الفصل الرابع : اختبارات التباين

➢ اختبارات التباين

1. اختبار تباين مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي.
2. اختبار تجانس تباينين.
3. اختبار تجانس عدة تقديرات مستقلة لتباين المجتمع.

اولاً : اختبار تباين مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي.

لنفترض ان $x_1, x_2, \dots, x_n$ تمثل قياسات مفردات عينة عشوائية تم اختيارها من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي $x_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ اي ان الوسط هو μ والتباين σ^2 ، فاذا افترضنا ان σ^2 : مجهول (غير معلوم)

ولنفترض ان S^2 يمثل تباين العينة وعلى فرض اننا نرغب باختبار ان تباين المجتمع الطبيعي يساوي قيمة معينة ، هذا يعني ان فرضية العدم تكتب على النحو الاتي:

اذا كان تباين المجتمع ويشار اليه بـ σ^2 غير معلوم سوف يتم استخدام اختبار χ_{cal} مهما كانت حجم العينة سواء كانت عينة من النوع الصغير او من النوع الكبير

$$\mathbf{H_0}: \boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{\sigma_0}^2$$

$$\text{if } \sigma^2: \text{known} \quad \text{and } n > 30 \text{ or } n \leq 30 \text{ then:}$$

$$\chi^2_{\text{cal}} = \frac{(\mathbf{n}-\mathbf{1})\boldsymbol{S}^2}{\boldsymbol{\sigma_0}^2}$$

حيث ان:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

سؤال: وضح بالرسم منطقة الرفض والقبول بشأن الفرضية $H_0: \sigma^2 = \sigma_0{}^2$ ، ولجميع الحالات الممكنة ضد الفرضية البديلة.

مثال (28): في مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية لوحظ ومن خلال الخبرة السابقة بأن الانحراف المعياري لعمر نوع معين من المصابيح المنتجة هو $(\sigma_0 = 180)$ ساعة ، ولغرض التأكد من ان نوعية المنتج لا يزال كما هو بالرغم من تقادم الزمن (بمعنى اخر ان تشتت عمر المصباح المنتج لا يزال كما هو) ، تم اختيار عينة عشوائية من هذه المصابيح وبحجم (n=51) مصباح وتم فحصها ، حيث لوحظ ان الانحراف المعياري لبيانات عمر المصباح الخاصة بالعينة المختارة كان $(S = 205)$ ساعة ، هل تعتقد بأن انتاج هذا المصنع حافظ على جودته عند مستوى معنوية $(\alpha = 0.05)$.

الحل:

$$V.S \quad \begin{matrix} H_0: \sigma^2 = {\sigma_0}^2 \\ H_1: \sigma^2 > {\sigma_0}^2 \end{matrix} \qquad \Rightarrow V.S \quad \begin{matrix} H_0: \sigma^2 = (180)^2 \\ H_1: \sigma^2 > (180)^2 \end{matrix}$$

$$\chi^2_{cal} = \frac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2} = \frac{50(205)^2}{(180)^2} = \frac{2101250}{32400} = 64.8533950617284$$

$$\boxed{\chi^2_{cal} \cong 64.853}$$

الان، نستخرج القيمة الجدولية لاحصاءة الاختبار χ^2_{tab} ان القيمة الجدولية تحدد بالاعتماد على درجة الحرية ، ومستوى المعنوية $\chi^2_{(n-1),\alpha}$ ا ذا كان الاختبار من جانب واحد

	α														
v	0.001	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
1	10.83	7.88	6.63	5.02	[illegible]	2.71	1.32	0.45	0.10	0.02					
2	13.82	10.60	9.21	7.38	[illegible]	4.61	2.77	1.39	0.58	0.21	0.10	0.05	0.02	0.01	
3	16.27	12.84	11.34	9.35	[illegible]	6.25	4.11	2.37	1.21	0.58	0.35	0.22	0.11	0.07	0.02
4	18.47	14.86	13.28	11.14	[illegible]	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	0.71	0.48	0.30	0.21	0.09
5	20.52	16.75	15.09	12.83	[illegible]	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	0.83	0.55	0.41	0.21
6	22.46	18.55	16.81	14.45	[illegible]	10.64	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	0.87	0.68	0.38
7	24.32	20.28	18.48	16.01	[illegible]	12.02	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	0.99	0.60
8	26.12	21.95	20.09	17.53	[illegible]	13.36	10.22	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34	0.86
9	27.88	23.59	21.67	19.02	[illegible]	14.68	11.39	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73	1.15
10	29.59	25.19	23.21	20.48	[illegible]	15.99	12.55	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16	1.48
11	31.26	26.76	24.72	21.92	[illegible]	17.28	13.70	10.34	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60	1.83
12	32.91	28.30	26.22	23.34	[illegible]	18.55	14.85	11.34	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07	2.21
13	34.53	29.82	27.69	24.74	[illegible]	19.81	15.98	12.34	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57	2.62
14	36.12	31.32	29.14	26.12	[illegible]	21.06	17.12	13.34	10.17	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07	3.04
15	37.70	32.80	30.58	27.49	[illegible]	22.31	18.25	14.34	11.04	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60	3.48
16	39.25	34.27	32.00	28.85	[illegible]	23.54	19.37	15.34	11.91	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14	3.94
17	40.79	35.72	33.41	30.19	[illegible]	24.77	20.49	16.34	12.79	10.09	8.67	7.56	6.41	5.70	4.42
18	42.31	37.16	34.81	31.53	[illegible]	25.99	21.60	17.34	13.68	10.86	9.39	8.23	7.01	6.26	4.90
19	43.82	38.58	36.19	32.85	[illegible]	27.20	22.72	18.34	14.56	11.65	10.12	8.91	7.63	6.84	5.41
20	45.31	40.00	37.57	34.17	[illegible]	28.41	23.83	19.34	15.45	12.44	10.85	9.59	8.26	7.43	5.92
21	46.80	41.40	38.93	35.48	[illegible]	29.62	24.93	20.34	16.34	13.24	11.59	10.28	8.90	8.03	6.45
22	48.27	42.80	40.29	36.78	[illegible]	30.81	26.04	21.34	17.24	14.04	12.34	10.98	9.54	8.64	6.98
23	49.73	44.18	41.64	38.08	[illegible]	32.01	27.14	22.34	18.14	14.85	13.09	11.69	10.20	9.26	7.53
24	51.18	45.56	42.98	39.36	[illegible]	33.20	28.24	23.34	19.04	15.66	13.85	12.40	10.86	9.89	8.08
25	52.62	46.93	44.31	40.65	[illegible]	34.38	29.34	24.34	19.94	16.47	14.61	13.12	11.52	10.52	8.65
30	59.70	53.67	50.89	46.98	[illegible]	40.26	34.80	29.34	24.48	20.60	18.49	16.79	14.95	13.79	11.59
40	73.40	66.77	63.69	59.34	55.76	51.81	45.62	39.34	33.66	29.05	26.51	24.43	22.16	20.71	17.92
50	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	67.50	63.17	56.33	49.33	42.94	37.69	34.76	32.36	29.71	27.99	24.67
60	99.61	91.95	88.38	83.30	79.08	74.40	66.98	59.33	52.29	46.46	43.19	40.48	37.48	35.53	31.74

$$\boxed{\chi^2_{50,\alpha=0.05} \cong 67.5}$$

القرار: طالما ان القيمة المحتسبة $\boxed{\chi^2_{cal} \cong 64.853}$ **اصغر من القيمة الجدولية** $\boxed{\chi^2_{50,\alpha=0.05} \cong 67.5}$ **هذا يعني نقبل الفرضية** $H_0: \sigma^2 = (180)^2$ **لا توجد اي فروق معنوية اي ان الانتاج لا يزال محافظاً على جودتهِ (اي ان تشتت عمر المصباح لا يزال 180 ساعة بمستوى معنوية = 0.05**

مثال (29): في دراسة اجريت حول قوة شد نوع معين من الحبال ، تم اختيار عينة عشوائية من الحبال طول كل منها (1) متر ، وتم قياس قوة الشد لكل من القطع المختارة وحسب الانحراف المعياري حيث كان مساوِ الى (320) غم/ 1م ، فاذا علمت ان عدد القطع المختارة من الحبال كان (25) قطعة وان المواصفات الخاصة بالإنتاج المعتمدة توصي بأن تكون درجة الانحراف المعياري لفترة شد الحبل هي (350) غم/ 1م ، هل تعتقد بأن الانتاج مطابق للمواصفة عند مستوى معنوية $(\alpha = 0.05)$.

الحل:

$$\begin{array}{ll} & H_0: \sigma^2 = (350)^2 \\ V.S & \\ & H_1: \sigma^2 \neq (350)^2 \end{array}$$

$$\chi^2_{cal} = \frac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2} = \frac{24(320)^2}{(350)^2} = \frac{2457600}{122500} = 20.06204081632653$$

$$\boxed{\chi^2_{cal} \cong 20.062}$$

الان، نستخرج القيمة الجدولية لاحصاءة الاختبار χ^2_{tab} ان القيمة الجدولية تحدد بالاعتماد على درجة الحرية ، ومستوى المعنوية $\chi^2_{(n-1),\frac{\alpha}{2}}$ ا ذا كان الاختبار من جانبين

	α														
v	0.001	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
1	10.83	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	0.45	0.10	0.02					
2	13.82	10.60	9.21	[illegible]	5.99	4.61	2.77	1.39	0.58	0.21	0.10	0.05	0.02	0.01	
3	16.27	12.84	11.34	[illegible]	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	0.58	0.35	0.22	0.11	0.07	0.02
4	18.47	14.86	13.28	[illegible]	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	0.71	0.48	0.30	0.21	0.09
5	20.52	16.75	15.09	[illegible]	11.07	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	0.83	0.55	0.41	0.21
6	22.46	18.55	16.81	[illegible]	12.59	10.64	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	0.87	0.68	0.38
7	24.32	20.28	18.48	[illegible]	14.07	12.02	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	0.99	0.60
8	26.12	21.95	20.09	[illegible]	15.51	13.36	10.22	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34	0.86
9	27.88	23.59	21.67	[illegible]	16.92	14.68	11.39	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73	1.15
10	29.59	25.19	23.21	[illegible]	18.31	15.99	12.55	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16	1.48
11	31.26	26.76	24.72	[illegible]	19.68	17.28	13.70	10.34	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60	1.83
12	32.91	28.30	26.22	[illegible]	21.03	18.55	14.85	11.34	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07	2.21
13	34.53	29.82	27.69	[illegible]	22.36	19.81	15.98	12.34	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57	2.62
14	36.12	31.32	29.14	[illegible]	23.68	21.06	17.12	13.34	10.17	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07	3.04
15	37.70	32.80	30.58	[illegible]	25.00	22.31	18.25	14.34	11.04	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60	3.48
16	39.25	34.27	32.00	[illegible]	26.30	23.54	19.37	15.34	11.91	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14	3.94
17	40.79	35.72	33.41	[illegible]	27.59	24.77	20.49	16.34	12.79	10.09	8.67	7.56	6.41	5.70	4.42
18	42.31	37.16	34.81	[illegible]	28.87	25.99	21.60	17.34	13.68	10.86	9.39	8.23	7.01	6.26	4.90
19	43.82	38.58	36.19	[illegible]	30.14	27.20	22.72	18.34	14.56	11.65	10.12	8.91	7.63	6.84	5.41
20	45.31	40.00	37.57	[illegible]	31.41	28.41	23.83	19.34	15.45	12.44	10.85	9.59	8.26	7.43	5.92
21	46.80	41.40	38.93	[illegible]	32.67	29.62	24.93	20.34	16.34	13.24	11.59	10.28	8.90	8.03	6.45
22	48.27	42.80	40.29	[illegible]	33.92	30.81	26.04	21.34	17.24	14.04	12.34	10.98	9.54	8.64	6.98
23	49.73	44.18	41.64	[illegible]	35.17	32.01	27.14	22.34	18.14	14.85	13.09	11.69	10.20	9.26	7.53
24	[illegible]	[illegible]	[illegible]	39.36	36.42	33.20	28.24	23.34	19.04	15.66	13.85	12.40	10.86	9.89	8.08
25	52.62	46.93	44.31	40.65	37.65	34.38	29.34	24.34	19.94	16.47	14.61	13.12	11.52	10.52	8.65
30	59.70	53.67	50.89	46.98	43.77	40.26	34.80	29.34	24.48	20.60	18.49	16.79	14.95	13.79	11.59
40	73.40	66.77	63.69	59.34	55.76	51.81	45.62	39.34	33.66	29.05	26.51	24.43	22.16	20.71	17.92
50	86.66	79.49	76.15	71.42	67.50	63.17	56.33	49.33	42.94	37.69	34.76	32.36	29.71	27.99	24.67
60	99.61	91.95	88.38	83.30	79.08	74.40	66.98	59.33	52.29	46.46	43.19	40.48	37.48	35.53	31.74

$$\boxed{\chi^2_{24,\frac{\alpha}{2}=0.025} \cong 39.36}$$

القرار: طالما ان القيمة المحتسبة $\boxed{\chi^2_{cal} \cong 20.062}$ اصغر من القيمة الجدولية $\boxed{\chi^2_{24,\frac{\alpha}{2}=0.025} \cong 39.36}$ هذا يعني نقبل الفرضية $H_0: \sigma^2 = (350)^2$ لا توجد اي فروق معنوية عند مستوى معنوية $(\alpha = 0.05)$

السؤال الثاني : في احد مصانع البطاريات (للسيارات) كان الانحراف المعياري لعمر البطارية هو (80) ساعة ، تم اختيار عينة عشوائية بحجم (n=60) بطارية وحسب الانحراف المعياري لعمر البطارية فكان (80) ساعة ، هل تعتقد ان هذا المصنع قد حافظ على جودته عند مستوى معنوية $(\alpha = 0.05)$.

$$\overbrace{\textbf{the critical region} = 77.93}^{\textbf{tabulated value}}$$

الحل:

$$\mathbf{V.S}\quad \begin{matrix} \mathbf{H_0: \sigma^2 = (80)^2} \\ \mathbf{H_1: \sigma^2 > (80)^2} \end{matrix}$$

$$\chi^2_{cal} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0{}^2} = \frac{59(80)^2}{(80)^2} = 59$$

القرار: طالما ان القيمة المحتسبة $\boxed{\chi^2_{cal} \cong 59}$ اصغر من القيمة الجدولية $\boxed{\chi^2_{59,\alpha=0.05} \cong 77.93}$ هذا يعني قبول الفرضية $\mathbf{H_0: \sigma^2 = (80)^2}$ لا توجد فروق معنوية بمستوى معنوية $(\alpha = 0.05)$

السؤال الثالث: تم سحب عينة عشوائية حجمها $(n = 5)$ من مجتمع طبيعي $x_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ فأعطت انحرافاً معيارياً يساوي $(S = 17)$ على مستوى معنوية $(\alpha = 0.05)$ ، اختبر الفرضية :

$$\mathbf{V.S}\quad \begin{matrix} \mathbf{H_0: \sigma^2 = 15} \\ \mathbf{H_1: \sigma^2 \neq 15} \end{matrix}$$

الحل:

$$\mathbf{V.S}\quad \begin{matrix} \mathbf{H_0: \sigma^2 = 15} \\ \mathbf{H_1: \sigma^2 \neq 15} \end{matrix}$$

$$\chi^2_{cal} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0{}^2} = \frac{4(17)^2}{15} = \frac{1156}{15} = 77.0666666666667$$

$$\boxed{\chi^2_{cal} \cong 77.067}$$

الان، نستخرج القيمة الجدولية لاحصاءة الاختبار χ^2_{tab} ان القيمة الجدولية تحدد بالاعتماد على درجة الحرية ، ومستوى المعنوية $\chi^2_{(n-1),\frac{\alpha}{2}}$ ا ذا كان الاختبار من جانبين $\boxed{\chi^2_{4,\frac{\alpha}{2}=0.025} \cong 11.14}$

القرار: طالما ان القيمة المحتسبة $\boxed{\chi^2_{cal} \cong 77.067}$ اكبر من القيمة الجدولية $\boxed{\chi^2_{4,\frac{\alpha}{2}=0.025} \cong 11.14}$ هذا يعني نرفض الفرضية $\mathbf{H_0: \sigma^2 = 15}$ توجد فروق معنوية بمستوى معنوية $(\alpha = 0.05)$

ثانياً : اختبار تجانس تباينين: (اختبار معنوية النسبة بين تقديرين مستقلين لتباين المجتمع)

اذا كان لدينا مجتمعين طبيعيين ، المجتمع الاول بتباين (σ_1^2) غير معلوم (مجهول) ، تم سحب عينة عشوائية منه بحجم n_1 وتم حساب التباين من القياسات (المشاهدات) للعينة المسحوبة وكان (S_1^2) ، والمجتمع الثاني بتباين (σ_2^2) غير معلوم (مجهول) ، تم سحب عينة عشوائية منه بحجم n_2 وتم حساب التباين من القياسات (المشاهدات) للعينة المسحوبة وكان (S_2^2) ، وعلى افتراض ان العينتان مستقلتان .

واننا في صدد اختبار الفرضية التي تنص بأن العينتان مسحوبتان من مجتمعين طبيعيين متساوي التباين (اي ان التقديران المستقلان (S_1^2) ، (S_2^2) هما متجانسان

الفرضية للاختبار هي:

$$\mathbf{H_0}: \boldsymbol{\sigma_1^2 = \sigma_2^2}$$

ضد أي فرضية بديلة اخرى.

احصاءة الاختبار : ان معيار الاختبار للفرضية $\mathbf{H_0}: \boldsymbol{\sigma_1^2 = \sigma_2^2}$ هو $\mathbf{F_{cal}}$ ويكون وفقاً للحالتين الاتية:

الحالة الاولى: اذا كان $(S_1^2) > (S_2^2)$ ، والعينتان مستقلتان فان معيار الاختبار هو:

$$\mathbf{F_{cal}} = \frac{\mathbf{S_1^2}}{\mathbf{S_2^2}} \sim \mathbf{F(n_1 - 1, n_2 - 1)} \Longrightarrow \mathbf{F_{tab}}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n_1 - 1, n_2 - 1})$$

الحالة الثانية: اذا كان $(S_1^2) < (S_2^2)$ ، والعينتان مستقلتان فان معيار الاختبار هو:

$$\mathbf{F_{cal}} = \frac{\mathbf{S_2^2}}{\mathbf{S_1^2}} \sim \mathbf{F(n_2 - 1, n_1 - 1)} \Longrightarrow \mathbf{F_{tab}}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n_2 - 1, n_1 - 1})$$

ملاحظة : ان قيمة $\mathbf{F_{cal}}$ تكون موجبة واكبر من الواحد دائماً.

مثال (30): في تجربة معينة لمقارنة اثر نوعين من الغذاء (A) ، و(B) في زيادة وزن مجموعتين من الابقار تم تخصيص النوع (A) لعينة قوامها $(\mathbf{n_A = 8})$ وتخصيص النوع (B) لعينة بنفس العدد من الابقار اي ان $(\mathbf{n_B = 8})$ ، وبعد مضي فترة تم حساب مقدار الزيادة في وزن كل بقرة وكان التباين لمقدار الزيادة العائد للعينة الخاصة بالغذاء (A) هو $(\mathbf{S_A^2 = 5.382})$ ، وان التباين لمقدار الزيادة العائد للعينة الخاصة بالغذاء (B) هو $(\mathbf{S_B^2 = 10.563})$، اختبر الفرضية القائلة بأنه لا يوجد فرق بين تبايني الاوزان العائد في الغذائين (A) ، و(B) عند مستوى معنوية $(\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.1})$.

الحل:

$$\boldsymbol{V.S} \quad \begin{matrix} \mathbf{H_0}: \boldsymbol{\sigma_A^2 = \sigma_B^2} \\ \mathbf{H_1}: \boldsymbol{\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2} \end{matrix}$$

$$F_{cal}=\frac{S_B^2}{S_A^2}=\frac{10.563}{5.382}=1.963$$

$$F_{tab}\left(\frac{\alpha}{2}=0.05, n_1-1=7, n_2-1=7\right)=F_{tab}(0.05,7,7)=3.79$$

القرار: طالما ان القيمة المحتسبة $\boxed{F_{cal}\cong 1.963}$ اصغر من القيمة الجدولية $\boxed{F_{tab}(0.05,7,7)\cong 3.79}$ هذا يعني قبول الفرضية $H_0:\sigma_A^2=\sigma_B^2$ لا توجد فروق معنوية بين تبايني الاوزان حسب النوعية للغذاء عند مستوى معنوية $(\alpha = 0.1)$

مثال (31): في احدى المدارس (دور الحضانة) تم تغذية مجموعة من الطلبة بنوع معين من الحليب بينما المجموعة الثانية لم تتغذى بهذا النوع من الحليب وتم الحصول على المعلومات التالية بعد ان قيست اوزان المجموعتين:

$$n_1=10 \quad S_1^2=7.211$$
$$n_2=9 \quad S_2^2=1.750$$

هل يوجد سبب للاعتقاد بأن تباين الوزن للمجموعة الاولى يزيد عن تباين الفرق للمجموعة الثانية عند مستوى معنوية $(\alpha=0.5)$.

الحل:

$$V.S \quad \begin{array}{l} H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2 \\ H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2 \end{array}$$

$$F_{cal}=\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{7.211}{1.750}=4.120571428571429\cong 4.121$$

$$F_{tab}(0.05,9,8)=3.39$$

القرار: طالما ان القيمة المحتسبة $\boxed{F_{cal}\cong 4.121}$ اكبر من القيمة الجدولية $\boxed{F_{tab}(0.05,9,8)\cong 3.39}$ هذا يعني رفض الفرضية H_0 اي ان تباين المجموعة الاولى اكبر من تباين المجموعة الثانية (والسبب في ذلك ان المجموعة الاولى قد تمت تغذيتها بنوع من الحليب)

ثالثاً : اختبار تجانس عدة تقديرات مستقلة لتباين المجتمع

الفرضية للاختبار هي:

$$\mathbf{H_0}: \boldsymbol{\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_k^2 = \sigma^2}$$

ضد الفرضية $\mathbf{H_1}$ التي تنص على ان هناك على الاقل احد التباينات لا يساوي $\boldsymbol{\sigma^2}$

معيار الاختبار: ان احصاءة الاختبار الملائمة هي :

$$\chi^2_{cal} = \frac{C_1}{C_2} \sim \chi_{(k-1)} \quad \Longrightarrow \chi^2_{tab} = \chi^2_{(k-1)}$$

$$c_1 = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) \log_e \frac{S^2}{S_i^2} \Longrightarrow Note: \boxed{\log_e \frac{S^2}{S_i^2} = \ln \frac{S^2}{S_i^2}}$$

$$c_1 = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) \ln \left(\frac{S^2}{S_i^2} \right)$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) S_i^2}{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)}$$

$$c_2 = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)} \right]$$

ملاحظة: يتم تحديد اصغر واكبر تباين من (k) من التباينات ويرمز لأصغر تباين بالرمز $(\mathbf{S_S^2})$ ، **بينما** يرمز لأكبر تباين بالرمز $(\mathbf{S_L^2})$ ، **ويتم اجراء اختبار** $\mathbf{F_{cal}} = \frac{\mathbf{S_L^2}}{\mathbf{S_S^2}}$ ، فاذا ظهر بأنهُ معنوي (رفض $\mathbf{H_0}$) يتم اجراء اختبار بارتليت للتأكد .

اما اذا كان القرار بقبول $\mathbf{H_0}$ اي عدم وجود أي فروق بين هذين التباينين S_L^2 ، S_S^2 عندئذ يمكن القول بأنهُ لا يوجد فرق جوهري بين أي تباين من تباينات هذه المجموعة ، أي انها جميعها متجانسة وبالتالي لا نستخدم اختبار بارتليت.

مثال (32): لغرض اجراء دراسة لطبيعة العلاقة بين دخل الاسرة الشهري ومقدار ما تنفقه الاسرة شهرياً ، تم سحب ثلاث عينات عشوائية مستقلة ، وعلى النحو الاتي:

$\mathbf{n_1 = 32 \quad S_1^2 = 192}$
$\mathbf{n_2 = 26 \quad S_2^2 = 210}$
$\mathbf{n_3 = 35 \quad S_3^2 = 240}$

هل يمكن القول بأن العينات الثلاث مسحوبة من مجتمع طبيعي واحد تحت مستوى معنوية $(\boldsymbol{\alpha = 0.5})$

الحل:

الفرضية للاختبار هي:

الفرضية الصفرية $\mathbf{H_0}$ تنص على ان العينات الثلاث مسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه $\boldsymbol{\sigma^2}$

ضد الفرضية البديلة H_1 التي تنص على ان هناك على الاقل عينة واحدة مسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه يختلف عن $\boldsymbol{\sigma^2}$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\,S_i^2}{\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)}$$

$$S^2 = \frac{31(192) + 25(210) + 34(240)}{31 + 25 + 34} = \frac{5952 + 5250 + 8160}{90}$$

$$S^2 = \frac{19362}{90} = 215.1333333333333 \cong \boxed{215.133}$$

$$c_1 = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\log_e \frac{S^2}{S_i^2}$$

$$c_1 = 31\left[\ln\left(\frac{215.133}{192}\right)\right] + 25\left[\ln\left(\frac{215.133}{210}\right)\right] + 34\left[\ln\left(\frac{215.133}{240}\right)\right]$$

$$c_1 = 31[\ln(1.1205)] + 25[\ln(1.0244)] + 34[\ln(0.8964)]$$

$$c_1 = 31 * (0.1138) + 25 * (0.0241) + 34 * (-0.1094)$$

$$c_1 = 3.5278 + 0.6025 - 3.7196 = \boxed{0.4107}$$

$$c_2 = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)}\right]$$

$$c_2 = 1 + \frac{1}{3(3-1)}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i-1}=\frac{1}{31}+\frac{1}{25}+\frac{1}{34}=0.0323+0.04+0.0294=0.1017$$

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)}=\frac{1}{31+25+34}=\frac{1}{90}=0.0111$$

$$c_2=1+\frac{1}{6}[0.1017-0.0111]$$

$$c_2=1+\frac{1}{6}[0.0906]=1+0.0151=\boxed{1.0151}$$

$$\chi^2_{cal}=\frac{C_1}{C_2}$$

$$\chi^2_{cal}=\frac{0.4107}{1.0151}=\boxed{0.4046}\quad\Longrightarrow\chi^2_{tab}=\chi_{(\alpha=0.05,k-1=2)}=\boxed{5.99}$$

القرار: طالما ان القيمة المحتسبة χ_{cal} اصغر من القيمة الجدولية χ_{tab} هذا يعني وقعت في منطقة قبول الفرضية الصفرية ، إذاً نقبل

الفرضية الصفرية H_0 التي تنص على ان العينات الثلاث مسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه σ^2

تمرين (1): ادناه جدول يمثل اربع مجموعات وعلى النحو الاتي:

المجموعات			
المجموعة 1	المجموعة 2	المجموعة 3	المجموعة 4
6	10	7	2
3	9	3	4
9	12	8	6
	8	5	
	11	2	
	4		

اذا علمت ان :

$$\overbrace{\textbf{the critical region} = 7.81}^{\textbf{tabulated value}}$$

المطلوب: اختبار تجانس التباين للمجموعات باستخدام طريقة بارتليت.

او هل يمكن القول بأن العينات الاربع مسحوبة من مجتمع طبيعي واحد عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

الحل:

الفرضية للاختبار هي:

الفرضية الصفرية $\mathbf{H_0}$ تنص على ان العينات الاربعة مسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه $\boldsymbol{\sigma^2}$

ضد الفرضية البديلة H_1 التي تنص على ان هناك على الاقل عينة واحدة مسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه يختلف عن $\boldsymbol{\sigma^2}$

حساب المؤشرات الاحصائية:

المجموعات	المشاهدات						Σ	Mean	S_i^2
المجموعة 1	6	3	9				18	6	9
$((x_i)_1 - \bar{x}_1)^2$	0	9	9				18		
المجموعة 2	10	9	12	8	11	4	54	9	8
$((x_i)_2 - \bar{x}_2)^2$	1	0	9	1	4	25	40		
المجموعة 3	7	3	8	5	2		25	5	6.5
$((x_i)_3 - \bar{x}_3)^2$	4	4	9	0	9		26		
المجموعة 4	2	4	6				12	4	4
$((x_i)_4 - \bar{x}_4)^2$	4	0	4				8		

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\, S_i^2}{\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)} = \frac{92}{13} = 7.0769230769230769230769230769231 \cong \boxed{7.077}$$

العينات	n_i	$n_i - 1$	$\frac{1}{n_i - 1}$	S_i^2	$(n_i - 1)S_i^2$	$\frac{S^2}{S_i^2}$	$\log_e \frac{S^2}{S_i^2}$	$(n_i - 1)\log_e \frac{S^2}{S_i^2}$
العينة 1	3	2	0.5	9	18	0.7863	−0.2404	−0.4808
العينة 2	6	5	0.2	8	40	0.8846	−0.1226	−0.613
العينة 3	5	4	0.25	6.5	26	1.0888	0.0851	0.3403
العينة 4	3	2	0.5	4	8	1.7693	0.5706	1.1412
المجموع		13	1.45		92			0.3877

$$c_1 = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\log_e \frac{S^2}{S_i^2} = \boxed{0.3877}$$

$$c_2 = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)}\right] = 1 + \frac{1}{9}\left[1.45 - \frac{1}{13}\right]$$

$$c_2 = 1 + 0.111[1.45 - 0.077] = 1 + 0.1524 = \boxed{1.1524}$$

احصاءة الاختبار :

$$\chi^2_{cal} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{0.3877}{1.1524} = \boxed{0.336}$$

القرار: بما ان قيمة $\chi^2_{cal} = 0.336$ المحسوبة هي اصغر من قيمة $\chi^2_{tab} = 7.81$ الجدولية ، هذا يعني انها وقعت في منطقة قبول الفرضية الصفرية (H_0) والتي تنص على ان العينات الاربعة مسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه σ^2