المحاضرة 6 / نظرية رول Rolles Theorem

المرحلة الثانية/ الكورس الاول

قسم الاحصاء

الدراسة الصباحية

2026–2025

نظرية رول **Rolles Theorem**

اذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a,b)، واذا كان $f(a)=f(b)$ فأنه هناك على الاقل عنصراً واحداً c ينتمي الى الفترة المفتوحة (a,b) بحيث $\grave{f}(c)=0$.

مثال (28) اذا كانت $f(x)=x^3-4x$ و $x\in[-2,2]$ اوجد العدد c الذي يحقق نظرية رول.

الحل:

اولاً: نبحث عن استمرارية الدالة في الفترة المغلقة $[-2,2]$ بما ان الدالة كثيرة الحدود اذن الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-2,2]$.

ثانياً: نبحث هل ان الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة $(-2,2)$ بما ان الدالة كثيرة الحدود اذن الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة $(-2,2)$

$$f(x)=x^3-4x$$

$$\grave{f}(x)=3x^2-4$$

ثالثاً: نعوض طرفي الفترة $[-2,2]$ في الدالة الاصلية

$$f(x)=f(a)=f(-2)=x^3-4x=(-2)^3-4(-2)=-8+8=0$$

$$f(x)=f(b)=f(2)=x^3-4x=(2)^3-4(2)=8-8=0$$

اذن

$$f(a)=f(b)=0$$

رابعاً : يوجد العدد $c\in(-2,2)$ ويحقق $\grave{f}(c)=0$

نعوض c في مشتقة الدالة $\qquad \grave{f}(x)=\grave{f}(c)=3x^2-4=3c^2-4$

$$\grave{f}(c)=0$$

$$3c^2 - 4 = 0$$

$$3c^2 = 4$$

$$c^2 = \frac{4}{3}$$

ناخذ الجذر للطرفين

$$c = \mp \frac{2}{\sqrt{3}} \in (-2,2)$$

$c = \frac{2}{\sqrt{3}}\ , c = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ يحققان نظرية رول للدالة.

مثال (29) اذا كانت $f(x) = x^2 - 3x$ و $x \in [-1,4]$ اوجد العدد c الذي يحقق نظرية رول.

الحل:

اولاً: نبحث عن استمرارية الدالة في الفترة المغلقة $[-1,4]$ بما ان الدالة كثيرة الحدود اذن الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-1,4]$.

ثانياً: نبحث هل ان الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة $(-1,4)$ بما ان الدالة كثيرة الحدود اذن الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة $(-1,4)$

$$f(x) = x^2 - 3x$$

$$\grave{f}(x) = 2x - 3$$

ثالثاً: نعوض طرفي الفترة $[-1,4]$ في الدالة الاصلية

$$f(x) = f(a) = f(-1) = x^2 - 3x = (-1)^2 - 3(-1) = 1 + 3 = 4$$

$$f(x) = f(b) = f(4) = x^2 - 3x = (4)^2 - 3(4) = 16 - 12 = 4$$

اذن

$$f(a) = f(b) = 4$$

رابعاً : يوجد العدد $c \in (-1,4)$ ويحقق $\grave{f}(c) = 0$

$\grave{f}(x) = \grave{f}(c) = 2x - 3 = 2c - 3$ نعوض c في مشتقة الدالة

$\grave{f}(c) = 0$

$2c - 3 = 0$

$2c = 3$

$c = \frac{3}{2} \in (-1,4)$

$c = \frac{3}{2}$ يحقق نظرية رول للدالة.

مثال (30) اذا كانت $f(x) = 2x + \frac{2}{x}$ و $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ اوجد العدد c الذي يحقق نظرية رول.

الحل:

اولاً: نبحث عن استمرارية الدالة في الفترة المغلقة $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ بما ان الدالة كسرية نساوي المقام للصفر ونستخرج قيمة x اذا كانت قيمة x تنتمي الى الفترة المغلقة $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ تكون الدالة غير مستمرة أما اذا كانت قيمة x لا تنتمي الى الفترة المغلقة $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ تكون الدالة مستمرة.

$x = 0 \ , \quad 0 \notin \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

بما ان قيمة x لا تنتمي الى الفترة المغلقة $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ اذن الدالة مستمرة.

ثانياً: نبحث هل ان الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ بما ان الدالة كسرية نشتق الدالة ثم نساوي المقام للصفر

$f(x) = 2x + \frac{2}{x}$

$\grave{f}(x) = 2 - \frac{2}{x^2}$

$x^2 = 0$ بالجذر

$$x = 0 \quad , \quad 0 \notin \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

بما ان قيمة x لا تنتمي الى الفترة المفتوحة $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ اذن الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

ثالثاً: نعوض طرفي الفترة $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ في الدالة الاصلية

$$f(x) = f(a) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2x + \frac{2}{x} = 2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{\frac{1}{2}} = 1 + 4 = 5$$

$$f(x) = f(b) = f(2) = 2x + \frac{2}{x} = 2(2) + \frac{2}{2} = 4 + 1 = 5$$

اذن

$$f(a) = f(b) = 5$$

رابعاً : يوجد العدد $c \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ ويحقق $\grave{f}(c) = 0$

$$\grave{f}(x) = \grave{f}(c) = 2 - \frac{2}{x^2} = 2 - \frac{2}{c^2}$$ نعوض c في مشتقة الدالة

$$\grave{f}(c) = 0$$

$$2 - \frac{2}{c^2} = 0$$ نضرب الطرفين c^2

$$2c^2 - 2 = 0$$

$$2c^2 = 2$$

$$c^2 = 1$$ بالجذر

$$c = \mp 1$$

$$c = -1 \notin \left(\frac{1}{2}, 2\right) \quad , \quad c = 1 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

$c = 1$ تحقق نظرية رول للدالة.

11. نظرية القيمة الوسطى Mean Value Theorem

اذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a,b) فأنه على الاقل يوجد العدد c ينتمي الى الفترة المفتوحة (a,b) بحيث يحقق القانون التالي

$$\grave{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

مثال (31) اذا كانت $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x}$ و $\boldsymbol{x \in [0,3]}$ اوجد العدد $\boldsymbol{c}$ الذي يحقق نظرية القيمة الوسطى.

الحل:

اولاً: نبحث عن استمرارية الدالة في الفترة المغلقة [0,3] بما ان الدالة كثيرة الحدود اذن الدالة مستمرة في الفترة المغلقة [0,3].

ثانياً: نبحث هل ان الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (0,3) بما ان الدالة كثيرة الحدود اذن الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (0,3)

$$\grave{f}(x) = x^2 + 2$$

ثالثاً: يوجد العدد $c \in (0,3)$ نطبق القانون

$$\grave{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$\grave{f}(x) = \grave{f}(c) = c^2 + 2$ نعوض c في مشتقة الدالة

$$f(x) = f(b) = f(3) = \frac{1}{3}x^3 + 2x = \frac{1}{3}(3)^3 + 2(3) = 9 + 6 = 15$$

$$f(x) = f(a) = f(0) = \frac{1}{3}x^3 + 2x = \frac{1}{3}(0)^3 + 2(0) = 0$$

نعوض في القانون

$$\grave{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$c^2 + 2 = \frac{15 - 0}{3 - 0}$$

$$c^2 + 2 = 5$$

$$c^2 = 3$$

$$c = \mp\sqrt{3}$$

$$c = \sqrt{3} \in (0,3) \quad , \quad c = -\sqrt{3} \notin (0,3)$$

اذن العدد الوحيد الذي يحقق نظرية القيمة الوسطى للدالة هو $c = \sqrt{3}$.

مثال (32) اذا كانت $f(x) = x^2 - 6x + 4$ و $x \in [-1,7]$ اوجد العدد c الذي يحقق نظرية القيمة الوسطى.

الحل:

اولاً: نبحث عن استمرارية الدالة في الفترة المغلقة $[-1,7]$ بما ان الدالة كثيرة الحدود اذن الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-1,7]$.

ثانياً: نبحث هل ان الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة $(-1,7)$ بما ان الدالة كثيرة الحدود اذن الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة $(-1,7)$

$$f(x) = x^2 - 6x + 4$$

$$\grave{f}(x) = 2x - 6$$

ثالثاً: يوجد العدد $c \in (-1,7)$ نطبق القانون

$$\grave{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$\grave{f}(x) = \grave{f}(c) = 2c - 6$ نعوض c في مشتقة الدالة

$$f(x) = f(b) = f(7) = x^2 - 6x + 4 = (7)^2 - 6(7) + 4 = 49 - 42 + 4 = 11$$

$$f(x) = f(a) = f(-1) = x^2 - 6x + 4 = (-1)^2 - 6(-1) + 4 = 11$$

نعوض في القانون

$$\grave{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$2c - 6 = \frac{11 - 11}{7 - (-1)}$$

$$2c - 6 = 0$$

$$2c = 6$$

$$c = \frac{6}{2} = 3$$

$$c = 3 \in (-1,7)$$

اذن العدد الذي يحقق نظرية القيمة الوسطى للدالة هو $c = 3$.

مثال (33) اذا كانت $f(x) = \frac{4}{x+2}$ و $x \in [-1,2]$ اوجد العدد c الذي يحقق نظرية القيمة الوسطى.

الحل:

اولاً: نبحث عن استمرارية الدالة في الفترة المغلقة $[-1,2]$ بما ان الدالة كسرية نساوي المقام للصفر ونستخرج قيمة x اذا كانت قيمة x تنتمي الى الفترة المغلقة $[-1,2]$ تكون الدالة غير مستمرة أما اذا كانت قيمة x لا تنتمي الى الفترة المغلقة $[-1,2]$ تكون الدالة مستمرة.

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2 \notin [-1,2]$$

بما ان قيمة x لا تنتمي الى الفترة المغلقة $[-1,2]$ اذن الدالة مستمرة.

ثانياً: نبحث هل ان الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة $(-1,2)$ بما ان الدالة كسرية نشتق الدالة ثم نساوي المقام للصفر

$$f(x)=\frac{4}{x+2}$$

$$\grave{f}(x)=\frac{(x+2)(0)-4(1)}{(x+2)^2}=\frac{-4}{(x+2)^2}$$

نساوي مقام المشتقة للصفر

$(x+2)^2=0$ بالجذر

$$x+2=0$$

$$x=-2\notin(-1,2)$$

بما ان قيمة x لا تنتمي الى الفترة المفتوحة $(-1,2)$ اذن الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة $(-1,2)$.

ثالثاً: يوجد العدد $c\in(-1,2)$ نطبق القانون

$$\grave{f}(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$\grave{f}(x)=\grave{f}(c)=\frac{-4}{(c+2)^2}$ نعوض c في مشتقة الدالة

$$f(x)=f(b)=f(2)=\frac{4}{x+2}=\frac{4}{2+2}=\frac{4}{4}=1$$

$$f(x)=f(a)=f(-1)=\frac{4}{x+2}=\frac{4}{-1+2}=\frac{4}{1}=4$$

نعوض في القانون

$$\grave{f}(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\frac{-4}{(c+2)^2}=\frac{1-4}{2-(-1)}$$

$\frac{-4}{(c+2)^2}=\frac{-3}{3}$ وسطين في طرفين

$-3(c+2)^2 = -12$ نقسم الطرفين على $3-$

$(c+2)^2 = 4$ بالجذر

$c + 2 = \mp 2$

أما

$c + 2 = 2$

$c = 2 - 2 = 0 \in (-1,2)$

او

$c + 2 = -2$

$c = -2 - 2 = -4 \notin (-1,2)$

اذن العدد الذي يحقق نظرية القيمة الوسطى للدالة هو $c = 0$.

12. التقريب بأستخدام نظرية القيمة الوسطى

لإيجاد القيمة التقريبية لأي مقدار نتبع الخطوات التالية وهي ثابتة لجميع الأسئلة التي يطلب فيها القيمة التقريبية لأي مقدار باستخدام التفاضلات:

1. نكتب الدالة $f(x)$ (وهي إما يعطيها مباشرة في السؤال أو نستنتجها من معطيات السؤال).
2. نجد مشتقة الدالة $f'(x)$.
3. نكتب b الذي يمثل العدد المعطى في السؤال.
4. نجد قيمة a الذي تمثل اقرب عدد الى العدد المعطى في السؤال.
5. نجد قيمة h = القيمة الأصلية – القيمة المفروضة $(b-a)$.
6. نعوض القيمة المفروضة a في الدالة الأصلية مرة وفي المشتقة مرة أخرى أي نجد قيمة $f(a)$ و $f'(a)$.
7. نطبق قانون القيمة التقريبية كالآتي: $f(a+h) = f(a) + f'(a) * h$

مثال (34) جد القيمة التقريبية للمقدار $\sqrt{\mathbf{51}}$ باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة:

$\sqrt{\mathbf{51}}$

الحل:

$1.f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$2.\ f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\ x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\ \ \sqrt{x}}$

$3.\ b = 51$

$4.\ a = 49$ (أقرب مربع للعدد 51 هو 49)

$5.h = b - a = 51 - 49 = 2$

$6.f(a) = f(49) = \sqrt{x} = \sqrt{49} = 7$

$$f'(a) = f'(49) = \frac{1}{2\ \ \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{2(7)} = \frac{1}{14} = 0.071$$

$7.\ f(a+h) = f(a) + f'(a) * h$

$f(49+2) = f(51) = 7 + 0.071 * 2 \cong 7.142$

$\therefore \sqrt{51} \cong 7.142$

مثال ($\mathbf{35}$) جد القيمة التقريبية للمقدار $(\mathbf{8.35})^{\frac{2}{3}}$ باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة:

$(\mathbf{8.35})^{\frac{2}{3}}$

الحل:

$1.f(x) = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$

$2.\ f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\ \ \sqrt[3]{x}}$

$3.\ b = 8.35$

4. $a = 8$ (8 هي أقرب جذر تكعيبي للرقم 8.35)

5. $h = b - a = 8.35 - 8 = 0.35$

6. $f(a) = f(8) = \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{8^2} = 2^2 = 4$

$$f'(a) = f'(8) = \frac{2}{3\ \sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{8}} = \frac{2}{3 * 2} = \frac{1}{3} = 0.333$$

7. $f(a + h) = f(a) + f'(a) * h$

$$f(8 + 0.35) = f(8.35) = 4 + 0.333 * 0.35 \cong 4.116$$

$$\therefore (\mathbf{8.35})^{\frac{2}{3}} \cong 4.116$$