# المقارنات المتعددة: (Multiple Comparisons Method)

ان اختبار F من خلال جدول تحليل التباين يتيح لنا بصورة عامة امكانية معرفة معنوية الفروق بين المجموعات من عدمها ، ولكن لا يحدد اي من المجموعات هي التي تسببت اكثر من غيرها في تكوين هذه الفروق ، ان طرائق المقارنات المتعددة تحدد اي من المجموعات هي الاكثر في سبب معنوية الفروق فيما بينها وتعتمد على جدول تحليل التباين وهي :

- **الطرائق التي تعتمد على حساب قيمة اختبارية واحدة**

❖ **طريقة الفرق المعنوي الاصغر: (Least Significant Difference)**

**ان فكرة اختبار معنوية الفروق من عدمها تعتمد على مقارنة الفرق $d_i$ بين متوسطي نتائج اي مجموعتين ( المتوسط الاكبر مطروحاً من المتوسط الاصغر ) مع قيمة جدولية يشار اليها بالرمز $LSd_\alpha$ وان هذه القيمة يتم احتسابها ايضا وفق الصيغة الاتية:**

$$\mathbf{LSd_\alpha = t_{\alpha,dfe} * \sqrt{MSe\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

**حيث ان:**

- $\mathbf{LSd_\alpha}$ **: قيمة الفرق المعنوي الاصغر عند مستوى معنوية $(\alpha)$.**
- $\mathbf{t_{\alpha,dfe}}$ **: قيمة (t) الجدولية عند مستوى معنوية $(\alpha)$ ودرجة حرية الخطأ.**
- **MSe : متوسط مربعات الخطأ.**
- $n_1, n_2$ **: عدد المشاهدات لكل من المجموعتين الداخلتين في الاختبار.**

**المقارنة :**

- $d_i \geq \mathbf{LSd_\alpha}$ **الفرق معنوي بين المجموعتين أي ان المجموعة التي لها متوسط اكبر ذات تأثير معنوي.**
- $d_i < \mathbf{LSd_\alpha}$ **الفرق غير معنوي أي ان المجموعتين لهما تأثير متساوي ولا يوجد فرق في استعمال أي منهما.**

ملاحظـة: يفضـل اسـتعمال طريقـة الفـرق المعنـوي الاصـغر عنـدما يكـون عـدد المجموعـات صـغير وهـذا يرتبط بمفهوم قوة الاختبار لذلك يفضل استعمال طرائق اخرى في حالة زيادة عدد المجموعات.

مثـــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــال: اذا علمـــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــت ان $\mathbf{t_{0.05,12} = 2.179}$ ، وان جدول تحليل التباين هو:

| ANOVA | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Source of Variation** | **SS** | **df** | **MS** | **F** | **P-value** | **F crit** |
| **Between Groups** | **413.92** | **3** | **137.973** | **13.797** | | **4.75** |
| **Within Groups** | **120** | **12** | **10** | | | |
| | | | | | | |
| **Total** | **533.92** | **15** | | | | |

طبق طريقة **الفرق المعنوي الاصغر** LSD واختبر الفرق المتوسط لكل مما يلي:

1. للمجموعة الاولى والثانية .
2. للمجموعة الاولى والثالثة .
3. للمجموعة الاولى والرابعة .

$\bar{x}_{1.} = 8$
$\bar{x}_{2.} = 4.8$
$\bar{x}_{3.} = 14$
$\bar{x}_{4.} = 0$

**الحل:**

$$\mathbf{n = n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 4}$$

$$\mathbf{LSd_{\alpha} = t_{\alpha,dfe} * \sqrt{MSe\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$\mathbf{LSd_{\alpha}} = 2.179 * \sqrt{10\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)} = 2.179 * \sqrt{5} = 2.179 * 2.236 = 4.872$$

$$\mathbf{d_1} = |\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{2.}| = |8 - 4.8| = 3.2 < 4.872$$

وعليه فإن $\mathbf{d_1}$ غير معنوي.

$$\mathbf{d_1} = |\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{3.}| = |8 - 14| = 6 > 4.872$$

وعليه فإن $\mathbf{d_2}$ معنوي.

$$\mathbf{d_3} = |\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{4.}| = |8 - 4.8| = 3.2 < 4.872$$

وعليه فإن $\mathbf{d_3}$ غير معنوي.

### ❖ طريقة شفي: (Sheffe)

**ان الصيغة الاختبارية لهذه الطريقة تعطى وفق الصيغة الاتية:**

$$\mathbf{S} = \sqrt{(t-1)F_{\alpha,dft,dfe}\ MSe\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

**حيث ان:**

**$S$ : قيمة اختبارية عند مستوى معنوية $(\alpha)$.**

**$F_{\alpha,dft,dfe}$ : قيمة (F) الجدولية عند مستوى معنوية $(\alpha)$ ودرجتي حرية بين المجموعات والخطأ.**

**$MSe$ : متوسط مربعات الخطأ.**

**$n_1, n_2$ : عدد المشاهدات لكل من المجموعتين الداخلتين في الاختبار.**

**المقارنة :**

**$d_i \geq S$ الفرق معنوي بين المجموعتين أي ان المجموعة التي لها متوسط اكبر ذات تأثير معنوي.**

**$d_i < S$ الفرق غير معنوي أي ان المجموعتين لهما تأثير متساوي ولا يوجد فرق في استعمال أي منهما.**

مثـــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــال: اذا علمـــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــت ان

ان جدول تحليل التباين هو:

| ANOVA | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Source of Variation** | **SS** | **df** | **MS** | **F** | **P-value** | **F crit** |
| **Between Groups** | **413.92** | **3** | **137.973** | **13.797** | | **4.75** |
| **Within Groups** | **120** | **12** | **10** | | | |
| | | | | | | |
| **Total** | **533.92** | **15** | | | | |

واذا علمت ان:

$$\bar{x}_{1.} = 8 \quad \bar{x}_{2.} = 4.8 \quad \bar{x}_{3.} = 14 \quad \bar{x}_{4.} = 0$$

طبق طريقة شفي **S** واختبر الفرق المتوسط لكل مما يلي:

1. للمجموعة الاولى والثانية .
2. للمجموعة الاولى والثالثة .
3. للمجموعة الثانية والثالثة .

**الحل:**

$$\mathbf{n = n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 4}$$

$$\mathbf{S = \sqrt{(t-1)F_{\alpha,dft,dfe}\ MSe\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$\mathbf{S = \sqrt{(3)(4.75)(10)\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{71.25} = 8.441}$$

$$\bar{x}_{1.} = 8 \quad \bar{x}_{2.} = 4.8 \quad \bar{x}_{3.} = 14 \quad \bar{x}_{4.} = 0$$

$$\mathbf{d_1 = |\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{2.}| = |8 - 4.8| = 3.2 < 8.441}$$

وعليه فإن $\mathbf{d_1}$ غير معنوي.

$$\mathbf{d_1 = |\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{3.}| = |8 - 14| = 6 < 8.441}$$

وعليه فإن $\mathbf{d_2}$ غير معنوي.

$$\mathbf{d_3 = |\bar{x}_{2.} - \bar{x}_{3.}| = |4.8 - 14| = 9.2 < 8.441}$$

وعليه فإن $\mathbf{d_3}$ معنوي.

## ❖ طريقة توكي: (Tukey)

**ان الصيغة الاختبارية لهذه الطريقة تعطى وفق الصيغة الاتية:**

$$T = SNK_{\alpha,t}\sqrt{\frac{MSe}{2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

**حيث ان:**

**T : قيمة اختبارية عند مستوى معنوية $(\alpha)$.**

**$SNK_{\alpha,t}$ : قيمة $(SNK_{\alpha,t})$ الجدولية عند مستوى معنوية $(\alpha)$ وعدد المجموعات.**

**MSe : متوسط مربعات الخطأ.**

**$n_1, n_2$ : عدد المشاهدات لكل من المجموعتين الداخلتين في الاختبار.**

**المقارنة :**

**$d_i \geq T$ الفرق معنوي بين المجموعتين أي ان المجموعة التي لها متوسط اكبر ذات تأثير معنوي.**

**$d_i < T$ الفرق غير معنوي أي ان المجموعتين لهما تأثير متساوي ولا يوجد فرق في استعمال أي منهما.**

مثـــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــال: اذا علمـــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــت ان ان جدول تحليل التباين هو:

| ANOVA | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Source of Variation | SS | df | MS | F | P-value | F crit |
| Between Groups | 220 | 4 | 55 | 9.167 | | 3.48 |
| Within Groups | 60 | 10 | 6 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 280 | 14 | | | | |

واذا علمت ان:

$\bar{x}_{1.} = 11 \quad \bar{x}_{2.} = 8 \quad \bar{x}_{3.} = 12 \quad \bar{x}_{4.} = 16$ و $\mathbf{SNK_{\alpha,t} = 4.65}$

طبق طريقة توكي **T** واختبر معنوية الفروق بين المتوسطات لكل مما يلي:

1. للمجموعة الاولى والثانية .
2. للمجموعة الاولى والثالثة .
3. للمجموعة الثانية والثالثة .
4. للمجموعة الثانية والرابعة .

**الحل:**

$t - 1 = 4 \Longrightarrow t = 5$
$nt - 1 = 14 \Longrightarrow 5n = 15 \Longrightarrow n = 3$

$$\mathbf{n = n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = 3}$$

$$\mathbf{T = SNK_{\alpha,t}\sqrt{\frac{MSe}{2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$\mathbf{T = (4.65)\sqrt{\frac{6}{2}\left(\frac{2}{3}\right)} = 6.576}$$

$\bar{x}_{1.} = 11 \quad \bar{x}_{2.} = 8 \quad \bar{x}_{3.} = 12 \quad \bar{x}_{4.} = 16$

$$\mathbf{d_1 = |\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{2.}| = |11 - 8| = 3 < 6.576}$$

وعليه فإن $\mathbf{d_1}$ غير معنوي.

$$\mathbf{d_2 = |\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{3.}| = |11 - 12| = 1 < 6.576}$$

وعليه فإن $\mathbf{d_2}$ غير معنوي.

$$\mathbf{d_3 = |\bar{x}_{2.} - \bar{x}_{3.}| = |8 - 12| = 4 < 6.576}$$

وعليه فإن $\mathbf{d_3}$ غير معنوي.

$$\mathbf{d_4 = |\bar{x}_{2.} - \bar{x}_{4.}| = |8 - 16| = 8 > 6.576}$$

وعليه فإن $\mathbf{d_4}$ معنوي.

### ❖ طريقة دنكان للمدى المتعدد: (Duncan Multiple Range)

ان الصيغة الاختبارية لهذه الطريقة تعتمد حساب عدة قيم لما يسمى بالمدى المعنوي الاصغر $(Least\ Significant\ Range)$ ويشار اليه بالرمز $LSR$ تعطى وفق الصيغة الاتية:

$$LSR_{\alpha} = SR_{\alpha}\sqrt{\frac{MSe}{n}}$$

حيث ان:

$LSR_{\alpha}$ : قيمة اختبارية عند مستوى معنوية $(\alpha)$.

$SR_{\alpha}$ : قيمة $(SR_{\alpha})$ الجدولية عند مستوى معنوية $(\alpha)$ وحسب المدى بين كل مجموعتين.

$MSe$ : متوسط مربعات الخطأ.

$n$ : عدد المشاهدات لكل من المجموعات الداخلة في الاختبار.

المقارنة :

$d_i \geq LSR_{\alpha}$ الفرق معنوي بين المجموعتين أي ان المجموعة التي لها متوسط اكبر ذات تأثير معنوي.

$d_i < LSR_{\alpha}$ الفرق غير معنوي أي ان المجموعتين لهما تأثير متساوي ولا يوجد فرق في استعمال أي منهما.

مثال: اذا علمت ان جدول تحليل التباين هو:

| ANOVA | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Source of Variation | SS | df | MS | F | P-value | F crit |
| Between Groups | 114 | 4 | 28.5 | 6.63 | | 2.87 |
| Within Groups | 86 | 20 | 4.3 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 200 | 24 | | | | |

واذا علمت ان:

$$\bar{x}_{1.} = 2 \quad \bar{x}_{2.} = 3 \quad \bar{x}_{3.} = 5 \quad \bar{x}_{4.} = 6 \quad \bar{x}_{5.} = 8$$

$$\mathbf{R_2 = 2} \qquad \mathbf{R_3 = 3} \qquad \mathbf{R_4 = 4} \quad \mathbf{R_5 = 5}$$
$$\mathbf{S.R = 2.95} \quad \mathbf{S.R = 3.1} \quad \mathbf{S.R = 3.18} \quad \mathbf{S.R = 3.25}$$

طبق طريقة دنكان **T** واختبر معنوية الفروق بين المتوسطات لجميع الحالات الممكنة.

الحل:

$t - 1 = 4 \Longrightarrow t = 5$
$nt - 1 = 24 \Longrightarrow 5n = 25 \Longrightarrow n = 5$

$$\mathbf{n = n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = 5}$$

$$\mathbf{LSR_\alpha = SR_\alpha \sqrt{\frac{MSe}{n}} = SR_\alpha \sqrt{\frac{4.3}{5}} = SR_\alpha (0.93)}$$

$\bar{x}_{1.} = 2 \quad \bar{x}_{2.} = 3 \quad \bar{x}_{3.} = 5 \quad \bar{x}_{4.} = 6 \quad \bar{x}_{5.} = 8$

**ملاحظة: يتم حساب المدى وكما يلي:**

**للمقارنة بين المتوسط الاول والثاني = 2 ( أي خطوتين) ، وكذلك للمقارنة بين المتوسط الثاني والثالث = 2 ، وكذلك للمقارنة بين المتوسط الثالث والرابع = 2 ، وكذلك للمقارنة بين المتوسط الرابع والخامس = 2**

**للمقارنة بين المتوسط الاول والثالث = 3 ( أي ثلاثة خطوات) ، وكذلك للمقارنة بين المتوسط الثاني والرابع =3 ، وكذلك للمقارنة بين المتوسط الثالث والخامس = 3**

**للمقارنة بين المتوسط الاول والرابع = 4 ( أي اربعة خطوات) ، وكذلك للمقارنة بين المتوسط الثاني والخامس = 4**

**للمقارنة بين المتوسط الاول والخامس = 5 ( أي خمسة خطوات)**

$\bar{x}_{1.} = 2 \quad \bar{x}_{2.} = 3 \quad \bar{x}_{3.} = 5 \quad \bar{x}_{4.} = 6 \quad \bar{x}_{5.} = 8$

$\mathbf{R_2 = 2} \quad \mathbf{R_3 = 3} \quad \mathbf{R_4 = 4} \quad \mathbf{R_5 = 5}$
$\mathbf{S.R = 2.95} \quad \mathbf{S.R = 3.1} \quad \mathbf{S.R = 3.18} \quad \mathbf{S.R = 3.25}$

$$\mathbf{LSR_\alpha = SR_\alpha \sqrt{\frac{MSe}{n}} = SR_\alpha \sqrt{\frac{4.3}{5}} = SR_\alpha (0.93)}$$

**نستنتج ونكون الجدول الاتي لحساب $LSR_\alpha$ لجميع الحالات الممكنة**

| | Range | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | 5 |
| S.R | 2.95 | 3.1 | 3.18 | 3.25 |
| L.S.R | (2.95)(0.93) = 2.74 | (3.1)(0.93) = 2.88 | (3.18)(0.93) = 2.96 | (3.25)(0.93) = 3.02 |

$$\mathbf{d_1 = |\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{2.}| = |2-3| = 1 < L.S.R = 2.74}$$

وعليه فإن $\mathbf{d_1}$ غير معنوي.

$$\mathbf{d_2 = |\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{3.}| = |2-5| = 3 > L.S.R = 2.88}$$

وعليه فإن $\mathbf{d_2}$ معنوي.

$$\mathbf{d_3 = |\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{4.}| = |2-6| = 4 > L.S.R = 2.96}$$

وعليه فإن $\mathbf{d_3}$ معنوي.

$$\mathbf{d_4 = |\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{5.}| = |2-8| = 6 > L.S.R = 3.02}$$

وعليه فإن $\mathbf{d_4}$ معنوي.

$$\mathbf{d_5 = |\bar{x}_{2.} - \bar{x}_{3.}| = |3-5| = 2 < L.S.R = 2.74}$$

وعليه فإن $\mathbf{d_5}$ غير معنوي.

$$\mathbf{d_6 = |\bar{x}_{2.} - \bar{x}_{4.}| = |3-6| = 3 > L.S.R = 2.88}$$

وعليه فإن $\mathbf{d_6}$ معنوي.

$$\mathbf{d_7 = |\bar{x}_{2.} - \bar{x}_{5.}| = |3-8| = 5 > L.S.R = 2.96}$$

وعليه فإن $\mathbf{d_7}$ معنوي.

$$\mathbf{d_8 = |\bar{x}_{3.} - \bar{x}_{4.}| = |5-6| = 1 < L.S.R = 2.74}$$

وعليه فإن $\mathbf{d_8}$ غير معنوي.

$$\mathbf{d_9 = |\bar{x}_{3.} - \bar{x}_{5.}| = |5-8| = 3 > L.S.R = 2.88}$$

وعليه فإن $\mathbf{d_9}$ معنوي.

$$\mathbf{d_{10} = |\bar{x}_{4.} - \bar{x}_{5.}| = |6-8| = 2 < L.S.R = 2.74}$$

وعليه فإن $\mathbf{d_{10}}$ غير معنوي.

## ❖ طريقة دونت: (Dunnet)

**هذه الطريقة لها اهمية كبيرة اذ تستعمل لاختبار معنوية الفرق بين متوسط معالجة سيطرة او مراقبة وان الصيغة الاختبارية**

$$\mathbf{d' = t_{Dunnet}\sqrt{MSe\left(\frac{1}{n_c}+\frac{1}{n_i}\right)}}$$

**حيث ان:**

$\mathbf{d'}$ **: قيمة اختبارية عند مستوى معنوية** $(\alpha)$.

$\mathbf{t_{Dunnet}}$ **: قيمة جدولية عند مستوى معنوية** $(\alpha)$ **ودرجة حرية الخطأ وعدد المجموعات عدا مجموعة السيطرة او المراقبة.**

$\mathbf{MSe}$ **: متوسط مربعات الخطأ.**

$n_c$ **: عدد المشاهدات لمجموعة السيطرة.**

$n_i$ **: عدد المشاهدات للمجموعة المراد مقارنتها مع مجموعة السيطرة.**

**المقارنة :**

$d_i \geq \mathbf{d'}$ **الفرق معنوي .**

$d_i < \mathbf{d'}$ **الفرق غير معنوي.**

مثـــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــال: اذا علمـــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــت ان

ان جدول تحليل التباين هو:

| ANOVA | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Source of Variation** | **SS** | **df** | **MS** | **F** | **P-value** | **F crit** |
| **Between Groups** | **65** | **3** | **21.667** | **4.33** | | **3.24** |
| **Within Groups** | **80** | **16** | **5** | | | |
| | | | | | | |
| **Total** | **145** | **19** | | | | |

واذا علمت ان:

$\bar{x}_{1.} = 3 \quad \bar{x}_{2.} = 5 \quad \bar{x}_{3.} = 6 \quad \bar{x}_{4.} = 8$

وان

$$\mathbf{t_{Dunnet}} = 2.93$$

طبق طريقة دونت (Dunnett) واختبر الفرق بين متوسط كل مجموعة ومتوسط مجموعة السيطرة (معتبراً ان المجموعة الاولى هي مجموعة السيطرة).

الحل:

$$t - 1 = 3 \Longrightarrow t = 4$$
$$nt - 1 = 19 \Longrightarrow 4n = 20 \Longrightarrow n = 5$$

$$\mathbf{n = n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 5}$$

$$\mathbf{d' = t_{Dunnet}\sqrt{MSe\left(\frac{1}{n_c} + \frac{1}{n_i}\right)}}$$

$$\mathbf{d' = 2.93\sqrt{5\left(\frac{2}{5}\right)} = 4.14}$$

$$\mathbf{\bar{x}_{1.} = 3 \quad \bar{x}_{2.} = 5 \quad \bar{x}_{3.} = 6 \quad \bar{x}_{4.} = 8}$$

$$\mathbf{d_1 = |\bar{x}_{2.} - \bar{x}_{c=1}| = |5 - 3| = 2 < 4.14}$$

وعليه فإن $\mathbf{d_1}$ غير معنوي.

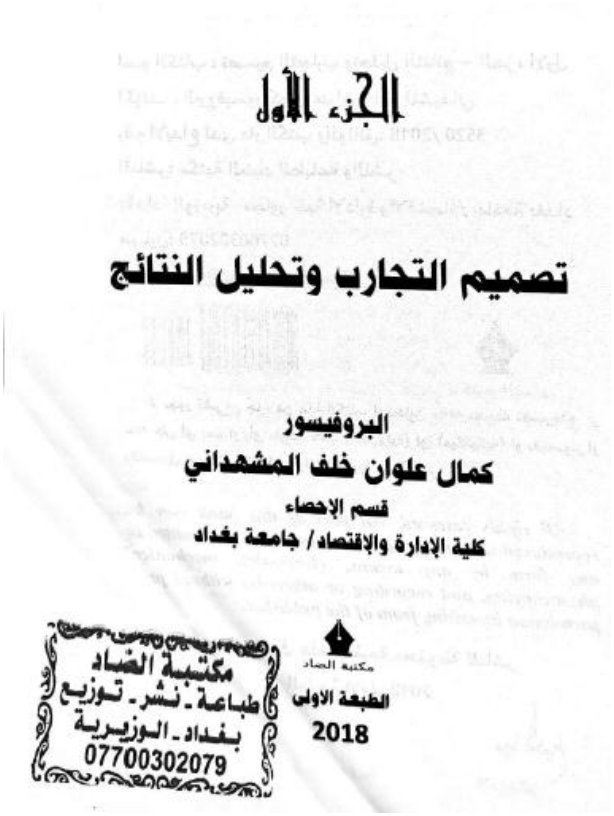
$$\mathbf{d_2 = |\bar{x}_{3.} - \bar{x}_{c=1}| = |6 - 3| = 3 < 4.14}$$

وعليه فإن $\mathbf{d_2}$ غير معنوي.

$$\mathbf{d_3 = |\bar{x}_{4.} - \bar{x}_{c=1}| = |8 - 3| = 5 > 4.14}$$

وعليه فإن $\mathbf{d_3}$ معنوي.

# المصدر:


الجزء الأول

تصميم التجارب وتحليل النتائج

البروفيسور

كمال علوان خلف المشهداني

قسم الإحصاء

كلية الإدارة والإقتصاد / جامعة بغداد

مكتبة الضاد

طباعة - نشر - توزيع

بغداد - الوزيرية

07700302079

مكتبة الضاد

الطبعة الاولى

2018