6- المعادلات التفاضلية الخطية

تكون المعادلة التفاضلية خطية اذا كان المتغير التابع ومشتقاته في المعادلة من الدرجة الاولى ويكون هناك حالتين او شكلين للمعادلة التفاضلية الخطية:

الحالة الاولى تكون المعادلة التفاضلية خطية في y

① يكون الشكل العام للمعادلة التفاضلية الخطية كالاتي:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

② نجد كامل التكامل وفق الصيغة

$$I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

③ التعويض في المعادلة التالية للحصول على الحل للمعادلة التفاضلية الخطية في y

$$I(x)\,y = \int I(x)\,Q(x)\,dx + C$$

$$y = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)\,Q(x)\,dx + C\right]$$

Scanned by TapScanner

الحالة الثانية تكون المعادلة التفاضلية خطية في x

① يكون الشكل العام للمعادلة التفاضلية الخطية:

$$\frac{dx}{dy} + P(y)\,x = \Phi(y)$$

② نجد عامل التكامل وفق الصيغة

$$I(y) = e^{\int P(y)\,dy}$$

③ نعوض في المعادلة التالية للحصول على حل للمعادلة التفاضلية الخطية في x

$$x = \frac{1}{I(y)}\left[\int I(y)\,\Phi(y)\,dy + C\right]$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية

$$y' + \frac{y}{x} - x^2 = -3$$

الحل:

①

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} - x^2 = -3$$

∴ المعادلة تتضمن $\frac{dy}{dx}$ إذن خطية في y نرتب المعادلة وفق الصيغة

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = \Phi(x)$$

Scanned by TapScanner

39

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = x^2 - 3$$

$$P(x) = \frac{1}{x} \qquad Q(x) = x^2 - 3$$

② نجد عامل التكامل

$$I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

$$= e^{\int \frac{1}{x} dx} \qquad = e^{\ln x} = x$$

③ نعوض في المعادلة

$$y = \frac{1}{I(x)} \left[\int I(x)\, Q(x)\, dx + C \right]$$

$$y = \frac{1}{x} \left[\int x(x^2 - 3)\, dx + C \right]$$

$$y = \frac{1}{x} \left[\int x^3 - 3x \, dx + C \right]$$

$$y = \frac{1}{x} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + C \right]$$

$$\therefore y = \frac{1}{4} x^3 - \frac{3}{2} x + C x^{-1}$$

هيك هي المعادلة التفاضلية الكلية في y .

Scanned by TapScanner

مثال: حل المعادلة التفاضلية

$$y\,dx + x\,dy = (xy^4 + y^3)\,dy$$

الحل:

نقسم المعادلة على dy

$$y\frac{dx}{dy} + x = xy^4 + y^3 \quad ①$$

∴ المعادلة تحتوي $\frac{dx}{dy}$ إذن فطبق في x بترتيب المعادلة وفق الصيغة

$$\frac{dx}{dy} + P(y)\,x = \varphi(y)$$

نقسم على y

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = \frac{xy^4 + y^3}{y}$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = \frac{y(xy^3 + y^2)}{y}$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = xy^3 + y^2$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x - xy^3 = y^2$$

$$\frac{dx}{dy} + \left(\frac{1}{y} - y^3\right)x = y^2$$

$$P(y) = \frac{1}{y} - y^3 \qquad \varphi(y) = y^2$$

Scanned by TapScanner

40

② نجد عامل التكامل

$$I(y) = e^{\int P(y)\,dy} \qquad \int \left(\frac{1}{y} - y^3\right) dy$$

$$= e^{\ln y - \frac{y^4}{4}} \qquad = e^{\ln y} \cdot e^{-\frac{y^4}{4}}$$

$$I(y) = y\, e^{-\frac{y^4}{4}}$$

③ نعوض في المعادلة

$$x = \frac{1}{I(y)} \left[\int I(y)\, Q(y)\, dy + c\right]$$

$$x = \frac{1}{y e^{-\frac{y^4}{4}}} \left[\int y e^{-\frac{y^4}{4}} \cdot y^2\, dy + c\right]$$

$$x = \frac{1}{y e^{-\frac{y^4}{4}}} \left[\int y^3 e^{-\frac{y^4}{4}}\, dy + c\right]$$

توفير اعشقة نتاج قفة اسبيه

$$x = \frac{1}{y e^{-\frac{y^4}{4}}} \left[-\int -y^3\, e^{-\frac{y^4}{4}}\, dy + c\right]$$

$$x = \frac{1}{y e^{-\frac{y^4}{4}}} \left[-e^{-\frac{y^4}{4}} + c\right]$$

$-\frac{y^4}{4}$

$= -4\frac{y^3}{4}$

$= -y^3$

Scanned by TapScanner

$$X = \frac{-e^{\frac{-y^4}{4}}}{y e^{\frac{-y^4}{4}}} + \frac{C}{y e^{\frac{-y^4}{4}}}$$

$$X = \frac{-1}{y} + \frac{C}{y e^{\frac{-y^4}{4}}}$$

هيك هاد المعادلة التفاضلية الخطية في X .

Scanned by TapScanner

7- معادلات تفاضلية غير خطية (معادلة برنولي) :

المعادلة التفاضلية غير الخطية تتضمن حالتين او شكلين هي :-

الحالة الاولى:

الشكل الاول لمعادلة التفاضلية غير الخطية او معادلة برنولي

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = \Phi(x)\,y^n$$

حيث n : عدد حقيقي يتضمن جميع الاعداد ماعدا (0, 1) اي $n \neq 0,1$
وهذه المعادلة التفاضلية غير الخطية يمكن ان تتحول الى معادلة تفاضلية خطية وفق الخطوات :-

1- نقسم طرفي المعادلة على y^n او نضرب طرفي المعادلة في y^{-n}

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)\,y.y^{-n} = \Phi(x)\,y^n.y^{-n}$$

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)\,y^{1-n} = \Phi(x)$$

2- نفترض ان $z = y^{1-n}$ ثم نأخذ اشتقاق الطرفين بالنسبة لـ x كل على حدة

$$z = y^{1-n} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = (1-n)\,y^{1-n-1}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

نقسم طرفي المعادلة على $(1-n)$

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} = y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

نعوض في المعادلة ما تم التوصل اليه

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)\,y^{1-n} = \Phi(x)$$

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + P(x)\,z = \varphi(x)$$

نضرب المعادلة في $(1-n)$

$$\frac{dz}{dx} + P(x)\,z(1-n) = \varphi(x)(1-n)$$

اذن تم التوصل الى معادلة تفاضلية خطية كل وفق طرق حل المعادلات التفاضلية الخطية.

Scanned by TapScanner

مثال: حل المعادلة التفاضلية $x y - \frac{dy}{dx} = e^{-x^2} y^3$

الحل:

نشكل معادلة برنولي التي تتضمن $\frac{dy}{dx}$ في

$$\frac{dy}{dx} + P(x) y = Q(x) y^n$$

$$\left[xy - \frac{dy}{dx} = e^{-x^2} y^3 \right] \times -1$$

$$\frac{dy}{dx} - xy = -e^{-x^2} y^3$$

اذن المعادلة تمثل معادلة برنولي نضرب طرفي المعادلة y^{-3}

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} - xy \cdot y^{-3} = -e^{-x^2} \cdot y^3 \cdot y^{-3}$$

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} - x y^{1-3} = -e^{-x^2}$$

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} - x y^{-2} = -e^{-x^2}$$

$$\text{let } z = y^{-2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -2 y^{-3} \frac{dy}{dx}$$

نقسم على -2

$$-\frac{1}{2} \frac{dz}{dx} = y^{-3} \frac{dy}{dx}$$

Scanned by TapScanner

نعوض في المعادلة كل z والمشتقة

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} - xz = -e^{-x^2}$$

نضرب المعادلة التفاضلية في (-2)

$$\frac{dz}{dx} + 2xz = 2e^{-x^2}$$

اذن تم التوصل الى معادلة تفاضلية خطية

فانون حل المعادلة التفاضلية الخطية هو

$$z = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)Q(x)\,dx + c\right]$$

نجد عامل التكامل

$$I(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int 2x\,dx} = e^{\frac{2x^2}{2}} = e^{x^2}$$

$$z = \frac{1}{e^{x^2}}\left[\int e^{x^2}\cdot(2e^{-x^2})\,dx + c\right]$$

$$z = \frac{1}{e^{x^2}}\left[2x + c\right]$$

$$z = \frac{2x}{e^{x^2}} + ce^{-x^2}$$

نعوض عن قيمة z للتوصل الى الحل العام

$$\boxed{y^{-2} = \frac{2x}{e^{x^2}} + ce^{-x^2}}$$

Scanned by TapScanner

الحالة الثانية

الشكل العام للمعادلة التفاضلية ذي الكفاية او معادلة برنولي

$$\frac{dx}{dy} + P(y)\,x = \varphi(y)\,x^{n}$$

n : عدد حقيقي يختلف جميع الاعداد ماعدا (0,1) اي $n \neq 0,1$

يمكن تحويلها الى معادلة تفاضلية خطية وفق الخطوات :-

1- نضرب طرفي المعادلة في x^{-n}

$$x^{-n}\frac{dx}{dy} + P(y)\,x^{1-n} = \varphi(y)$$

2- نفترض ان $z = x^{1-n}$ ثم نشتق الطرفين بالنسبة لـ y فنحصل على

$$z = x^{1-n} \Rightarrow \frac{dz}{dy} = (1-n)\,x^{-n}\frac{dx}{dy}$$

نقسم طرفي المعادلة على $(1-n)$

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dy} = x^{-n}\frac{dx}{dy}$$

اذن نعوض z والمشتقة في المعادلة

$$x^{-n}\frac{dx}{dy} + P(y)\,x^{1-n} = \varphi(y)$$

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dy} + P(y)\,z = \varphi(y)$$

Scanned by TapScanner

نضرب طرفي المعادلة في $(1-n)$

$$\frac{dz}{dy} + P(y)\, z^{(1-n)} = \varphi(y)(1-n)$$

اذن تم التوصل الى معادلة تفاضلية خطية.

مثال: حل المعادلة التفاضلية

$$y\frac{dx}{dy} + 2x = x^2 y$$

الحل:

شكل معادلة برنولي التي تحتوي $\frac{dx}{dy}$ هي

$$\frac{dx}{dy} + P(y)\, x = \varphi(y)\, x^n$$

$$\left[y\frac{dx}{dy} + 2x = x^2 y \right] \div y$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{2}{y}x = x^2$$

$$P(y) = \frac{2}{y} \quad , \quad \varphi(y) = 1$$

نضرب

نقسم طرفي المعادلة x^{-2}

$$x^{-2}\frac{dx}{dy} + \frac{2}{y}x^{-1} = 1$$

Scanned by TapScanner

44

let $z = x^{-1} \Rightarrow \left[\frac{dz}{dy} = -x^{-2}\frac{dx}{dy}\right] * -1$

$$-\frac{dz}{dy} = x^{-2}\frac{dx}{dy}$$

نعوض في المعادلة كما z والمشتقة

$$\frac{-dz}{dy} + \frac{2}{y}z = 1$$

نضرب طرفي المعادلة في (-1)

$$\frac{dz}{dy} - \frac{2}{y}z = -1$$

اذن تم التوصل الى معادلة تفاضلية خطية.

وكون المعادلة التفاضلية الخطية هي

$$z = \frac{1}{I(y)}\left[\int I(y)\,Q(y)\,dy + c\right]$$

$$I(y) = e^{\int p(y)\,dy} = e^{\int \frac{-2}{y}dy} = e^{-2\ln y} = e^{\ln y^{-2}} = y^{-2}$$

$$z = \frac{1}{y^{-2}}\left[\int y^{-2}\cdot(-1)\,dy + c\right]$$

$$z = \frac{1}{y^{-2}}\left[\not{-}\frac{y^{-1}}{\not{-1}} + c\right]$$

$$z = \frac{1}{y^{-2}}\left[y^{-1} + c\right]$$

Scanned by TapScanner

4 c

$$Z = \frac{1}{y^{-2}} \left[\frac{1}{y} + c \right]$$

$$Z = \frac{1}{y^{-1}} + \frac{c}{y^{-2}}$$

نعوض عن قيمة $Z = x^{-1}$

$$\therefore x^{-1} = y + c y^2$$

تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية.

Scanned by TapScanner