاضلية تامة هو

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Scanned by TapScanner

حتى نحصل على حل المعادلة التفاضلية التامة نتبع الخطوات:-

1- نشتق الدالة M مشتقة جزئية بالنسبة لـ y . $\frac{\partial M}{\partial y}$

ثم نشتق الدالة N مشتقة جزئية بالنسبة لـ x $\frac{\partial N}{\partial x}$

اذا

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

اذن المعادلة تفاضلية تامة.

2- تكامل دالة $M(x,y)$ بالنسبة لـ x نحصل على دالة

$$\int M(x,y)\,dx = f(x,y)$$

ثم تكامل دالة $N(x,y)$ بالنسبة لـ y نحصل على دالة اخرى

$$\int N(x,y)\,dy = g(x,y)$$

3- جمع الدالتين بدون تكرار العدد المتشابهة

$$f(x,y) + g(x,y) = c$$

هيك حل المعادلة التفاضلية التامة.

Scanned by TapScanner

مثال: حل المعادلة التفاضلية

$$\underbrace{(xy^2 - y)}_{M}dx + \underbrace{(x^2y - x)}_{N}dy = 0$$

الحل:

$$M(x,y) = xy^2 - y \quad ①$$
$$N(x,y) = x^2y - x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy - 1$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 1$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

اذن المعادلة التفاضلية تامة

$$\int M(x,y)\,dx = \int (xy^2 - y)\,dx = \frac{x^2y^2}{2} - yx \quad ②$$

$$\int N(x,y)\,dy = \int (x^2y - x)\,dy = \frac{x^2y^2}{2} - xy$$

③ نجمع الدالتين بدون تكرار الحدود المتشابهة

$$\frac{x^2y^2}{2} - yx = C$$

هذا هو الحل للمعادلة التفاضلية التامة.

Scanned by TapScanner

الطريقة الثانية لحل المعادلة التفاضلية التامة :

نقارن صيغة المعادلة التفاضلية بصيغة التفاضل التام

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

نقارن كل الحدود

أولاً :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$$

1- نكامل دالة $M(x,y)$ بالنسبة لـ dx اي y يكون ثابت

$$\int M(x,y)\,dx$$

نحصل على دالة .

$$f(x,y) = \underbrace{\int M(x,y)\,dx}_{\text{نتيجة التكامل}} + h(y)$$

2- نقوم باشتقاق الدالة في الخطوة السابقة بالنسبة لـ y اي x ثابت

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) + h'(y)$$

3- نكامل الدالة التي حصلنا عليها بالخطوة السابقة بالنسبة لـ y للحصول على $h(y)$ ثم نعوضها في معادلة $f(x,y)$ في الخطوة ① للحصول على حل للمعادلة التفاضلية التامة .

Scanned by TapScanner

ثانياً :-

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

1- نكامل الدالة $N(x,y)$ بالنسبة لـ dy اي x يكون ثابت

$$\int N(x,y)\, dy$$

نحصل على دالة

$$f(x,y) = \int N(x,y)\, dy + h(x)$$

2- نقوم باشتقاق الدالة $f(x,y)$ في الخطوة السابقة بالنسبة لـ dx اي y ثابت

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) + h'(x)$$

3- نكامل الدالة التي حصلنا عليها بالخطوة السابقة بالنسبة لـ x للحصول على $h(x)$ ثم نعوضها في معادلة $f(x,y)$ في الخطوة (1) لنحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية التامة.

مثال: حل المعادلة التفاضلية

$$\underbrace{(xy^2 - y)}_{M}\, dx + \underbrace{(x^2 y - x)}_{N}\, dy = 0$$

الحل:

(1) :-

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 2xy - 1 \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 2xy - 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

∴ المعادلة التفاضلية تامة.

Scanned by TapScanner

$$(xy^2 - y)\,dx + (x^2y - x)\,dy = 0$$

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = xy^2 - y \quad (1)$$

$$f(x,y) = \int (xy^2 - y)\,dx$$

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} - yx + h(y)$$

(2) نشتق بالنسبة لـ dy

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^2y}{2} - x + h'(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \underbrace{x^2y - x}_{N(x,y)} + h'(y)$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

$$x^2y - x + h'(y) = x^2y - x$$

$$h'(y) = 0$$

Scanned by TapScanner

④ تكامل $h'(y)$ لمصل على $h(y)$

$$\int h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = C$$

نعوض في معادلة $f(x,y)$

$$\therefore f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} - xy + h(y)$$

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} - xy + C$$

هذا حل المعادلة التفاضلية التامة.

مثال: اوجد الحل للمعادلة التفاضلية

$$\underbrace{(6x^2+4xy+y^2)}_{M}dx+\underbrace{(2x^2+2xy-3y^2)}_{N}dy=0$$

الحل:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y}&=4x+2y\\ \frac{\partial N}{\partial x}&=4x+2y\end{aligned}\right\}\rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial x} \quad ①$$

اذن المعادلة التفاضلية تامة

الطريقة الاولى للحل

$$\int M(x,y)\,dx=\int(6x^2+4xy+y^2)\,dx \quad ②$$

$$=6\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}y+y^2x$$

$$=2x^3+2x^2y+xy^2$$

$$\int N(x,y)\,dy=\int(2x^2+2xy-3y^2)\,dy$$

$$=2x^2y+2x\frac{y^2}{2}-3\frac{y^3}{3}$$

$$=2x^2y+xy^2-y^3$$

③ نجمع الدالتين بدون تكرار الحدود المتشابهة

$$2x^3+2x^2y+xy^2-y^3=C$$

هيك اكل المعادلة التفاضلية التامة.

Scanned by TapScanner

الطريقة الثانية الحل

① كما في الخطوة الاولى من الطريقة الاولى

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\underbrace{(6x^2 + 4xy + y^2)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(2x^2 + 2xy - 3y^2)}_{N(x,y)}dy = 0 \quad ②$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

نقارن المعادلة التفاضلية بصيغة التفاضل التام

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = 6x^2 + 4xy + y^2$$

$$f(x,y) = \int (6x^2 + 4xy + y^2)\,dx$$

$$f(x,y) = 2x^3 + 2x^2y + xy^2 + h(y)$$

③ نشتق المعادلة $f(x,y)$ بالنسبة لـ dy

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 2xy + h'(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = 2x^2 + 2xy - 3y^2$$

Scanned by TapScanner

33

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 2xy + h'(y)$$

$$2x^2 + 2xy - 3y^2 = 2x^2 + 2xy + h'(y)$$

$$\therefore h'(y) = -3y^2$$

④ نكامل $h'(y)$ بالنسبة لـ dy للحصول على $h(y)$ لنعوضها في معادلة $f(x,y)$

$$\int h'(y)\,dy = \int -3y^2\,dy$$

$$h(y) = -3\frac{y^3}{3} + C$$

$$\therefore h(y) = -y^3 + C$$

$$\therefore f(x,y) = 2x^3 + 2x^2y + xy^2 + h(y)$$

$$\therefore f(x,y) = 2x^3 + 2x^2y + xy^2 - y^3 + C$$

هيك اكل المعادلة التفاضلية الكاملة

Scanned by TapScanner

5- المعادلات التفاضلية غير التامة :

في بعض الاحيان تكون المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولى التالية:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

معادلة تفاضلية غير تامة أي أن :-

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

في هذه الحالة يمكن تحويل المعادلة التفاضلية غير التامة الى معادلة تفاضلية تامة عن طريق الضرب في دالة مناسبة $I(x,y)$ تسمى عامل التكامل .

حالات خاصة لعامل التكامل

① $I(x,y) = I(x)$

اي ان I التي تمثل عامل التكامل هي دالة في x فقط .

حتى نجعل لدالة عامل التكامل نطرح المشتقات الجزئية التي ظهرت غير متساوية

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

ثم نقسم كلا N لتصبح كل دالة في x فقط

$$f(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

Scanned by TapScanner

∴ عامل التكامل يكون وفق الصيغة

$$I = e^{\int f(x)\,dx}$$

بعد ذلك نعوض عن المعادلة التفاضلية في عامل التكامل لنحصل على المعادلة تفاضلية تامة نحل وفق خطوات حل المعادلات التفاضلية التامة.

② $I(x,y) = I(y)$

أي ان I الذي تمثل عامل التكامل هي دالة في y فقط.

حيث نحصل على عامل التكامل ايضاً نطرح المشتقات الجزئية التي ظهرت غير متساوية

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

ثم نقسم على M لتحصل على دالة في y فقط

$$f(y) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M}$$

∴ عامل التكامل يكون وفق الصيغة

$$I = e^{-\int f(y)\,dy}$$

بعد ذلك نضرب طرفي المعادلة التفاضلية في عامل التكامل لنحصل على معادلة تفاضلية تامة.

Scanned by TapScanner

مثال: اوجد حل المعادلة التفاضلية

$$\underbrace{(3x^3+2y)}_{M}dx+\underbrace{(2x\ln x+\frac{3x}{y})}_{N}dy=0$$

الحل:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x}=2x\cdot\frac{1}{x}+\ln x\,(2)+\frac{3}{y}$$

$$=2+2\ln x+\frac{3}{y}$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

∴ المعادلة التفاضلية غير تامة

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=x-x-2\ln x-\frac{3}{y}$$

$$=-(2\ln x+\frac{3}{y})\neq 0$$

نقسم على دالة N

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{-(2\ln x+\frac{3}{y})}{x(2\ln x+\frac{3}{y})}=\frac{-1}{x}=f(x)$$

∴ عامل التكامل

$$I=e^{\int f(x)dx}=e^{\int -\frac{1}{x}dx}$$

$$=e^{-\ln x}=e^{\ln x^{-1}}=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}$$

اذن نضرب طرفي المعادلة التفاضلية غير التامة في عامل التكامل I لتصبح اكأ معادلة تفاضلية تامة.

Scanned by TapScanner

$$(3x^3+2y)\,dx + (2x\ln x + \frac{3x}{y})\,dy = 0$$

$$\frac{3x^3+2y}{x}\,dx + \frac{2x\ln x + \frac{3x}{y}}{x}\,dy = 0$$

$$(3x^2 + \frac{2y}{x})\,dx + (2\ln x + \frac{3}{y})\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2}{x} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2\cdot\frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

اذن المعادلة التفاضلية تامة وفق اي طريقة نناقش حل المعادلات التفاضلية التامة.

الطريقة الاولى:

$$\int M(x,y)\,dx = \int (3x^2 + \frac{2y}{x})\,dx$$

$$= 3\frac{x^3}{3} + 2y\ln x$$

$$= x^3 + 2y\ln x$$

$$\int N(x,y)\,dy = \int (2\ln x + \frac{3}{y})\,dy$$

$$= 2y\ln x + 3\ln y$$

نجمع الحدود بدون تكرار الحدود المتشابهة

$$\therefore x^3 + 2y\ln x + 3\ln y = C$$

Scanned by TapScanner

الطريقة الثانية

نقارن المعادلة التفاضلية بصيغة التفاضل التام

$$(3x^2 + \frac{2y}{x})dx + (2\ln x + \frac{3}{y})dy = 0$$

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = 3x^2 + \frac{2y}{x}$$

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx = \int (3x^2 + \frac{2y}{x})\,dx$$

$$= x^3 + 2y\ln x + h(y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2\ln x + h'(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = 2\ln x + \frac{3}{y}$$

$$\therefore 2\ln x + \frac{3}{y} = 2\ln x + h'(y)$$

نكامل بالنسبة لـ y

$$\int \frac{3}{y}\,dy = \int h'(y)\,dy$$

Scanned by TapScanner

$$3\ln y + C = h'(y)$$

نعوض في معادلة $f(x,y)$

$$f(x,y) = x^3 + 2y\ln x + h(y)$$

$$= x^3 + 2y\ln x + 3\ln y + C$$

وهيك حل لمعادلة التفاضلية التامة.

Scanned by TapScanner

37

مثال: اوجد حل المعادلة التفاضلية

$$y(2x+y)\,dx + (3x^2+4xy-y)\,dy = 0$$

الحل:

$$\underbrace{(2xy+y^2)\,dx}_{M} + \underbrace{(3x^2+4xy-y)\,dy}_{N} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x+2y \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 6x+4y$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

∴ المعادلة التفاضلية غير تامة.

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2x+2y-6x-4y$$

$$= -4x-2y = -2(2x+y)$$

نقسم على دالة M

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = \frac{-2(2x+y)}{y(2x+y)} = \frac{-2}{y} = f(y)$$

∴ عامل التكامل

$$I = e^{-\int f(y)\,dy} = e^{-\int -\frac{2}{y}\,dy}$$

$$= e^{2\ln y} = e^{\ln y^2} = y^2$$

اذن نضرب طرفي المعادلة التفاضلية في y^2 لتصبح تامة

Scanned by TapScanner

$$[(2xy + y^2)dx + (3x^2 + 4xy - y)dy = 0] * y^2$$

$$(2xy^3 + y^4)dx + (3x^2y^2 + 4xy^3 - y^3)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2 + 4y^3$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2 + 4y^3$$

$$\rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

∴ المعادلة التفاضلية تامة

$$\int M(x,y)\,dx = \int (2xy^3 + y^4)\,dx$$

$$= \frac{2x^2y^3}{2} + xy^4 = x^2y^3 + xy^4$$

$$\int N(x,y)\,dy = \int (3x^2y^2 + 4xy^3 - y^3)\,dy$$

$$= \frac{3x^2y^3}{3} + \frac{4xy^4}{4} - \frac{y^4}{4}$$

$$= x^2y^3 + xy^4 - \frac{1}{4}y^4$$

نجمع الدالتين بدون تكرار الحدود المتشابهة لنحصل على حل المعادلة التفاضلية التالية

$$x^2y^3 + xy^4 - \frac{1}{4}y^4 = C$$

Scanned by TapScanner