المحاضرة 3 / غاية الدالة المنفصلة او الشطرية

مفهوم الاستمرارية

المرحلة الثانية/ الكورس الاول

قسم الاحصاء

الدراسة الصباحية

2026-2025

3. غاية الدالة المنفصلة او الدالة الشطرية

لايجاد غاية الدالة المنفصلة عندما $x \to a$ نتبع الخطوات التالية:

1. نجد غاية الدالة من جهة اليمين وفق الشكل الرياضي

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = C_1$$

2. نجد غاية الدالة من جهة اليسار وفق الشكل الرياضي

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = C_2$$

3. اذا كانت الغاية من جهة اليمين تساوي الغاية من جهة اليسار اي ان $C_1 = \mathrm{C}_2$ فأن للدالة غاية عند $x \to a$.

4. اذا كانت الغاية من جهة اليمين لا تساوي الغاية من جهة اليسار اي ان $C_1 \neq \mathrm{C}_2$ فأنه لا توجد غاية للدالة عند $x \to a$.

مثال(15): اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x \to 2} \begin{cases} 1 - x & x \leq 2 \\ x + 1 & x > 2 \end{cases}$$

اولاً : نجد الغاية من جهة اليمين لجزء الدالة التي يكون فيها قيم المتغير x بأتجاه الموجب اي $x > 2$

$$\lim_{x \to 2^+} (x + 1) = 2 + 1 = 3 = C_1$$

ثانياً: نجد الغاية من جهة اليسار لجزء الدالة التي يكون فيها قيم المتغير x بأتجاه السالب اي $x \leq 2$

$$\lim_{x \to 2^-} (1 - x) = 1 - 2 = -1 = C_2$$

بما ان $C_1 \neq \mathrm{C}_2$ اذن لا توجد غاية للدالة.

مثال(16): اوجد الغاية للدالة التالية

$$\lim_{x\to 1}\begin{cases} x^2+1 & x\geq 1 \\ 2x & x<1 \end{cases}$$

اولاً : نجد الغاية من جهة اليمين لجزء الدالة التي يكون فيها قيم المتغير x بأتجاه الموجب اي $x \geq 1$

$$\lim_{x\to 1^+}(x^2+1) = (1)^2+1 = 2 = C_1$$

ثانياً: نجد الغاية من جهة اليسار لجزء الدالة التي يكون فيها قيم المتغير x بأتجاه السالب اي $x < 1$

$$\lim_{x\to 1^-}(2x) = 2*(1) = 2 = C_2$$

بما ان $C_1 = C_2$ اذن توجد غاية للدالة.

4. تعريف مفهوم الاستمرارية

مفهوم الاستمرارية من المفاهيم الاساسية المرتبطة بمفهوم الغاية وهي صفة للدالة تعكس سلوكها البياني من نقطة معينة او في فترة معينة. في مفهوم الاستمرارية سوف نأخذ بنظر الاعتبار ان المجال والمجال المقابل للدوال المستعملة هو مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية (R)، يقال للدالة $f(x)$ مستمرة عند $x = a$ اذا وفقط اذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

1. $f(a) \in R$ الدالة معرفة
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ الغاية موجودة
3. $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$

يقال للدالة $f(\mathrm{x})$ انها مستمرة اذا وفقط اذا حققت الشروط الثلاثة اعلاه وتكون الدالة غير مستمرة اذا وفقط اذا لم يتحقق احد الشروط الثلاثة اعلاه.

مثال(17): اذا كانت لدينا الدالة $f(x) = x^2 + 1$ هل ان الدالة مستمرة عند $x = 3$ ؟

الحل:

1. $f(x = 3) = x^2 + 1$

$= (3)^2 + 1 = 10 \in R$ الدالة معرفة

2. $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}(x^2+1)$

$= (3)^2 + 1 = 10$ الغاية موجودة

3. $f(x = 3) = \lim_{x \to 3} f(x) = 10$

بما ان الشروط الثلاثة متحققة اذن الدالة مستمرة عند $x = 3$.

مثال(18): اذا كانت لدينا الدالة $f(x) = x^2 + 3$ هل ان الدالة مستمرة عند $x = 1$ ؟

الحل:

$1. f(x = 1) = x^2 + 3$

$= (1)^2 + 3 = 4$ الدالة معرفة

2. $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^2 + 3)$

$= (1)^2 + 3 = 4$ الغاية موجودة

3. $f(x = 1) = \lim_{x \to 1} f(x) = 4$

بما ان الشروط الثلاثة متحققة اذن الدالة مستمرة عند $x = 1$.

مثال(19):اذا كانت لدينا الدالة $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$ هل ان الدالة مستمرة عند $x = 1$**؟**

الحل:

$1. f(x = 1) = x^2$

$= (1)^2 = 1$ الدالة معرفة

2. $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2 = 2$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = (1)^2 = 1$

بما ان الغاية من جهة اليمين لا تساوي الغاية من جهة اليسار اذن غاية الدالة غير موجودة وبالتالي الدالة تكون غير مستمرة عند $x = 1$ بسبب عدم تحقق احد شروط الاستمرارية.

مثال(20): اذا كانت لدينا الدالة $f(x)=\frac{x}{x+1}$ هل ان الدالة مستمرة عند $x=3$ ؟

الحل: بما ان الدالة $f(x)$ كسرية اذن مجال الدالة جميع الاعداد الحقيقية عدا الاعداد التي تجعل المقام يساوي صفر اي عندما $x=-1$ فأن المقام يساوي صفر اذن مجال الدالة $f(x)$ هو جميع الاعداد الحقيقية ماعدا العدد $\{-1\}$.

1. $f(x=3)=\frac{x}{x+1}=\frac{3}{3+1}=\frac{3}{4}$ اذن الدالة معرفة

2. $\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 3} x}{\lim\limits_{x\to 3}(x+1)}$

$=\frac{3}{3+1}=\frac{3}{4}$ اذن الغاية موجودة

3. $f(x=3)=\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\frac{3}{4}$

بما ان الشروط الثلاثة متحققة اذن الدالة مستمرة عند $x=3$.