اختبارات المتوسطات

- اختبارات العينة الواحدة
- اختبارات العينتين

الحالة الاولى : اختبار الفرضية التالية ، في حالة ان التباين للمجتمع معلوم فإن احصاءة الاختبار هي $\mathbf{Z_{cal}}$ وللعينات الصغيرة او الكبيرة على حد سواء.

$H_0: \mu = \mu_0$

if σ^2: known and $n > 30$ or $n \leq 30$ then:

$$\mathbf{Z_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{(\sigma/\sqrt{n})}} \quad , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab} = Given}$$

القرار : نقارن بين القيمة المحتسبة لاحصاءة الاختبار مع القيمة المستخرجة من الجداول فاذا كانت القيمة المحسوبة $\mathbf{Z_{cal}}$ اكبر من او يساوي القيمة الجدولية $\mathbf{Z_{tab}}$ هذا يعني وقعت في منطقة رفض الفرضية الصفرية $H_0: \mu = \mu_0$.

القرار هو رفض $\mathbf{H_0: \mu = \mu_0}$.

مثال (16): في دراسة احصائية لمعرفة متوسط المبيعات اليومي لتجارة احدى السلع الاستهلاكية في احدى المناطق ، تم اختيار (10) مخازن بشكل عشوائي حيث كانت مبيعاتها بألاف الدنانير وعلى النحو الاتي:

x_i	163	165	168	169	170	173	134	176	179	163

فإذا كان الانحراف المعياري للمبيعات هو (5) الاف دينار ، المطلوب: اختبر الفرض القائل بأن متوسط المبيعات اليومي هو (169) الف دينار بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

$Z_{0.025} = 1.96$

الحل:

ملاحظة: بالرغم من ان العينة صغيرة ، ولكن الانحراف المعياري معلوم هذا يعني ان احصاءة الاختبار هي $\mathbf{Z_{cal}}$

$$H_0: \mu = 169000$$
ضد versus
$$H_1: \mu \neq 169000$$

$$Z_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = \text{Given}$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{(163000 + 165000 + \cdots + 163000)}{10} = \frac{1660000}{10} = 166000$$

$$Z_{cal} = \frac{166000 - 169000}{(5000/\sqrt{10})} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = 1.96$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{-3000}{(\mathbf{5000}/3.162)} \quad , \qquad \mathbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab}} = \mathbf{1.96}$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{-3000}{1581.278} = -\mathbf{0.897} \quad , \qquad \mathbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab}} = \mathbf{1.96}$$

$$|\mathbf{Z_{cal}}| = \mathbf{0.897} \quad , \qquad \mathbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab}} = \mathbf{1.96}$$

القرار : طالما ان القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار Z هي اصغر من القيمة الجدولية هذا يعني الفرق بين متوسط المبيعات اليومي والمتوسط العام غير معنوي وتقبل الفرضية $H_0: \mu = 169000$ اي ان متوسط المبيعات اليومي للمجتمع هو 169 الف دينار.

مثال (17): ادعت احدى الشركات المنتجة لاحدى المواد بأن متوسط كثافة هذه المادة يزيد عن (8) علماً بأن التباين هو (6.5) ، ولغرض اجراء الاختبار لهذا المتوسط قام احد الباحثين بسحب عينة من هذه المادة وبحجم (50) مفردة وقيس الوسط الحسابي لكثافة المادة فوجد بأنه (8.775) ، المطلوب: اختبر الفرض القائل بأن ادعاء الشركة صحيح عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

$Z_{0.05} = 1.645$

الحل: لاحظ هنا ان التباين معلوم وان حجم العينة كبير و هذا يعني نستعمل احصاءة الاختبار Z_{cal}

ضد $\quad H_0: \mu \leq 8$

versus $\quad H_1: \mu > 8$

$$Z_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = \text{Given}$$

$$Z_{cal} = \frac{8.775 - 8}{\left(\frac{\sqrt{6.5}}{\sqrt{50}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = 1.645$$

$$Z_{cal} = \frac{0.775}{\left(\frac{2.54951}{7.07107}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = 1.645$$

$$Z_{cal} = \frac{0.775}{0.361} = 2.147 \ , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = 1.645$$

القــرار : طالمــا ان القيمــة المحســوبة لاحصــاءة الاختبــار Z هــي اكبــر مــن القيمــة الجدوليــة ، نــرفض $H_0: \mu \leq 8$ ، ونقبل الفرضية البديلة اي ان ادعاء الشركة صحيح.

السـؤال الاول: تخضـع اوزان عبـوات احـد مسـاحيق الغسـيل لتوزيـع طبيعـي انحرافـه المعيـاري $(\sigma = 8)$ غرام ومعدله μ على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ اختبر الفرضية:

$$\text{versus} \quad \begin{matrix} H_0: \mu = 300 \\ H_1: \mu \neq 300 \end{matrix}$$

اذا كان الوسط الحسابي لعينة حجمها $(n = 25)$ علبة هو $(\overline{X} = 308)$ ، واذا علمت ان:

$$Z_{0.025} = 1.96$$

الحل:

ملاحظة: بالرغم من ان العينة صغيرة ، ولكن الانحراف المعياري معلوم هذا يعني ان احصاءة الاختبار هي $\mathbf{Z_{cal}}$

$$\text{versus} \quad \begin{matrix} H_0: \mu = 300 \\ H_1: \mu \neq 300 \end{matrix}$$

$$Z_{cal} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = \text{Given}$$

$$Z_{cal} = \frac{308 - 300}{\left(\frac{8}{\sqrt{25}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = 1.96$$

$$Z_{cal} = \frac{8}{\left(\frac{8}{5}\right)} = 8 * \frac{5}{8} = 5, \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = 1.96$$

القــرار : طالمــا ان القيمــة المحســوبة لاحصــاءة الاختبــار Z هــي اكبــر مــن القيمــة الجدوليــة ، نــرفض الفرضية $H_0: \mu = 300$

السؤال الثاني: يخضع الزمن الذي يحتاجه الطالب للتسجيل في احدى الجامعات الى توزيع طبيعي انحرافه المعياري $(\sigma = 0.7)$ ساعة ومعدله μ ساعة على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ اختبر الفرضية:

$$\text{versus} \quad \begin{matrix} H_0: \mu = 5.2 \\ H_1: \mu > 5.2 \end{matrix}$$

اذا كان الوسط الحسابي لعينة حجمها $(n = 16)$ علبة هو $(\bar{X} = 5.4)$ ، واذا علمت ان:

$$Z_{0.05} = 1.64$$

الحل:

ملاحظة: بالرغم من ان العينة صغيرة ، ولكن الانحراف المعياري معلوم هذا يعني ان احصاءة الاختبار هي $\mathbf{Z_{cal}}$

$$\text{versus} \quad \begin{matrix} H_0: \mu = 5.2 \\ H_1: \mu > 5.2 \end{matrix}$$

$$Z_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = \text{Given}$$

$$Z_{cal} = \frac{5.4 - 5.2}{\left(\frac{0.7}{\sqrt{16}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = 1.64$$

$$Z_{cal} = \frac{0.2}{\left(\frac{0.7}{4}\right)} = 0.2 * \frac{4}{0.7} = 1.143, \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = 1.96$$

القرار : طالما ان القيمة المحسوبة لاحصاءة الاختبار Z هي اصغر من القيمة الجدولية ، نقبل الفرضية

$$H_0: \mu = 5.2$$

السـؤال الثالـث: اخـذت عينـة عشـوائية حجمهـا (16) مـن مجتمـع يتبـع التوزيـع الطبيعـي تباينـه $(\sigma^2 = 144)$ اختبر الفرضية:

$$\text{versus} \quad \begin{matrix} H_0\colon \mu = 9 \\ H_1\colon \mu \neq 9 \end{matrix}$$

باستعمال مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ اذا كان الوسط الحسابي للعينة $(\bar{X} = 9.5)$ ، واذا علمت ان:

$$Z_{0.025} = 1.96$$

الحل:

ملاحظة: بالرغم من ان العينة صغيرة ، ولكن التباين معلوم هذا يعني ان احصاءة الاختبار هي $\mathbf{Z_{cal}}$

$$\text{versus} \quad \begin{matrix} H_0\colon \mu = 9 \\ H_1\colon \mu \neq 9 \end{matrix}$$

$$Z_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = \text{Given}$$

$$Z_{cal} = \frac{9.5 - 9}{\left(\frac{12}{\sqrt{16}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = 1.64$$

$$Z_{cal} = \frac{0.5}{\left(\frac{12}{4}\right)} = 0.5 * \frac{4}{12} = 0.167, \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = 1.96$$

القـرار : طالمـا ان القيمـة المحسـوبة لاحصـاءة الاختبـار Z هـي اصـغر مـن القيمـة الجدوليـة ، نقبـل الفرضـية

$$H_0\colon \mu = 9$$

الحالة الثانية : اختبار الفرضية التالية ، في حالة ان التباين للمجتمع غير معلوم فإن احصاءة الاختبار هي $\mathbf{Z_{cal}}$ وللعينات الكبيرة فقط.

$H_0: \mu = \mu_0$

if σ^2: unknown and $n > 30$ then:

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0}{\left(\frac{\mathbf{s}}{\sqrt{\mathbf{n}}}\right)} \quad , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab}} = \textbf{Given}$$

القرار : نقارن بين القيمة المحتسبة لاحصاءة الاختبار مع القيمة المستخرجة من الجداول فاذا كانت القيمة المحسوبة $\mathbf{Z_{cal}}$ اكبر من او يساوي القيمة الجدولية $\mathbf{Z_{tab}}$ هذا يعني وقعت في منطقة رفض الفرضية الصفرية $H_0: \mu = \mu_0$.

القرار هو رفض $\mathbf{H_0: \mu = \mu_0}$.

حيث ان:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

سؤال: اثبت ان

$$E(s^2) = \sigma^2$$

حيث ان:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad , x_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

الحل:

$$E(s^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(E\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)$$

$$E(s^2) = \frac{1}{n-1}\left(E\left\{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - n\bar{x}^2\right\}\right) = \frac{1}{n-1}\left(nE({x_i}^2) - nE(\bar{x}^2)\right)$$

$$E(s^2) = \frac{1}{n-1}\left(n[var(x_i) + E(x_i)^2] - n[var(\bar{x}) + E(\bar{x})^2]\right)$$

$$x_i \sim N(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow \bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$E(s^2) = \frac{1}{n-1}\left(n[\sigma^2 + \mu^2] - n\left[\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right]\right) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2)$$

$$E(s^2) = \frac{1}{n-1}\sigma^2(n-1)$$

$$E(s^2) = \sigma^2 \quad , \therefore s^2 = \hat{\sigma}^2 \text{ is unbaised est. for } \sigma^2$$

السؤال الرابع: تخضع اعداد حبات البرتقال على شجرة البرتقال في مزرعة كبيرة لتوزيع طبيعي معدله $\mu = 40$ حبة على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ اختبر الفرضية:

$$\text{versus} \quad \begin{matrix} H_0: \mu \le 40 \\ H_1: \mu > 40 \end{matrix}$$

اذا كان الوسط الحسابي لعينة حجمها $(n = 81)$ علبة هو $(\bar{X} = 42)$ ، بانحراف معياري $(S = 6)$

الحل: لاحظ ان التباين للمجتمع غير معلوم وان حجم العينة كبير لذلك نستعمل احصاءة الاختبار Z_{cal}

$$x_i \sim N(\mu = 40, \sigma^2)$$

$$Z_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = \text{Given}$$

$$Z_{cal} = \frac{42 - 40}{\left(\frac{6}{\sqrt{81}}\right)} = \frac{2}{\left(\frac{6}{9}\right)} = 2 * \frac{9}{6} = 3 \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{\alpha=0.05} = 1.64$$

القرار : طالما ان القيمة المحسوبة لاحصاءة الاختبار Z هي اكبر من القيمة الجدولية ، نرفض الفرضية $H_0: \mu \le 40$

السؤال الخامس: على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ اختبر الفرضية:

$$\text{versus} \quad \begin{matrix} H_0: \mu = 18 \\ H_1: \mu \ne 18 \end{matrix}$$

اذا كان الوسط الحسابي لعينة حجمها $(n = 64)$ علبة هو $(\bar{X} = 12)$ ، بانحراف معياري $(S = 4)$

الحل: لاحظ ان التباين للمجتمع غير معلوم وان حجم العينة كبير لذلك نستعمل احصاءة الاختبار Z_{cal}

$x_i \sim N(\mu = 18, \sigma^2)$

$$Z_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = \text{Given}$$

$$Z_{cal} = \frac{12 - 18}{\left(\frac{4}{\sqrt{64}}\right)} = \frac{-6}{\left(\frac{4}{8}\right)} = -6 * \frac{8}{4} = -12 \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{\frac{\alpha}{2}=0.025} = 1.96$$

القرار : طالما ان القيمة المطلقة المحسوبة لاحصاءة الاختبار Z هي اكبر من القيمة الجدولية ، نرفض الفرضية $H_0: \mu = 18$

الحالة الثالثة : اختبار الفرضية التالية ، في حالة ان التباين للمجتمع غير معلوم فإن احصاءة الاختبار هي $\mathbf{t_{cal}}$ وللعينات الصغيرة فقط.

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$\text{if } \sigma^2: \text{unknown} \quad \text{and } n \leq 30 \;\; \text{then:}$$

$$\mathbf{t_{cal}} = \frac{\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0}{\left(\frac{\mathbf{s}}{\sqrt{\mathbf{n}}}\right)} \quad , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{t_{tab}} \textbf{ is Given}$$

القرار : نقارن بين القيمة المحتسبة لاحصاءة الاختبار مع القيمة المستخرجة من الجداول فاذا كانت القيمة المحسوبة $\mathbf{t_{cal}}$ اكبر من او يساوي القيمة الجدولية $\mathbf{t_{tab}}$ هذا يعني وقعت في منطقة رفض الفرضية الصفرية $H_0: \mu = \mu_0$.

مثال (18): قام احد الباحثين بدراسة حول متوسط اعمار مجموعة من المرضى المصابين بمرض ترهل البطين الايمن من خلال عينة من هؤلاء المرضى لحجم (20) مريض تم اختيارهم من مجتمع بمتوسط عمر (60) وتباين غير معلوم ، وبعد قياس اعمار المرضى تم حساب الوسط الحسابي والتباين حيث كان (55) سنة ، (64) على التوالي.

اختبر هل ان متوسط العينة يختلف عن متوسط المجتمع عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

الحل: نلاحظ ان التباين غير معلوم وان حجم العينة صغير ففي هذه الحالة نستعمل احصاءة الاختبار $\mathbf{t_{cal}}$ وعلى النحو الاتي:

$$\begin{array}{ll} & \mathbf{H_0: \boldsymbol{\mu} = 60} \\ \textbf{versus} & \\ & \mathbf{H_1: \boldsymbol{\mu} \neq 60} \end{array}$$

$$t_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad t_{0.025} \Longrightarrow t_{0.975,19} = \mathbf{2.093}$$

$$t_{cal} = \frac{\mathbf{55 - 60}}{\left(\frac{\mathbf{8}}{\sqrt{\mathbf{20}}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad t_{0.975,19} = \mathbf{2.093}$$

$$t_{cal} = \frac{\mathbf{-5}}{\left(\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{4.472}}\right)} = -\mathbf{5} * \frac{\mathbf{4.472}}{\mathbf{8}} = -\mathbf{2.795} \quad , \qquad \text{and} \quad t_{0.975,19} = \mathbf{2.093}$$

$$|t_{cal}| = \mathbf{2.795} \quad , \qquad \text{and} \quad t_{0.975,19} = \mathbf{2.093}$$

القرار : طالما ان القيمة المطلقة المحسوبة لاحصاءة الاختبار t هي اكبر من القيمة الجدولية ، نرفض الفرضية $\mathbf{H_0: \mu = 60}$

السؤال السادس: استنتج احد الباحثين ان معدل عدد الساعات التي يقضيها طلبة احدى الجامعات في الدراسة اثناء اسبوع الامتحانات 40 ساعة ، اختبر هذه الفرضية مقابل ان معدل عدد الساعات تختلف عن 40 ساعة ، اذا كان عدد الساعات التي قضاها 16 طالب اثناء ذلك الاسبوع هو 42 وبانحراف معياري 6 ، استعمل مستوى دلالة 0.05 وافترض ان توزيع عدد الساعات الدراسية تقريباً طبيعي؟

الحل: نلاحظ ان التباين للمجتمع غير معلوم وان حجم العينة صغير ففي هذه الحالة نستعمل احصاءة الاختبار t_{cal} وعلى النحو الاتي:

$$\text{versus}\quad \begin{matrix} H_0: \mu = 40 \\ H_1: \mu \neq 40 \end{matrix}$$

$$t_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad t_{0.025} \Rightarrow t_{0.975,19} = 2.093$$

$$t_{cal} = \frac{55 - 60}{\left(\frac{8}{\sqrt{20}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad t_{0.975,19} = 2.093$$

$$t_{cal} = \frac{-5}{\left(\frac{8}{4.472}\right)} = -5 * \frac{4.472}{8} = -2.795 \quad , \qquad \text{and} \quad t_{0.975,19} = 2.093$$

$$|t_{cal}| = 2.795 \quad , \qquad \text{and} \quad t_{0.975,19} = 2.093$$

القرار : طالما ان القيمة المطلقة المحسوبة لاحصاءة الاختبار t هي اكبر من القيمة الجدولية ، نرفض الفرضية $H_0: \mu = 60$

السؤال السابع: كان معدل تحصيل طلبة احدى المدارس الخاصة في امتحانات اللغة الانكليزية الذين يتقدمون له عن طلب الالتحاق بإحدى الجامعات 300 : اختبر فرضية ان هذا المعدل قد تحسن اذا اعطت نتائج 15 طالباً وسطاً حسابياً $\bar{x} = 310$ ، وانحرافاً معيارياً $s = 50$ ، اعتبر ان نتائج طلبة المدارس تخضع لتوزيع طبيعي وخذ مستوى دلالة 0.05 ؟

الحل: نلاحظ ان التباين للمجتمع غير معلوم وان حجم العينة صغير ففي هذه الحالة نستعمل احصاءة الاختبار $\mathbf{t_{cal}}$ وعلى النحو الاتي:

$$\text{versus}\quad \begin{matrix} \mathbf{H_0: \mu = 300} \\ \mathbf{H_1: \mu > 300} \end{matrix}$$

$$t_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad t_{0.05} \Rightarrow t_{0.05,15} = \mathbf{1.753}$$

$$t_{cal} = \frac{\mathbf{310 - 300}}{\left(\frac{\mathbf{50}}{\sqrt{\mathbf{15}}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad t_{0.05} \Rightarrow t_{0.05,15} = \mathbf{1.753}$$

$$t_{cal} = \frac{\mathbf{10}}{\left(\frac{\mathbf{50}}{\mathbf{3.873}}\right)} = \mathbf{10} * \frac{\mathbf{3.873}}{\mathbf{50}} = \mathbf{0.775} \quad , \qquad \text{and} \quad t_{0.05} \Rightarrow t_{0.05,15} = \mathbf{1.753}$$

القرار : طالما ان القيمة المحسوبة لاحصاءة الاختبار t هي اصغر من القيمة الجدولية ، نقبل الفرضية $\mathbf{H_0: \mu = 300}$ اي ان المعدل بقي كما هو ولم يتحسن وفقاً للمعطيات.