المحاضرة 2 / الغايات وخواص الغايات

المرحلة الثانية/ الكورس الاول

قسم الاحصاء

الدراسة الصباحية

2025-2026

1. تعريف مفهوم الغاية:

الغاية هي أحد المفاهيم الأساسية في الرياضيات وبشكل خاص في التفاضل والتكامل و التحليل الرياضي يقصد بغاية الدالة $f(x)$ هو التعبير عن سلوك الدالة f عندما يقترب متغير الدالة x من قيمة معينة ولتكن a يعبر عن الغاية رياضياً وفق الشكل التالي

$$\lim_{x \to a} f(x) = C$$

C : عدد حقيقي يمثل غاية الدالة او نهاية الدالة تقرأ نهاية او غاية الدالة $f(x)$ هي C عندما x تؤول او تقترب الى a.

اذا كانت الغاية من جهة اليمين يعبر عنها رياضياً وفق الشكل التالي

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = C_1$$

واذا كانت الغاية من جهة اليسار يعبر عنها رياضياً وفق الشكل التالي

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = C_2$$

فأن غاية الدالة $f(x)$ تكون موجودة اذا كان $C_1 = \mathrm{C}_2$ وتكون غاية الدالة $f(x)$ غير موجودة اذا كان $C_1 \neq \mathrm{C}_2$.

مثال (1) اوجد غاية الدالة $f(x) = x^2 - 1$ عندما $x \to 0$.

الحل:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 - 1 = (0)^2 - 1 = -1$$

x	0.5	0.25	0.125	0.0625	$\cdots$	0
$f(x)$	−0.75	−0.93	−0.98	−0.99	$\cdots$	−1

نلاحظ ان الدالة $f(x)$ تقترب من -1 عندما x تقترب من 0.

مثال (2) اوجد غاية الدالة $f(x) = 3x + 2$ عندما $x \to 1$

الحل:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} 3x + 2 = 3(1) + 2 = 5$$

x	0.5	0.6	0.8	0.9	0.99	$\cdots$	1
$f(x)$	3.5	3.8	4.4	4.7	4.97	$\cdots$	5

نلاحظ ان الدالة $f(x)$ تقترب من 5 عندما x تقترب من 1.

2. خواص الغايات

اذا كانت غاية الدالة $f(x)$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = C$$

وكانت غاية الدالة $g(x)$

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = L$$

وكانت n , m , z ثوابت فأن الخواص التالية تكون متحققة

- **الخاصية الاولى: غاية الدالة الثابتة تساوي الثابت نفسه**

$$\lim_{x\to a} z = z \qquad , \quad f(x) = z$$

مثال (3): اوجد الغاية للدوال التالية

$$\lim_{x\to 1} 8 = 8$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$$

- **الخاصية الثانية: الغاية تتوزع على عملية الجمع والطرح للدوال**

$$\lim_{x\to a}(f(x)\mp g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \mp \lim_{x\to a} g(x) = C\mp L$$

مثال(4): اوجد الغاية للدالة كثيرة الحدود التالية

$$\lim_{x\to 2}(\ 3x^2 + 6x + 8)$$

حسب الخاصية الثانية يتم ادخال الغاية على كل حد من حدود الدالة

$$= \lim_{x\to 2} 3x^2 + \lim_{x\to 2} 6x + \lim_{x\to 2} 8$$

ثم يتم تعويض القيمة (2) التي يؤول اليها المتغير x في الدالة

$$= 3(2)^2 + 6(2) + 8$$

$$= 12 + 12 + 8$$

$$= 32$$

بما ان غاية الدالة موجودة اذن الغاية من جهة اليمين تساوي الغاية من جهة اليسار.

مثال(5): اوجد الغاية للدالة كثيرة الحدود التالية

$$\lim_{x\to -1}(4x^2 - 2x - x)$$

حسب الخاصية الثانية يتم ادخال الغاية على كل حد من حدود الدالة

$$= \lim_{x\to -1} 4x^2 - \lim_{x\to -1} 2x - \lim_{x\to -1} x$$

ثم يتم تعويض القيمة (1−) التي يؤول اليها المتغير x في الدالة

$$= 4(-1)^2 - 2(-1) + 1$$

$$= 4 + 2 + 1$$

$$= 7$$

- **الخاصية الثالثة: الغاية تتوزع على عملية الضرب لدالتين**

$$\lim_{x\to a}(f(x)*g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a} g(x) = C*L$$

مثال(6): اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x\to 2}(x+1)(x^2-1)$$

حسب الخاصية الثالثة يتم توزيع الغاية على الدالتين

$$= \lim_{x\to 2}(x+1)\lim_{x\to 2}(x^2-1)$$

ثم يتم تعويض القيمة (2) التي يؤول اليها المتغير x في الدالة

$$= (2+1)*((2)^2-1)$$

$$= 3*(4-1)$$

$$= 3*3$$

$$= 9$$

❖ **الخاصية الرابعة: الغاية لثابت مضروب في دالة يساوي الثابت في غاية الدالة**

$$\lim_{x\to a} z\, f(x) = z \lim_{x\to a} f(x) = zC$$

مثال(7): اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x\to 3} 9(x^2-x)$$

حسب الخاصية الرابعة يتم ادخال الغاية على الدالة فقط واخراج الثابت خارج الغاية

$$= 9\lim_{x\to 3}(x^2-x)$$

$$= 9((3)^2-3)$$

$$= 9(9-3)$$

$$= 9*6$$

$$= 54$$

❖ **الخاصية الخامسة: الغاية تتوزع على حاصل قسمة دالتين**

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{C}{L}$$

مثال(8): اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x \to 6} \frac{x+2}{x-3}$$

حسب الخاصية الخامسة يتم توزيع الغاية على دالة البسط ودالة المقام

$$= \frac{\lim_{x \to 6} x+2}{\lim_{x \to 6} x-3}$$

$$= \frac{6+2}{6-3}$$

$$= \frac{8}{3}$$

❖ **الخاصية السادسة: الغاية لدالة مرفوعة للأس**

$$\lim_{x \to a} (f(x))^{\frac{n}{m}} = (\lim_{x \to a} f(x))^{\frac{n}{m}} = C^{\frac{n}{m}}$$

مثال(9): اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - x + 4)^{\frac{2}{3}}$$

حسب الخاصية السادسة يتم ادخال الغاية على الدالة داخل القوس المرفوع للأس

$$= \left(\lim_{x \to 3} (x^2 - x + 4)\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= (\lim_{x \to 3} x^2 - \lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 4)^{\frac{2}{3}}$$

$$= ((3)^2 - 3 + 4)^{\frac{2}{3}}$$

$$= (9 - 3 + 4)^{\frac{2}{3}}$$

$$= (10)^{\frac{2}{3}}$$

$$=$$

❖ **الخاصية السابعة: الغاية لدالة تحت الجذر**

$$\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}$$

مثال(10): اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x\to 4} \sqrt{x^2 - 2}$$

حسب الخاصية السابعة يتم ادخال الغاية على الدالة داخل الجذر التربيعي

$$= \sqrt{\lim_{x\to 4} (x^2 - 2)}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to 4} x^2 - \lim_{x\to 4} 2}$$

$$= \sqrt{((4)^2 - 2)}$$

$$= \sqrt{16 - 2}$$

$$= \sqrt{14}$$

♣ **ملاحظات حول ايجاد غاية الدالة $f(x)$**

لغرض الوصول الى غاية الدالة $f(x)$ يتم تعويض قيمة a التي يؤول اليها المتغير x في الدالة f كما في الامثلة السابقة ويكون ناتج التعويض اما كمية محددة (معرفة) عندها ينتهي الحل او يكون ناتج التعويض كمية غير محددة (غير معرفة) مثل $\frac{\infty}{\infty}$ او $\frac{0}{0}$ هذه الحالة تظهر عادةً في الدوال الكسرية التي يكون فيها كل من البسط والمقام عبارة عن دوال متعددة الحدود ولغرض ايجاد حل لهذه الحالات نطبق الاتي:

1. اذا كان ناتج التعويض يساوي $\frac{0}{0}$ نقوم بأحد الاجراءات التالية:

أ- نحلل البسط والمقام بأحد طرق التحليل (الفرق بين مربعين ، التجربة ، الفرق بين مكعبين ، مرافق الجذر)

ب- نستخدم القانون التالي اذا كان يلائم السؤال

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

2. اذا كان ناتج التعويض يساوي $\frac{\infty}{\infty}$ وكان أس x في المقام اكبر او تساوي أس x في البسط نقوم بقسمة كل من البسط والمقام على x المرفوعة لاكبر أس في المقام، أما اذا كان أس x في البسط اكبر من أس x في المقام فنقوم بقسمة كل من البسط والمقام على x المرفوعة لاكبر أس في البسط.

مثال(11): اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

حسب الخاصية الخامسة يتم توزيع الغاية على البسط والمقام

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{\lim_{x \to 1} x^2 - 1}{\lim_{x \to 1} x - 1}$$

$$= \frac{(1)^2 - 1}{1 - 1}$$

$$= \frac{0}{0}$$

بما ان ناتج التعويض $\frac{0}{0}$ يجب ان نحلل الدالة للوصول الى غاية الدالة يكون التحليل بأستخدام قانون الفرق بين مربعين

$$(x^2 - a^2) = (x - a)(x + a)$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1)$$

$$= 1 + 1 = 2$$

مثال(12): اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$$

حسب الخاصية الخامسة يتم توزيع الغاية على البسط والمقام

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \frac{\lim_{x \to 3} x^3 - 27}{\lim_{x \to 3} x - 3}$$

$$= \frac{(3)^3 - 27}{3 - 3}$$

$$= \frac{27 - 27}{0} = \frac{0}{0}$$

هذا المثال يمكن حله بطريقتين **الطريقة الاولى** التحليل بأستخدام قانون الفرق بين مكعبين

$$(x^3 - a^3) = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \left(\frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{(x - 3)} \right)$$

$$= \lim_{x \to 3} (x^2 + 3x + 9)$$

حسب الخاصية الثانية الغاية تتوزع على الجمع والطرح

$$= (3)^2 + 3 * 3 + 9$$

$$= 9 + 9 + 9$$

$$= 27$$

الطريقة الثانية يمكن حل المثال بأستخدام القانون

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

$$\frac{x^3 - 27}{x - 3} = \frac{x^3 -}{x -}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} =$$

$$= 3 * 3^{3-1}$$

$$= 3 * 3^2$$

$$= 27$$

مثال(13): اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x \to \infty} (\frac{x}{7x + 4})$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{7x + 4}\right) = \frac{\infty}{7 * \infty + 4} = \frac{\infty}{\infty}$$

نقسم كل من البسط والمقام على x

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{7x + 4}\right) =$$

$$= \frac{1}{7 + \frac{4}{\infty}}$$

$$= \frac{1}{7 + 0} = \frac{1}{7}$$

مثال(14): اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

حسب الخاصية الخامسة يتم توزيع الغاية على البسط والمقام

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}\right) = \frac{\lim_{x \to 1} (x^2 - 1)}{\lim_{x \to 1} \left(\sqrt{x} - 1\right)}$$

$$= \frac{(1)^2 - 1}{\sqrt{1} - 1}$$

$$= \frac{0}{0}$$

للوصول الى غاية الدالة نستخدم قانون مرافق الجذر اي ضرب البسط والمقام بمرافق الجذر الذي يمثل نفس المقدار عكس الاشارة

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} * \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 1)\left(\sqrt{x} + 1\right)}{(x - 1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)\left(\sqrt{x} + 1\right)}{(x - 1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1)\left(\sqrt{x} + 1\right)$$

$$= (1 + 1) * \left(\sqrt{1} + 1\right)$$

$$= 2 * 2$$

$$= 4$$