المحاضرة 1 / الغايات Limits

المرحلة الثانية/ الكورس الاول

قسم الاحصاء

الدراسة الصباحية

2026-2025

الغايات Limits

تعريف مفهوم الغاية:

الغاية هي أحد المفاهيم الأساسية في الرياضيات وبشكل خاص في التفاضل والتكامل و التحليل الرياضي غاية الدالة $f(x)$ هو التعبير عن سلوك الدالة f عندما يقترب متغير الدالة x من قيمة معينة ولتكن a يعبر عن الغاية رياضياً وفق الشكل التالي

$$\lim_{x\to a} f(x) = C$$

C : عدد حقيقي يمثل غاية الدالة او نهاية الدالة تقرأ نهاية او غاية الدالة $f(x)$ هي C عندما x تؤول او تقترب الى a.

اذا كانت الغاية من جهة اليمين يعبر عنها رياضياً وفق الشكل التالي

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = C_1$$

واذا كانت الغاية من جهة اليسار يعبر عنها رياضياً وفق الشكل التالي

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = C_2$$

فأن غاية الدالة $f(x)$ تكون موجودة اذا كان $C_1 = \mathrm{C}_2$ وتكون غاية الدالة $f(x)$ غير موجودة اذا كان $C_1 \neq \mathrm{C}_2$.

❖ خواص الغايات

اذا كانت غاية الدالة $f(x)$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = C$$

وكانت غاية الدالة $g(x)$

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = L$$

وكانت $n\,,m\,,z$ ثوابت فأن الخواص التالية تكون متحققة

الخاصية الاولى: غاية الدالة الثابتة تساوي الثابت نفسه

$$\lim_{x\to a} z = z \quad , \quad f(x) = z$$

مثال (1): اوجد الغاية للدوال التالية

$$\lim_{x\to 1} 8 = 8$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$$

الخاصية الثانية: الغاية تتوزع على عملية الجمع والطرح للدوال

$$\lim_{x\to a}(f(x)\mp g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \mp \lim_{x\to a} g(x) = C\mp L$$

مثال(2): اوجد الغاية للدالة كثيرة الحدود التالية

$$\lim_{x\to 2}(\,3x^2 + 6x + 8)$$

حسب الخاصية الثانية يتم ادخال الغاية على كل حد من حدود الدالة

$$= \lim_{x\to 2} 3x^2 + \lim_{x\to 2} 6x + \lim_{x\to 2} 8$$

ثم يتم تعويض القيمة (2) التي يؤول اليها المتغير x في الدالة

$$= 3(2)^2 + 6(2) + 8$$

$$= 12 + 12{+}8$$

$$= 32$$

بما ان غاية الدالة موجودة اذن الغاية من جهة اليمين تساوي الغاية من جهة اليسار.

مثال(3): اوجد الغاية للدالة كثيرة الحدود التالية

$$\lim_{x\to -1}(4x^2 - 2x - x)$$

حسب الخاصية الثانية يتم ادخال الغاية على كل حد من حدود الدالة

$$= \lim_{x\to -1} 4x^2 - \lim_{x\to -1} 2x - \lim_{x\to -1} x$$

ثم يتم تعويض القيمة (-1) التي يؤول اليها المتغير x في الدالة

$$= 4(-1)^2 - 2(-1) + 1$$

$$= 4 + 2 + 1$$

$$= 7$$

الخاصية الثالثة: الغاية تتوزع على عملية الضرب لدالتين

$$\lim_{x\to a}(f(x) * g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a} g(x) = C * L$$

مثال(4): اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x\to 2}(x+1)(x^2-1)$$

حسب الخاصية الثالثة يتم توزيع الغاية على الدالتين

$$= \lim_{x\to 2}(x+1)\lim_{x\to 2}(x^2-1)$$

ثم يتم تعويض القيمة (2) التي يؤول اليها المتغير x في الدالة

$$= (2+1) * ((2)^2 - 1)$$

$$= 3 * (4-1)$$

$$= 3 * 3$$

$$= 9$$

الخاصية الرابعة: الغاية لثابت مضروب في دالة يساوي الثابت في غاية الدالة

$$\lim_{x\to a} z\, f(x) = z \lim_{x\to a} f(x) = zC$$

مثال(5): اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x\to 3} 9(x^2 - x)$$

حسب الخاصية الرابعة يتم ادخال الغاية على الدالة فقط واخراج الثابت خارج الغاية

$$= 9 \lim_{x\to 3}(x^2 - x)$$

$$= 9((3)^2 - 3)$$

$$= 9(9 - 3)$$

$$= 9 * 6$$

$$= 54$$

الخاصية الخامسة: الغاية تتوزع على حاصل قسمة دالتين

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{C}{L}$$

مثال(6): اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x\to 6} \frac{x + 2}{x - 3}$$

حسب الخاصية الخامسة يتم توزيع الغاية على دالة البسط ودالة المقام

$$= \frac{\lim_{x\to 6} x + 2}{\lim_{x\to 6} x - 3}$$

$$= \frac{6 + 2}{6 - 3}$$

$$= \frac{8}{3}$$

الخاصية السادسة: الغاية لدالة مرفوعة للأس

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{\frac{n}{m}} = (\lim_{x\to a} f(x))^{\frac{n}{m}} = C^{\frac{n}{m}}$$

مثال(7): اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x\to 3}(x^2-x+4)^{\frac{2}{3}}$$

حسب الخاصية السادسة يتم ادخال الغاية على الدالة داخل القوس المرفوع للأس

$$=\left(\lim_{x\to 3}(x^2-x+4)\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$=(\lim_{x\to 3}x^2-\lim_{x\to 3}x+\lim_{x\to 3}4)^{\frac{2}{3}}$$

$$=((3)^2-3+4)^{\frac{2}{3}}$$

$$=(9-3+4)^{\frac{2}{3}}$$

$$=(10)^{\frac{2}{3}}$$

=

الخاصية السابعة: الغاية لدالة تحت الجذر

$$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to a}f(x)}$$

مثال(8): اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{x^2-2}$$

حسب الخاصية السابعة يتم ادخال الغاية على الدالة داخل الجذر التربيعي

$$=\sqrt{\lim_{x\to 4}(x^2-2)}$$

$$=\sqrt{((4)^2-2)}$$

$$=\sqrt{16-2}$$

$= \sqrt{14}$