

المحاضرة 4 / المشتقة Derivative

المرحلة الثانية/ الكورس الاول

قسم الاحصاء

الدراسة الصباحية

2026-2025

5. المشتقة Derivative

المشتقة تصف السلوك الرياضي والهندسي للدالة عند نقطة ما او عند النقاط القريبة جداً منها، عملية ايجاد المشتقة تسمى التفاضل وللتفاضل تطبيقات متعددة في الفيزياء والكيمياء وبحوث العمليات، تستخدم المشتقات في ايجاد القيمة العظمى والصغرى للدالة كما ان المعادلات التي تتضمن تفاضلات (مشتقات) تسمى المعادلات التفاضلية.

ان مشتقة الدالة $f(x)$ هي معدل تغير الدالة $y = f(x)$ بالنسبة للمتغير x ويرمز لها $\frac{dy}{dx}$ او $f'(x)$ وتكتب المشتقة رياضياً وفق الشكل التالي

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

h يمثل مقدار التغير الحاصل في x

6. قواعد المشتقة

لتكن كل من $f(x)$ و $g(x)$ دوال قابلة للاشتقاق وليكن c ثابت

	الدالة	المشتقة
1	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
2	$f(x) = x^n$	$f'(x) = n x^{n-1}$
3	$f(x) = cx^n$	$f'(x) = c n x^{n-1}$
4	$f(x) = c g^n(x)$	$f'(x) = c n g^{n-1}(x) \dot{g}(x) dx$
5	$h(x) = f(x) \mp g(x)$	$\dot{h}(x) = \dot{f}(x) \mp \dot{g}(x)$
6	$h(x) = f(x) * g(x)$	$\dot{h}(x) = f(x) * \dot{g}(x) + g(x) * \dot{f}(x)$
7	$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$\dot{h}(x) = \frac{g(x) * \dot{f}(x) - f(x) * \dot{g}(x)}{g^2(x)}$
8	$f(x) = Ln(x)$	$f'(x) = \frac{dx}{x}$
9	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x dx$

مثال (21) جد المشتقة للدوال التالية

1. $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 2x^2 + 3x - 5$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ at $x = 3$

3. $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ at $x = -1$

4. $h(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 3x)$

5. $h(x) = e^{5x} - 6x^3$

الحل:

1. $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 2x^2 + 3x - 5$

$$\hat{f}(x) = \frac{3}{4} * 4 * x^{4-1} - 2 * 2 * x^{2-1} + 3 * 1 * x^{1-1} - 0$$

$$\hat{f}(x) = 3x^3 - 4x + 3$$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ at $x = 3$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} = (x^2 - 2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2} (x^2 - 2x)^{\frac{1}{2}-1} (2x - 2)$$

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2} (x^2 - 2x)^{-\frac{1}{2}} (2x - 2)$$

$$\hat{f}(x) = \frac{(2x - 2)}{2\sqrt{(x^2 - 2x)}} = \frac{x - 1}{\sqrt{(x^2 - 2x)}}$$

3. $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ at $x = -1$

$$\begin{aligned}\dot{f}(x) &= \frac{(1-x)(2x) - x^2(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2x - 2x^2 + x^2}{(1-x)^2} \\ &= \frac{(2x - x^2)}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

$$4. h(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 3x)$$

$$\begin{aligned}\dot{h}(x) &= (x^2 + 1)(3x^2 - 3) + (x^3 - 3x)(2x) \\ &= x^2 * 3x^2 - 3x^2 + 3x^2 - 3 + 2x^4 - 6x^2 \\ &= 3x^4 - 3 + 2x^4 - 6x^2 \\ &= 5x^4 - 6x^2 - 3\end{aligned}$$

$$5. h(x) = e^{5x} - 6x^3$$

$$\begin{aligned}\dot{h}(x) &= e^{5x} * (5) - 6 * 3 * x^2 \\ &= 5e^{5x} - 18x^2\end{aligned}$$

7. قواعد الاشتقاق للدوال المثلثية

	الدالة	المشتقة
1	$\sin(x)$	$\cos(x) dx$
2	$\cos(x)$	$-\sin(x) dx$
3	$\tan(x)$	$\sec^2(x) dx$
4	$\sec(x)$	$\sec(x) \tan(x) dx$
5	$\csc(x)$	$-\csc(x) \cot(x) dx$
6	$\cot(x)$	$-\csc^2(x) dx$

مثال (22) جد المشتقة للدوال التالية

$$1. f(x) = \sqrt{\cot(x)} \quad 2. f(x) = \cos(2x)$$

$$3. f(x) = \tan\sqrt{x}$$

الحل:

$$1. f(x) = \sqrt{\cot(x)}$$

$$f(x) = (\cot(x))^{1/2}$$

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2} (\cot(x))^{-\frac{1}{2}} * -\csc^2(x) * 1$$

$$\hat{f}(x) = \frac{-1}{2} (\cot(x))^{-\frac{1}{2}} \csc^2(x)$$

$$2. f(x) = \cos(2x)$$

$$\hat{f}(x) = -\sin(2x) * 2$$

$$\hat{f}(x) = -2 \sin(2x)$$

$$3. f(x) = \tan\sqrt{x}$$

$$\hat{f}(x) = \sec^2(\sqrt{x}) * \frac{1}{2} * x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\hat{f}(x) = \sec^2(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

8. حساب المشتقة باستخدام التعريف

ايجاد مشتقة اي دالة باستخدام القانون التالي

$$\frac{dy}{dx} = \hat{f}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مثال (23) اوجد المشتقة الاولى للدالة $f(x) = x^2 + 1$ باستخدام التعريف

الحل: يمكن ايجاد المشتقة باستخدام الخطوات الاربعة

$$\hat{f}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

1. نجد $f(x+h)$

$$f(x+h) = (x+h)^2 + 1 = x^2 + 2xh + h^2 + 1$$

2. نجد $f(x+h) - f(x)$

$$f(x+h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 + 1 - x^2 - 1 = 2xh + h^2$$

3. نجد ناتج قسمة الفرق $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{h(2x + h)}{h} = 2x + h$$

4. نجد الغاية لناتج القسمة $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) \\ &= 2x\end{aligned}$$

مثال (24) اوجد المشتقة الاولى للدالة $f(x) = 3x^2$ عندما $x = -2$ باستخدام التعريف

الحل:

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ \hat{f}(-2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(-2+h)^2 - 3(-2)^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3((-2)^2 + (2)(-2)h + h^2) - 3(4)}{h}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(4 - 4h + h^2) - 12}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12 - 12h + 3h^2 - 12}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-12h + 3h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3h - 12) \\ &= 3(0) - 12 = -12 \end{aligned}$$