اختبارات المتوسطات

- اختبارات العينة الواحدة
- اختبارات العينتين
- تحليل التباين

اختبارات العينة الواحدة

الحالة الاولى : اختبار الفرضية التالية ، في حالة ان التباين للمجتمع معلوم فإن احصاءة الاختبار هي $\mathbf{Z_{cal}}$ وللعينات الصغيرة او الكبيرة على حد سواء.

$$\mathbf{H_0: \mu = \mu_0}$$

$$\text{if } \sigma^2\text{: known} \quad \text{and } n > 30 \text{ or } n \leq 30 \text{ then:}$$

$$\mathbf{Z_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{(\sigma/\sqrt{n})}} \quad , \qquad \mathbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab} = Given}$$

القرار : نقارن بين القيمة المحتسبة لاحصاءة الاختبار مع القيمة المستخرجة من الجداول فاذا كانت القيمة المحسوبة $\mathbf{Z_{cal}}$ اكبر من او يساوي القيمة الجدولية $\mathbf{Z_{tab}}$ هذا يعني وقعت في منطقة رفض الفرضية الصفرية $\mathbf{H_0: \mu = \mu_0}$.

القرار هو رفض $\mathbf{H_0: \mu = \mu_0}$.

مثال (16): في دراسة احصائية لمعرفة متوسط المبيعات اليومي لتجارة احدى السلع الاستهلاكية في احدى المناطق ، تم اختيار (10) مخازن بشكل عشوائي حيث كانت مبيعاتها بألاف الدنانير وعلى النحو الاتي:

x_i	163	165	168	169	170	173	134	176	179	163

فإذا كان الانحراف المعياري للمبيعات هو (5) الاف دينار ، المطلوب: اختبر الفرض القائل بأن متوسط المبيعات اليومي هو (169) الف دينار بمستوى معنوية $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$.

$Z_{0.025} = 1.96$

الحل:

ملاحظة: بالرغم من ان العينة صغيرة ، ولكن الانحراف المعياري معلوم هذا يعني ان احصاءة الاختبار هي $\mathbf{Z_{cal}}$

$$H_0: \mu = 169000$$

ضد
versus

$$H_1: \mu \neq 169000$$

$$Z_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = \text{Given}$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{(163000 + 165000 + \cdots + 163000)}{10} = \frac{1660000}{10} = 166000$$

$$Z_{cal} = \frac{166000 - 169000}{(5000/\sqrt{10})} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = 1.96$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{\mathbf{-3000}}{\mathbf{(5000/3.162)}} \quad , \qquad \mathbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab} = 1.96}$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{\mathbf{-3000}}{\mathbf{1581.278}} = \mathbf{-0.897} \quad , \qquad \mathbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab} = 1.96}$$

$$|\mathbf{Z_{cal}}| = \mathbf{0.897} \quad , \qquad \mathbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab} = 1.96}$$

القرار : طالما ان القيمة المطلقة لاحصاءة الاختبار Z هي اصغر من القيمة الجدولية هذا يعني الفرق بين متوسط المبيعات اليومي والمتوسط العام غير معنوي وتقبل الفرضية $\mathbf{H_0: \mu = 169000}$ اي ان متوسط المبيعات اليومي للمجتمع هو 169 الف دينار.

مثال (17): ادعت احدى الشركات المنتجة لاحدى المواد بأن متوسط كثافة هذه المادة يزيد عن (8) علماً بأن التباين هو (6.5) ، ولغرض اجراء الاختبار لهذا المتوسط قام احد الباحثين بسحب عينة من هذه المادة وبحجم (50) مفردة وقيس الوسط الحسابي لكثافة المادة فوجد بأنه (8.775) ، المطلوب: اختبر الفرض القائل بأن ادعاء الشركة صحيح عند مستوى معنوية $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$.

$Z_{0.05} = 1.645$

الحل: لاحظ هنا ان التباين معلوم وان حجم العينة كبير و هذا يعني نستعمل احصاءة الاختبار $\mathbf{Z_{cal}}$

$$H_0: \mu \leq 8 \quad \text{ضد}$$
$$\text{versus} \quad H_1: \mu > 8$$

$$Z_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = \text{Given}$$

$$Z_{cal} = \frac{8.775 - 8}{\left(\frac{\sqrt{6.5}}{\sqrt{50}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = 1.645$$

$$Z_{cal} = \frac{0.775}{\left(\frac{2.54951}{7.07107}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = 1.645$$

$$Z_{cal} = \frac{0.775}{0.361} = 2.147 \ , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = 1.645$$

القـرار : طالمـا ان القيمـة المحسـوبة لاحصـاءة الاختبـار Z هـي اكبـر مـن القيمـة الجدوليـة ، نـرفض $\mathbf{H_0: \mu \leq 8}$ ، ونقبل الفرضية البديلة اي ان ادعاء الشركة صحيح.

السـؤال الاول: تخضـع اوزان عبـوات احـد مسـاحيق الغسـيل لتوزيـع طبيعـي انحرافـه المعيـاري $(\boldsymbol{\sigma = 8})$ غرام ومعدله $\boldsymbol{\mu}$ على مستوى دلالة $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$ اختبر الفرضية:

$$\text{versus}\quad \begin{matrix} H_0: \mu = 300 \\ H_1: \mu \neq 300 \end{matrix}$$

اذا كان الوسط الحسابي لعينة حجمها $(n = 25)$ علبة هو $(\overline{X} = 308)$ ، واذا علمت ان:

$$Z_{0.025} = 1.96$$

الحل:

ملاحظة: بالرغم من ان العينة صغيرة ، ولكن الانحراف المعياري معلوم هذا يعني ان احصاءة الاختبار هي $\mathbf{Z_{cal}}$

$$\text{versus}\quad \begin{matrix} H_0: \mu = 300 \\ H_1: \mu \neq 300 \end{matrix}$$

$$Z_{cal} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = \text{Given}$$

$$Z_{cal} = \frac{308 - 300}{\left(\frac{8}{\sqrt{25}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = 1.96$$

$$Z_{cal} = \frac{8}{\left(\frac{8}{5}\right)} = 8 * \frac{5}{8} = 5, \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = 1.96$$

القـرار : طالمـا ان القيمـة المحسـوبة لاحصـاءة الاختبـار Z هـي اكبـر مـن القيمـة الجدوليـة ، نـرفض الفرضية $H_0: \mu = 300$

السؤال الثاني: يخضع الزمن الذي يحتاجه الطالب للتسجيل في احدى الجامعات الى توزيع طبيعي انحرافه المعياري $\left(\boldsymbol{\sigma = 0.7}\right)$ ساعة ومعدله $\boldsymbol{\mu}$ ساعة على مستوى دلالة $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$ اختبر الفرضية:

$$\text{versus} \quad \begin{matrix} H_0: \mu = 5.2 \\ H_1: \mu > 5.2 \end{matrix}$$

اذا كان الوسط الحسابي لعينة حجمها $(n = 16)$ علبة هو $(\bar{X} = 5.4)$ ، واذا علمت ان:

$$Z_{0.05} = 1.64$$

الحل:

ملاحظة: بالرغم من ان العينة صغيرة ، ولكن الانحراف المعياري معلوم هذا يعني ان احصاءة الاختبار هي $\mathbf{Z_{cal}}$

$$\text{versus} \quad \begin{matrix} H_0: \mu = 5.2 \\ H_1: \mu > 5.2 \end{matrix}$$

$$Z_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = \text{Given}$$

$$Z_{cal} = \frac{5.4 - 5.2}{\left(\frac{0.7}{\sqrt{16}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = 1.64$$

$$Z_{cal} = \frac{0.2}{\left(\frac{0.7}{4}\right)} = 0.2 * \frac{4}{0.7} = 1.143, \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = 1.96$$

القرار : طالما ان القيمة المحسوبة لاحصاءة الاختبار Z هي اصغر من القيمة الجدولية ، نقبل الفرضية

$$H_0: \mu = 5.2$$

السـؤال الثالـث: اخـذت عينـة عشـوائية حجمهـا (16) مـن مجتمـع يتبـع التوزيـع الطبيعـي تباينـه $\left(\boldsymbol{\sigma}^{2} = \mathbf{144}\right)$ اختبر الفرضية:

$$\text{versus} \quad \begin{array}{l} H_0: \mu = 9 \\ H_1: \mu \neq 9 \end{array}$$

باستعمال مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ اذا كان الوسط الحسابي للعينة $(\overline{X} = 9.5)$ ، واذا علمت ان:

$$Z_{0.025} = 1.96$$

الحل:

ملاحظة: بالرغم من ان العينة صغيرة ، ولكن التباين معلوم هذا يعني ان احصاءة الاختبار هي $\mathbf{Z_{cal}}$

$$\text{versus} \quad \begin{array}{l} H_0: \mu = 9 \\ H_1: \mu \neq 9 \end{array}$$

$$Z_{cal} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = \text{Given}$$

$$Z_{cal} = \frac{9.5 - 9}{\left(\frac{12}{\sqrt{16}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = 1.64$$

$$Z_{cal} = \frac{0.5}{\left(\frac{12}{4}\right)} = 0.5 * \frac{4}{12} = 0.167, \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = 1.96$$

القـرار : طالمـا ان القيمـة المحسـوبة لاحصـاءة الاختبـار Z هـي اصـغر مـن القيمـة الجدوليـة ، نقبـل الفرضـية $H_0: \mu = 9$

الحالة الثانية : اختبار الفرضية التالية ، في حالة ان التباين للمجتمع غير معلوم فإن احصاءة الاختبار هي $\mathbf{Z_{cal}}$ وللعينات الكبيرة فقط.

$$\mathbf{H_0: \mu = \mu_0}$$

$$\text{if } \sigma^2: \text{unknown} \quad \text{and } n > 30 \text{ then:}$$

$$\mathbf{Z_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}} \quad , \qquad \mathbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab} = Given}$$

القرار : نقارن بين القيمة المحتسبة لاحصاءة الاختبار مع القيمة المستخرجة من الجداول فاذا كانت القيمة المحسوبة $\mathbf{Z_{cal}}$ اكبر من او يساوي القيمة الجدولية $\mathbf{Z_{tab}}$ هذا يعني وقعت في منطقة رفض الفرضية الصفرية $\mathbf{H_0: \mu = \mu_0}$.

القرار هو رفض $\mathbf{H_0: \mu = \mu_0}$.

حيث ان:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

سؤال: اثبت ان

$$E(s^2) = \sigma^2$$

حيث ان:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad , x_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

الحل:

$$E(s^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(E\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)$$

$$E(s^2) = \frac{1}{n-1}\left(E\left\{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - n\bar{x}^2\right\}\right) = \frac{1}{n-1}\left(nE({x_i}^2) - nE(\bar{x}^2)\right)$$

$$E(s^2) = \frac{1}{n-1}\left(n[var(x_i) + E(x_i)^2] - n[var(\bar{x}) + E(\bar{x})^2]\right)$$

$$x_i \sim N(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow \bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$E(s^2) = \frac{1}{n-1}\left(n[\sigma^2 + \mu^2] - n\left[\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right]\right) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2)$$

$$E(s^2) = \frac{1}{n-1}\sigma^2(n-1)$$

$$E(s^2) = \sigma^2 \qquad , \therefore\ s^2 = \hat{\sigma}^2 \text{ is unbaised est. for } \sigma^2$$

السؤال الرابع: **تخضع اعداد حبات البرتقال على شجرة البرتقال في مزرعة كبيرة لتوزيع طبيعي معدله $\mu = 40$ حبة على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ اختبر الفرضية:**

$$\begin{aligned} &H_0: \mu \le 40 \\ \textbf{versus}\quad &H_1: \mu > 40 \end{aligned}$$

اذا كان الوسط الحسابي لعينة حجمها $(n = 81)$ علبة هو $(\bar{X} = 42)$ ، بانحراف معياري $(S = 6)$

الحل: لاحظ ان التباين للمجتمع غير معلوم وان حجم العينة كبير لذلك نستعمل احصاءة الاختبار Z_{cal}

$$x_i \sim N(\mu = 40, \sigma^2)$$

$$\mathbf{Z_{cal}=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}}\quad,\qquad \mathbf{and}\quad \mathbf{Z_{tab}=Given}$$

$$\mathbf{Z_{cal}=\frac{42-40}{\left(\frac{6}{\sqrt{81}}\right)}=\frac{2}{\left(\frac{6}{9}\right)}=2*\frac{9}{6}=3}\quad,\qquad \mathbf{and}\quad \mathbf{Z_{\alpha=0.05}=1.64}$$

القرار : طالما ان القيمة المحسوبة لاحصاءة الاختبار Z هي اكبر من القيمة الجدولية ، نرفض الفرضية $H_0: \mu \le 40$

السؤال الخامس: على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ اختبر الفرضية:

$$\mathbf{versus}\quad \begin{matrix}\mathbf{H_0: \mu = 18}\\ \mathbf{H_1: \mu \neq 18}\end{matrix}$$

اذا كان الوسط الحسابي لعينة حجمها $(n = 64)$ علبة هو $(\bar{X} = 12)$ ، بانحراف معياري $(S = 4)$

الحل: لاحظ ان التباين للمجتمع غير معلوم وان حجم العينة كبير لذلك نستعمل احصاءة الاختبار Z_{cal}

$x_i \sim N(\mu = 18, \sigma^2)$

$$\mathbf{Z_{cal}=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}}\quad,\qquad \mathbf{and}\quad \mathbf{Z_{tab}=Given}$$

$$\mathbf{Z_{cal}=\frac{12-18}{\left(\frac{4}{\sqrt{64}}\right)}=\frac{-6}{\left(\frac{4}{8}\right)}=-6*\frac{8}{4}=-12}\quad,\qquad \mathbf{and}\quad \mathbf{Z_{\frac{\alpha}{2}=0.025}=1.96}$$

القرار : طالما ان القيمة المطلقة المحسوبة لاحصاءة الاختبار Z هي اكبر من القيمة الجدولية ، نرفض الفرضية $\mathbf{H_0: \mu = 18}$

الحالة الثالثة : اختبار الفرضية التالية ، في حالة ان التباين للمجتمع غير معلوم فإن احصاءة الاختبار هي t_{cal} وللعينات الصغيرة فقط.

$H_0: \mu = \mu_0$

$\text{if } \sigma^2: \text{unknown} \quad \text{and } n \leq 30 \text{ then:}$

$$t_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad t_{tab} \text{ is Given}$$

القرار : نقارن بين القيمة المحتسبة لاحصاءة الاختبار مع القيمة المستخرجة من الجداول فاذا كانت القيمة المحسوبة t_{cal} اكبر من او يساوي القيمة الجدولية t_{tab} هذا يعني وقعت في منطقة رفض الفرضية الصفرية $H_0: \mu = \mu_0$.

مثال (18): قام احد الباحثين بدراسة حول متوسط اعمار مجموعة من المرضى المصابين بمرض ترهل البطين الايمن من خلال عينة من هؤلاء المرضى لحجم (20) مريض تم اختيارهم من مجتمع بمتوسط عمر (60) وتباين غير معلوم ، وبعد قياس اعمار المرضى تم حساب الوسط الحسابي والتباين حيث كان (55) سنة ، (64) على التوالي.

اختبر هل ان متوسط العينة يختلف عن متوسط المجتمع عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

الحل: نلاحظ ان التباين غير معلوم وان حجم العينة صغير ففي هذه الحالة نستعمل احصاءة الاختبار t_{cal} وعلى النحو الاتي:

$$\text{versus} \quad \begin{matrix} H_0: \mu = 60 \\ H_1: \mu \neq 60 \end{matrix}$$

$$\mathbf{t_{cal}} = \frac{\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0}{\left(\frac{\mathbf{s}}{\sqrt{\mathbf{n}}}\right)} \quad , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{t_{0.025}} \Longrightarrow \mathbf{t_{0.975,19}} = \mathbf{2.093}$$

$$\mathbf{t_{cal}} = \frac{\mathbf{55 - 60}}{\left(\frac{\mathbf{8}}{\sqrt{\mathbf{20}}}\right)} \quad , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{t_{0.975,19}} = \mathbf{2.093}$$

$$\mathbf{t_{cal}} = \frac{\mathbf{-5}}{\left(\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{4.472}}\right)} = \mathbf{-5} * \frac{\mathbf{4.472}}{\mathbf{8}} = \mathbf{-2.795} \quad , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{t_{0.975,19}} = \mathbf{2.093}$$

$$|\mathbf{t_{cal}}| = \mathbf{2.795} \quad , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{t_{0.975,19}} = \mathbf{2.093}$$

القرار : طالما ان القيمة المطلقة المحسوبة لاحصاءة الاختبار t هي اكبر من القيمة الجدولية ، نرفض الفرضية $\mathbf{H_0: \mu = 60}$

السؤال السادس: استنتج احد الباحثين ان معدل عدد الساعات التي يقضيها طلبة احدى الجامعات في الدراسة اثناء اسبوع الامتحانات 40 ساعة ، اختبر هذه الفرضية مقابل ان معدل عدد الساعات تختلف عن 40 ساعة ، اذا كان عدد الساعات التي قضاها 16 طالب اثناء ذلك الاسبوع هو 42 وبانحراف معياري 6 ، استعمل مستوى دلالة 0.05 وافترض ان توزيع عدد الساعات الدراسية تقريباً طبيعي؟

الحل: نلاحظ ان التباين للمجتمع غير معلوم وان حجم العينة صغير ففي هذه الحالة نستعمل احصاءة الاختبار t_{cal} وعلى النحو الاتي:

$$\text{versus} \quad \begin{matrix} H_0: \mu = 40 \\ H_1: \mu \neq 40 \end{matrix}$$

$$t_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad t_{0.025} \Rightarrow t_{0.975,19} = 2.093$$

$$t_{cal} = \frac{55 - 60}{\left(\frac{8}{\sqrt{20}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad t_{0.975,19} = 2.093$$

$$t_{cal} = \frac{-5}{\left(\frac{8}{4.472}\right)} = -5 * \frac{4.472}{8} = -2.795 \quad , \qquad \text{and} \quad t_{0.975,19} = 2.093$$

$$|t_{cal}| = 2.795 \quad , \qquad \text{and} \quad t_{0.975,19} = 2.093$$

القرار : طالما ان القيمة المطلقة المحسوبة لاحصاءة الاختبار t هي اكبر من القيمة الجدولية ، نرفض الفرضية $H_0: \mu = 60$

السؤال السابع: كان معدل تحصيل طلبة احدى المدارس الخاصة في امتحانات اللغة الانكليزية الذين يتقدمون له عن طلب الالتحاق بإحدى الجامعات 300 : اختبر فرضية ان هذا المعدل قد تحسن اذا اعطت نتائج 15 طالباً وسطاً حسابياً $\bar{x} = 310$ ، وانحرافاً معيارياً $s = 50$ ، اعتبر ان نتائج طلبة المدارس تخضع لتوزيع طبيعي وخذ مستوى دلالة 0.05 ؟

الحل: نلاحظ ان التباين للمجتمع غير معلوم وان حجم العينة صغير ففي هذه الحالة نستعمل احصاءة الاختبار t_{cal} وعلى النحو الاتي:

$$\text{versus} \quad \begin{matrix} H_0: \mu = 300 \\ H_1: \mu > 300 \end{matrix}$$

$$t_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad t_{0.05} \Rightarrow t_{0.05,15} = 1.753$$

$$t_{cal} = \frac{310 - 300}{\left(\frac{50}{\sqrt{15}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad t_{0.05} \Rightarrow t_{0.05,15} = 1.753$$

$$t_{cal} = \frac{10}{\left(\frac{50}{3.873}\right)} = 10 * \frac{3.873}{50} = 0.775 \quad , \qquad \text{and} \quad t_{0.05} \Rightarrow t_{0.05,15} = 1.753$$

القرار : طالما ان القيمة المحسوبة لاحصاءة الاختبار t هي اصغر من القيمة الجدولية ، نقبل الفرضية $H_0: \mu = 300$ اي ان المعدل بقي كما هو ولم يتحسن وفقاً للمعطيات.

اختبارات المتوسطات

- اختبارات العينتين المستقلتين

الحالة الاولى : اختبار الفرضية التالية ، في حالة ان التباين للمجتمع معلوم فإن احصاءة الاختبار هي Z_{cal} وللعينات الصغيرة او الكبيرة على حد سواء.

$$\mathbf{H_0: \mu_1 = \mu_2 \Longrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0}$$

if σ^2: known and $n > 30$ or $n \leq 30$ then:

$$\mathbf{Z_{cal} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2{}_1}{n_1} + \frac{\sigma^2{}_2}{n_2}}}} \quad , \qquad \mathbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab} = Given}$$

القرار : نقارن بين القيمة المحتسبة لاحصاءة الاختبار مع القيمة المستخرجة من الجداول فاذا كانت القيمة المحسوبة $\mathbf{Z_{cal}}$ اكبر من او يساوي القيمة الجدولية $\mathbf{Z_{tab}}$ هذا يعني وقعت في منطقة رفض الفرضية الصفرية $\mathbf{H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0}$.

القرار هو رفض $\mathbf{H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0}$.

الحالة الثانية : اختبار الفرضية التالية ، في حالة ان التباين للمجتمع غير معلوم فإن احصاءة الاختبار هي Z_{cal} وللعينات الكبيرة فقط.

$$\mathbf{H_0: \mu_1 = \mu_2 \Longrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0}$$

if σ^2: unknown and $n > 30$ then:

$$\mathbf{Z_{cal} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S^2{}_1}{n_1} + \frac{S^2{}_2}{n_2}}}} \quad , \qquad \mathbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab} = Given}$$

القرار : نقارن بين القيمة المحتسبة لاحصاءة الاختبار مع القيمة المستخرجة من الجداول فاذا كانت القيمة المحسوبة Z_{cal} اكبر من او يساوي القيمة الجدولية Z_{tab} هذا يعني وقعت في منطقة رفض الفرضية الصفرية $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$.

القرار هو رفض $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$.

مثال (1) : اقترح احد المهندسين العاملين في احدى المعامل الانتاجية استخدام اسلوب جديد لانتاج جهاز معين ، علماً ان هناك خط عمل اخر في هذا المعمل يعتمد في انتاجه على اسلوب قديم ، ولغرض معرفة مدى فاعلية هذه الطريقة الجديدة على سرعة الانتاج ، تم اختيار عينة من خط الانتاج المقترح بحجم (20) جهاز ، واحتسب الوسط الحسابي له حيث كان (25) ساعة ، واختار عينة اخرى من الخط القديم بحجم (23) جهاز وكان وسطه الحسابي (27) ساعة ، علماً ان المعلومات المتوفرة عن المجتمعين هي ان فترة الانتاج لكلا الخطين تتوزع توزيع طبيعي بتباين للخط المقترح يساوي (2.5) ساعة وتباين للخط القديم هو (3.5) ساعة.

هل تعتقد بأن الطريقة المقترحة افضل من الطريقة القديمة عند مستوى معنوية 0.05 .

الحل:

$$\begin{array}{ll} & H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ \text{versus} & H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0 \end{array}$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{(\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2) - (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)}{\sqrt{\frac{\boldsymbol{\sigma}^2{}_1}{n_1} + \frac{\boldsymbol{\sigma}^2{}_2}{n_2}}} \quad , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab}} = \textbf{Given}$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{(\mathbf{25} - \mathbf{27}) - (\mathbf{0})}{\sqrt{\frac{\mathbf{2.5}}{\mathbf{20}} + \frac{\mathbf{3.5}}{\mathbf{23}}}} \quad , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab}} = \mathbf{1.645}$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{-\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{0.125} + \mathbf{0.152}}} \quad , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab}} = \mathbf{1.645}$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{-\mathbf{2}}{\mathbf{0.526}} = -\mathbf{3.802} \ , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab}} = \mathbf{1.645}$$

القرار : بما ان القيمة المطلقة المحسوبة Z_{cal} اكبر من القيمة الجدولية Z_{tab} هذا يعني وقعت في منطقة رفض الفرضية الصفرية.

القرار هو قبول $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ ، هذا يعني ان الطريقة المقترحة افضل من الطريقة القديمة.

مثال (2) : في دراسة معينة للمقارنة بين متوسط اعمار نوعين من المصابيح ، تم اختيار عينتين ، العينة الاولى تخص النوع الاول من المصابيح بحجم (200) مصباح حيث تم قياس متوسط عمر المصباح والانحراف المعياري حيث كانا على التوالي (1562) و (181) ، والعينة الثانية تخص النوع الثاني من المصابيح بحجم (250) مصباح حيث تم قياس متوسط عمر المصباح والانحراف المعياري لها (1611) و (177) على التوالي ، علماً ان عمر المصباح قيس بعدد ساعات الاشتغال.

هل تعتقد بأن المصباح من النوع الاول اقل جودة من المصباح التابع للنوع الثاني عند مستوى معنوية 0.01 .

الحل:

$$\begin{matrix} H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \\ \text{versus} \\ H_1: \mu_1 < \mu_2 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0 \\ \text{versus} \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0 \end{matrix}$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{(\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2) - (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)}{\sqrt{\frac{\mathbf{S^2}_1}{\boldsymbol{n}_1} + \frac{\mathbf{S^2}_2}{\boldsymbol{n}_2}}} \quad , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab}} = \textbf{Given}$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{(\mathbf{1562} - \mathbf{1611}) - (\mathbf{0})}{\sqrt{\frac{(\mathbf{181})^2}{\mathbf{200}} + \frac{(\mathbf{177})^2}{\mathbf{250}}}} \quad , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab}} = \mathbf{2.33}$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{-\mathbf{49}}{\sqrt{\mathbf{163.805} + \mathbf{125.316}}} \quad , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab}} = \mathbf{2.33}$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{-\mathbf{49}}{\mathbf{17.004}} = -\mathbf{1.882} \ , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab}} = \mathbf{2.33}$$

القرار : بما ان القيمة المطلقة المحسوبة Z_{cal} اصغر من القيمة الجدولية Z_{tab} هذا يعني وقعت في منطقة قبول الفرضية الصفرية.

القرار هو قبول $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \mathbf{0}$.

الحالة الثالثة : اختبار الفرضية التالية ، في حالة ان التباين للمجتمع غير معلوم فإن احصاءة الاختبار هي $\mathbf{t_{cal}}$ وللعينات الصغيرة فقط.

$$\mathbf{H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0}$$

if σ^2: unknown and $n \le 30$ then:

$$\mathbf{t_{cal} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}} \quad , \qquad \mathbf{and} \quad \mathbf{t_{tab} = Given}$$

$$\mathbf{S^2{}_P = \frac{(n_1 - 1)S^2{}_1 + (n_2 - 1)S^2{}_2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

القرار : نقارن بين القيمة المحتسبة لاحصاءة الاختبار مع القيمة المستخرجة من الجداول فاذا كانت القيمة المحسوبة $\mathbf{t_{cal}}$ اكبر من او يساوي القيمة الجدولية $\mathbf{t_{tab}}$ هذا يعني وقعت في منطقة رفض الفرضية الصفرية $\mathbf{H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0}$.

مثال (3) : في دراسة معينة لبيان الفروق بين متوسطي اوزان الذكور والاناث في احد المراحل الدراسية في قسم الاحصاء تم اختبار (11) فرد من الذكور عشوائياً ، و (18) فرد من الاناث وتم الحصول على البيانات التالية :

$$\bar{X}_1 = 82 \quad s^2{}_1 = 10$$
$$\bar{X}_2 = 73 \quad s^2{}_2 = 7$$

هل تتفق هذه النتائج مع الفرض القائل بأن متوسطي اوزان الذكور والاناث في هذه المرحلة الدراسية متساوية عند مستوى معنوية 0.05 .

الحل:

$$\bar{X}_1 = 82 \quad s^2{}_1 = 10 \quad n_1 = 11$$
$$\bar{X}_2 = 73 \quad s^2{}_2 = 7 \quad n_2 = 18$$

$$\text{versus} \quad \begin{matrix} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{matrix}$$

$$\mathbf{t_{cal}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad , \quad \textbf{and} \quad \mathbf{t_{tab} = Given}$$

$$\mathbf{S^2{}_P = \frac{(n_1 - 1)S^2{}_1 + (n_2 - 1)S^2{}_2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$\mathbf{S^2{}_P = \frac{(10)10 + (17)7}{27} = \frac{219}{27} = 8.111 \Longrightarrow S_P = 2.848}$$

$$\mathbf{t_{cal}} = \frac{(82 - 73) - (0)}{2.848\sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{18}}} = \frac{9}{2.848\sqrt{0.091 + 0.056}} = \frac{9}{1.092} = \mathbf{8.242} \ , \textbf{and} \quad \mathbf{t_{tab} = 2.052}$$

القرار : بما ان القيمة المحسوبة t_{cal} اكبر من القيمة الجدولية Z_{tab} هذا يعني وقعت في منطقة رفض الفرضية الصفرية. القرار هو رفض $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ ، اين متوسط اوزان الذكور لا يساوي متوسط اوزان الاناث.

السؤال (8) : اخذت عينتان مستقلتان حجمهما 72 ، 27 على التوالي من المجتمعين $\begin{matrix} \boldsymbol{N(\mu_1, 144)} \\ \boldsymbol{N(\mu_2, 81)} \end{matrix}$ **، فأعطت الوسطين** $\begin{matrix} \boldsymbol{\bar{X}_1 = 73} \\ \boldsymbol{\bar{X}_2 = 69} \end{matrix}$ **، اختبر على مستوى معنوية 0.05 :**

$$(1) \text{ versus } \begin{matrix} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 > \mu_2 \end{matrix}$$

$$(2) \text{ versus } \begin{matrix} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 3 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > 3 \end{matrix}$$

الحل: للفرضية الاولى ، وحسب معطيات السؤال يكون على النحو الاتي:

$$(1) \text{ versus } \begin{matrix} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 > \mu_2 \end{matrix} \Longrightarrow \text{versus } \begin{matrix} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{matrix}$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{(\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2) - (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)}{\sqrt{\frac{\boldsymbol{\sigma^2}_1}{\boldsymbol{n}_1} + \frac{\boldsymbol{\sigma^2}_2}{\boldsymbol{n}_2}}} \quad , \qquad \mathbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab} = Given}$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{\mathbf{(73 - 69) - (0)}}{\sqrt{\frac{\mathbf{144}}{\mathbf{72}} + \frac{\mathbf{81}}{\mathbf{27}}}} \quad , \qquad \mathbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab} = 1.645}$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{\mathbf{4}}{\sqrt{\mathbf{2 + 3}}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2.236}} = \mathbf{1.789} \quad , \qquad \mathbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab} = 1.645}$$

القرار : بما ان القيمة المحسوبة Z_{cal} **اكبر من القيمة الجدولية** Z_{tab} **هذا يعني وقعت في منطقة رفض الفرضية الصفرية.**

القرار هو رفض $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \mathbf{0}$.

الحل: للفرضية الثانية ، وحسب معطيات السؤال يكون على النحو الاتي:

$$(2)\text{ versus}\quad \begin{matrix} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 3 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > 3 \end{matrix}$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{(\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2) - (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)}{\sqrt{\frac{\boldsymbol{\sigma^2}_1}{\boldsymbol{n_1}} + \frac{\boldsymbol{\sigma^2}_2}{\boldsymbol{n_2}}}} \quad , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab}} = \textbf{Given}$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{(\mathbf{73} - \mathbf{69}) - (\mathbf{3})}{\sqrt{\frac{\mathbf{144}}{\mathbf{72}} + \frac{\mathbf{81}}{\mathbf{27}}}} \quad , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab}} = \mathbf{1.645}$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2} + \mathbf{3}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2.236}} = \mathbf{0.447} \quad , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab}} = \mathbf{1.645}$$

القرار : بما ان القيمة المحسوبة Z_{cal} اصغر من القيمة الجدولية Z_{tab} هذا يعني وقعت في منطقة قبول الفرضية الصفرية.

القرار هو قبول $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \mathbf{3}$.

السؤال (9) : اخذت عينة عشوائية حجمها (100) من درجات الطالبات الناجحات في امتحان الاعدادية ، فأعطت $\begin{Bmatrix} \bar{X}_1 = 68 \\ S_1 = 10 \end{Bmatrix}$ **، واخذت عينة عشوائية حجمها (140) من درجات الطلاب الناجحين في امتحان الاعدادية ، فأعطت** $\begin{Bmatrix} \bar{X}_2 = 66 \\ S_2 = 12 \end{Bmatrix}$ **، اختبر على مستوى معنوية 0.05 :**

$$(1)\text{ versus}\quad \begin{matrix} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{matrix}$$

$$(2)\text{ versus}\quad \begin{matrix} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 1 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 1 \end{matrix}$$

الحل: للفرضية الاولى ، وحسب معطيات السؤال يكون على النحو الاتي:

$$(1)\ \text{versus}\quad \begin{matrix} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{matrix} \Rightarrow \text{versus}\quad \begin{matrix} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{matrix}$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{(\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2) - (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)}{\sqrt{\frac{S^2{}_1}{n_1} + \frac{S^2{}_2}{n_2}}} \quad , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab}} = \textbf{Given}$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{(68 - 66) - (0)}{\sqrt{\frac{100}{100} + \frac{144}{140}}} \quad , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab}} = \mathbf{1.96}$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{2}{\sqrt{1 + 1.029}} = \frac{2}{1.424} = \mathbf{1.405} \quad , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab}} = \mathbf{1.96}$$

القرار : بما ان القيمة المحسوبة Z_{cal} اصغر من القيمة الجدولية Z_{tab} هذا يعني وقعت في منطقة قبول الفرضية الصفرية.

القرار هو قبول $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$.

الحل: للفرضية الثانية ، وحسب معطيات السؤال يكون على النحو الاتي:

$$(2)\ \text{versus}\quad \begin{matrix} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 1 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 1 \end{matrix}$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{(\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2) - (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)}{\sqrt{\frac{S^2{}_1}{n_1} + \frac{S^2{}_2}{n_2}}} \quad , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab}} = \textbf{Given}$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{(68 - 66) - (1)}{\sqrt{\frac{100}{100} + \frac{144}{140}}} \quad , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab}} = \mathbf{1.96}$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1+1.029}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1.424}} = \mathbf{0.702} \quad , \qquad \mathbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab} = 1.96}$$

القرار : بما ان القيمة المحسوبة Z_{cal} اصغر من القيمة الجدولية Z_{tab} هذا يعني وقعت في منطقة قبول الفرضية الصفرية.

القرار هو قبول $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \mathbf{1}$.

السؤال (10) : اخذت عينة عشوائية حجمها (9) من اوزان الاطفال الذكور حديثي الولادة في احد المستشفيات ، فأعطت $\begin{Bmatrix} \bar{X}_1 = 3 \\ S_1 = 1 \end{Bmatrix}$ ، واخذت عينة عشوائية حجمها (15) من اوزان الاطفال الاناث حديثات الولادة في نفس المستشفى ، فأعطت $\begin{Bmatrix} \bar{X}_2 = 2.8 \\ S_2 = 1.4 \end{Bmatrix}$ ، على فرض ان كلاً من اوزان الذكور و اوزان الاناث يخضع الى التوزيع الطبيعي ذي التباين نفسه ، اختبر على مستوى معنوية 0.05 :

$$\begin{matrix} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ V.S \quad H_1: \mu_1 > \mu_2 \end{matrix}$$

الحل: حسب معطيات السؤال يكون على النحو الاتي:

$$\begin{matrix} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ V.S \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{matrix}$$

$$\mathbf{t_{cal}} = \frac{(\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\mathbf{S_P}\sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n_1}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n_2}}}} \quad , \qquad \mathbf{and} \quad \mathbf{t_{tab} = Given}$$

$$\mathbf{S^2{}_P} = \frac{(\mathbf{n_1 - 1})\mathbf{S^2{}_1} + (\mathbf{n_2 - 1})\mathbf{S^2{}_2}}{\mathbf{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$\mathbf{S^2{}_P} = \frac{\mathbf{(8)1 + (14)1.96}}{\mathbf{22}} = \frac{\mathbf{35.44}}{\mathbf{22}} = \mathbf{1.611}$$

$$\mathbf{S_P = 1.269}$$

$$\mathbf{t_{cal}} = \frac{(\mathbf{3-2.8})-(\mathbf{0})}{\mathbf{1.269}\sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{15}}}} \quad , \qquad \mathbf{and} \quad \mathbf{t_{tab}} = \mathbf{1.717}$$

$$\mathbf{t_{cal}} = \frac{\mathbf{0.2}}{\mathbf{1.269}\sqrt{\mathbf{0.111+0.067}}} = \frac{\mathbf{0.2}}{\mathbf{1.269}\sqrt{\mathbf{0.178}}} = \frac{\mathbf{0.2}}{\mathbf{1.269(0.422)}} = \frac{\mathbf{0.2}}{\mathbf{0.536}} = \mathbf{0.373}$$

القـرار : بمـا ان القيمـة المحسـوبة t_{cal} اصـغر مـن القيمـة الجدوليـة t_{tab} هـذا يعنـي وقعـت فـي منطقة قبول الفرضية الصفرية.

القرار هو قبول $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$.

السؤال (12) : تم اجراء دراسة طبية متخصصة حول اوزان مجموعة من الاشخاص بلغ عددهم (20) شخص ومدى تأثير زيادة الوزن على امراض القلب ، حيث كان متوسط اوزان الاشخاص في مجتمع الدراسة (97) كغم بتباين معلوم ، بعدها تم قياس اوزان الاشخاص الذين تم اختيارهم وحسب الوسط الحسابي والتباين حيث كانا على التوالي (95) كغم ، و (36) على التوالي ، اختبر هل ان متوسط العينة يختلف عن متوسط المجتمع عند مستوى معنوية 0.05 ؟

الحل: لاحظ هنا ان التباين معلوم وان حجم العينة صغير (لا يهم طالما ان التباين للمجتمع معلوم) و هذا يعني نستعمل احصاءة الاختبار $\mathbf{Z_{cal}}$

$$\begin{matrix} \text{ضد} \\ \text{versus} \end{matrix} \quad \begin{matrix} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{matrix} \Longrightarrow V.S \quad \begin{matrix} H_0: \mu = 97 \\ H_1: \mu \neq 97 \end{matrix}$$

$$Z_{cal} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = \text{Given}$$

$$Z_{cal} = \frac{95-97}{\left(\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{20}}\right)} \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = 1.96$$

$$Z_{cal} = \frac{-2}{\left(\frac{6}{4.472}\right)} = \frac{-2}{1.342} = -1.49 \quad , \qquad \text{and} \quad Z_{tab} = 1.96$$

القرار : بما ان القيمة المطلقة المحسوبة $\mathbf{Z_{cal}}$ اصغر من القيمة الجدولية $\mathbf{Z_{tab}}$ هذا يعني وقعت في منطقة قبول الفرضية الصفرية.

القرار هو قبول $H_0: \mu = 97$ ، هذا يعني ان متوسط العينة لا يختلف عن متوسط المجتمع.

السؤال (16) : اذا كان معلوماً ان متوسط قوة تحمل سلك معدني هو (2000) كغم بانحراف معياري (120) كغم ، وادعى احد الباحثين ان يمكن تغيير طريقة صنع انتاج اسلاك لها قوة تحمل اكثر ولاختبار هذه الطريقة الجديدة صنعت عينة من (80) سلك ، ووجد ان متوسط قوة عمل السلك (2100) كغم ، هل ان نتائج العينة تؤيد طريقة الصنع (مستوى المعنوية 0.05)؟

الحل: حسب معطيات السؤال نستعمل احصاءة الاختبار $\mathbf{Z_{cal}}$

$$\begin{array}{ll} & H_0: \mu \leq 2000 \\ V.S & \\ & H_1: \mu > 2000 \end{array}$$

$$Z_{cal} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)} \quad , \quad \text{and} \quad Z_{tab} = \text{Given}$$

$$Z_{cal} = \frac{2100 - 2000}{\left(\frac{120}{\sqrt{80}}\right)} \quad , \quad \text{and} \quad Z_{tab} = 1.64$$

$$Z_{cal} = \frac{100}{\left(\frac{120}{8.944}\right)} = \frac{100}{13.417} = 7.45 \quad , \quad \text{and} \quad Z_{tab} = 1.64$$

القرار : بما ان القيمة المحسوبة $\mathbf{Z_{cal}}$ اكبر من القيمة الجدولية $\mathbf{Z_{tab}}$ هذا يعني وقعت في منطقة رفض الفرضية الصفرية.

القرار هو رفض $H_0: \mu \leq 2000$ ، هذا يعني ان نتائج العينة تؤيد طريقة الصنع.

السؤال (14) : أراد مدير السيطرة النوعية لمعمل المصابيح الكهربائية تحديد فيما اذا كان هناك اي فرق في معدل أعمار المصابيح الضوئية المنتجة بنوعين من المكائن ، حيث ان الانحراف المعياري لأعمار المصابيح لإنتاج الماكنة الاولى (110) ساعة وللماكنة الثانية (125) ساعة ، سحب عينة عشوائية حجمها (25) مصباح من انتاج الماكنة الاولى فكان الوسط الحسابي لأعمار المصابيح في هذه العينة (375) ساعة ، وسحب كذلك عينة عشوائية حجمها (25) مصباح من انتاج الماكنة الثانية فكان الوسط الحسابي لأعمار المصابيح (362) ساعة استخدم مستوى معنوية 0.05 ، هل يوجد دلالة على وجود فرق في معدل العمر للمصابيح المنتجة في الماكنتين؟

الحل: حسب معطيات السؤال (**الانحراف المعياري: معلوم**) نستعمل احصاءة الاختبار $\mathbf{Z_{cal}}$

$$\begin{array}{ll} & H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ \text{V.S} & H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{array}$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{(\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2) - (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)}{\sqrt{\frac{S^2{}_1}{n_1} + \frac{S^2{}_2}{n_2}}} \quad , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab}} = \textbf{Given}$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{(375 - 362) - (0)}{\sqrt{\frac{(110)^2}{25} + \frac{(125)^2}{25}}} \quad , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab}} = 1.96$$

$$\mathbf{Z_{cal}} = \frac{13}{\sqrt{484 + 625}} = \frac{13}{33.302} = 0.39 \quad , \qquad \textbf{and} \quad \mathbf{Z_{tab}} = 1.96$$

القرار : بما ان القيمة المحسوبة Z_{cal} اصغر من القيمة الجدولية Z_{tab} هذا يعني وقعت في منطقة قبول الفرضية الصفرية.

القرار هو قبول $\mathbf{H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0}$ ، لا يوجد فرق في معدل العمر للمصابيح المنتجة في الماكنتين.

تحليل التباين: (Analysis of Variance)

اولاً : تحليل التباين لمعيار واحد (تجزئة التباين الى جزئين):

ان المتطابقة الاساسية لتحليل التباين لمعيار واحد هي تجزئة SS_T الى جزئين وعلى النحو الاتي:

$$\underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{..})^2}}_{d.f = tn-1 = N-1} = \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n}(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})^2}}_{d.f = t-1} + \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{i.})^2}}_{d.f = t(n-1) = N-t}$$

حيث ان:

$$\left.\begin{matrix} i = 1, 2, \ldots t \\ j = 1, 2, \ldots n \end{matrix}\right\rangle \textit{where } \boxed{N = t.n}$$

t : عدد المجموعات.

n : عدد المشاهدات داخل كل مجموعة.

ملاحظة مهمة : ان عدد المشاهدات في كل مجموعة ممكن ان يكون غير متساوي وسيتم توضيح ذلك من خلال الامثلة التطبيقية.

حساب المجاميع لجدول تحليل التباين

$$SS_T = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{1}{N}(x_{..})^2 \quad ,\text{where } d.f = N-1$$

$$SS_B = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n}(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{t}\frac{x_{i.}^2}{r} - \frac{1}{N}(x_{..})^2 \quad ,\text{where } d.f = t-1$$

$$SS_E = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{i.})^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{t}\frac{x_{i.}^2}{r} \quad ,\text{where } d.f = N-t$$

ملاحظة: ممكن حساب SS_E بالصيغة الاتية:

$$\boxed{SS_E = SS_T - SS_B}$$

الاثبات:

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}{}^{2}-\frac{1}{N}(x_{..})^{2}-\left(\sum_{i=1}^{t}\frac{x_{i.}{}^{2}}{r}-\frac{1}{N}(x_{..})^{2}\right)=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}{}^{2}-\sum_{i=1}^{t}\frac{x_{i.}{}^{2}}{r}$$

حساب المتوسطات لجدول تحليل التباين

$$MS_B = \frac{SS_B}{d.f(SS_B)} = \frac{1}{t-1}\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n}(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})^2 \quad , \text{where } d.f = t-1$$

$$MS_B = \frac{SS_B}{d.f(SS_B)} = \frac{1}{t-1}\sum_{i=1}^{t}\frac{x_{i.}^{\,2}}{r} - \frac{1}{N}(x_{..})^2 \quad , \text{where } d.f = t-1$$

$$MS_E = \frac{SS_E}{d.f(SS_E)} = \frac{1}{N-t}\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2 \quad , \text{where } d.f = N-t$$

$$MS_E = \frac{SS_E}{d.f(SS_E)} = \frac{1}{N-t}\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^{\,2} - \sum_{i=1}^{t}\frac{x_{i.}^{\,2}}{r}\right) \quad , \text{where } d.f = N-t$$

$$MS_E = \frac{SS_E}{d.f(SS_E)} = \frac{SS_T - SS_B}{N-t} \quad , \text{where } d.f = N-t$$

احصاءة الاختبار:

$$F_{cal} = \frac{MS_B}{MS_E}$$

ان فكرة تحليل التباين هي اختبار عدة مجموعات دفعة واحدة باستخدام اختبار (F)

ANOVA						
Source of Variation	**SS**	**df**	**MS**	**F**	**P-value**	**F crit**
Between Groups	SS_B	$t-1$	MS_B	F_{cal}	**تعطى**	**تستخرج من جداول F**
Within Groups	SS_E	$N-t$	MS_E			
Total	SS_T	$N-1$				

القرار: يتم استخراج القيمة الجدولية من جداول توزيع F_{tab} وتقارن مع القيمة المحتسبة لـ F_{cal}
فاذا كانت
القيمة المحتسبة F_{cal} اكبر من او تساوي القيمة الجدولية F_{tab} ، ترفض الفرضية H_0 هذا يعني وجود اختلافات او فروق معنوية بين المجموعات بشكل عام.
اما اذا كانت
القيمة المحتسبة F_{cal} اصغر من القيمة الجدولية F_{tab} ، تقبل الفرضية H_0 هذا يعني المتوسطات متساوية اي لا توجد فروق معنوية بين المجموعات.

المثال(23): للبيانات التالية :

	المشاهدات r	المشاهدة 1	المشاهدة 2	المشاهدة 3	المشاهدة 4	المشاهدة 5	المشاهدة 6
المجموعات t		x1	x2	x3	x4	x5	x6
المجموعة 1	t1	25	15	20	22	24	26
المجموعة 2	t2	40	44	49	45	46	40
المجموعة 3	t3	30	30	32	35	32	33
المجموعة 4	t4	60	65	64	65	62	68
المجموعة 5	t5	65	66	64	60	50	55

المطلوب : اختبر الفرضية الاتية بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_5 \quad \text{V.S} \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \cdots \neq \mu_5$$

الحل: يمكن الاعتماد على برنامج اكسل لتحليل هذه البيانات و الحصول على جدول تحليل التباين

ANOVA						
Source of Variation	SS	df	MS	F	P-value	F crit
Between Groups	7699.2	4	1924.8	119.7014925	0	2.75871047
Within Groups	402	25	16.08			
Total	8101.2	29				

القرار:

ان قيمة $F = 119.7$ اكبر من قيمة F crit هذا يعني رفض الفرضية $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_5$

ملاحظة : اذا كانت قيمة P-value اصغر من مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ هذا يعني رفض الفرضية $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_5$

الحل : بشكل يدوي

$$SS_T = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{1}{N}(x_{..})^2 \quad , \text{where d.f} = N - 1$$

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	n_j	$\text{Sum} = x_{i.}$	$\text{Average} = \bar{x}_{i.}$
t1	25	15	20	22	24	26	6	132	22
t2	40	44	49	45	46	40	6	264	44
t3	30	30	32	35	32	33	6	192	32
t4	60	65	64	65	62	68	6	384	64
t5	65	66	64	60	50	55	6	360	60
							30	$X_{..} = 1332$	$\bar{X}_{..} = 44.4$

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 = 625 + 225 + \cdots + 3025 = 67242$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{1}{N}(x_{..})^2 = 67242 - \frac{1}{30}(1332)^2 = 67242 - 59140.8 = 8101.2 \quad , with\ d.f = 29$$

$$SS_B = \sum_{i=1}^{t}\frac{x_{i.}^2}{r} - \frac{1}{N}(x_{..})^2 \quad , \text{where d.f} = t - 1$$

$$\sum_{i=1}^{t} \frac{x_{i.}^{2}}{r} = \frac{1}{6}[(132)^2 + (264)^2 + \cdots + (360)^2] = \frac{401040}{6} = 66840$$

$$SS_B = 66840 - 59140.8 = 7699.2 \quad , \text{where d.f} = 4$$

$$MS_B = \frac{SS_B}{d.f(SS_B)} = \frac{7699.2}{4} = 1924.8$$

$$\boxed{SS_E = SS_T - SS_B = 8101.2 - 7699.2 = 402} \; , \text{where d.f} = 29 - 4 = 25$$

$$MS_E = \frac{SS_E}{d.f(SS_E)} = \frac{402}{25} = 16.08$$

جدول تحليل التباين يكون على النحو الاتي:

ANOVA						
Source of Variation	**SS**	**df**	**MS**	**F**	**P-value**	**F crit**
Between Groups	**7699.2**	**4**	**1924.8**	**119.7014925**	**0**	**2.75871047**
Within Groups	**402**	**25**	**16.08**			
Total	**8101.2**	**29**				

المثال(24): للبيانات التالية :

	المشاهدات r	المشاهدة 1	المشاهدة 2	المشاهدة 3	المشاهدة 4	المشاهدة 5	المشاهدة 6
المجموعات t		x1	x2	x3	x4	x5	x6
المجموعة 1	t1	25	15	20	22	24	26
المجموعة 2	t2	40	44	49	45	46	40
المجموعة 3	t3	30	30	32	35		
المجموعة 4	t4	60	65	64	65	62	
المجموعة 5	t5	65	66	64			

المطلوب : اختبر الفرضية الاتية بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$:

$$\begin{aligned} &H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_5 \\ \text{V.S} \quad &H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \cdots \neq \mu_5 \end{aligned}$$

الحل: من بيانات السؤال نجد الاتي:

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	n_j	$\text{Sum} = x_{i.}$	$\text{Average} = \bar{x}_{i.}$
t1	25	15	20	22	24	26	6	132	22
t2	40	44	49	45	46	40	6	264	44
t3	30	30	32	35			4	127	31.75
t4	60	65	64	65	62		5	316	63.2
t5	65	66	64				3	195	65
							24	$X_{..} = 1034$	$\bar{X}_{..} = 43.083$

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n} {x_{ij}}^2 = (25)^2 + (15)^2 + \cdots + (64)^2 = 51380$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{1}{N}(x_{..})^2 = 51380 - \frac{1}{24}(1034)^2 = 51380 - 44548.167 = 6831.833 \quad , with\ d.f = 23$$

$$SS_B = \sum_{i=1}^{t} \frac{x_{i.}^2}{r} - \frac{1}{N}(x_{..})^2 \quad , \text{where d.f} = t - 1$$

$$SS_B = \left(\frac{(132)^2}{6} + \frac{(264)^2}{6} + \frac{(127)^2}{4} + \frac{(316)^2}{5} + \frac{(195)^2}{3}\right) - \frac{1}{24}(1034)^2 \quad , \text{where d.f} = t - 1$$

$$SS_B = 51198.45 - 44548.167 = 6650.283 \quad , \text{where d.f} = 4$$

$$\boxed{SS_E = SS_T - SS_B = 6831.833 - 6650.283 = 181.55} \quad , \text{where d.f} = 24 - 5 = 19$$

$$MS_B = \frac{SS_B}{d.f(SS_B)} = \frac{6650.283}{4} = 1662.571$$

$$MS_E = \frac{SS_E}{d.f(SS_E)} = \frac{181.55}{19} = 9.56$$

ANOVA						
Source of Variation	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P-value*	*F crit*
Between Groups	6650.283	4	1662.571	173.9953	0	2.895107
Within Groups	181.55	19	9.555263			
Total	6831.833	23				

القرار:

ان قيمة $F = 173.9953$ اكبر من قيمة F crit هذا يعني رفض الفرضية $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_5$

ملاحظة : اذا كانت قيمة P-value اصغر من مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ هذا يعني رفض الفرضية $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_5$

المثال(26): للبيانات التالية :

ANOVA						
Source of Variation	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P-value*	*F crit*
Between Groups						2.95
Within Groups			8			
Total	280	31				

المطلوب : اكمل جدول تحليل التباين ثم اختبر الفرضية الاتية بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$

الحل: نعتمد على معطيات السؤال لإكمال الجدول وكما يلي:

عدد المجموعات يساوي 4 ، لان الفرضية $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ تتضمن اربعة متوسطات وبالتالي نستخرج درجة الحرية بين المجموعات وعلى النحو الاتي:

$$t = 4 \Rightarrow d.f(\text{Between Groups}) = t - 1 = \boxed{3}$$

$$d.f(\text{Within Groups}) = d.f(\text{Total}) - d.f(\text{Between Groups}) = 31 - 3 = \boxed{28}$$

ايجاد عدد المشاهدات داخل كل مجموعة على النحو الاتي:

$$d.f(\text{Within Groups}) = N - t = nt - t$$

$$28 = n4 - 4 \Rightarrow n = \boxed{8}$$

ايجاد SS_E مجموع المربعات داخل كل مجموعة على النحو الاتي:

$$MS_E = \frac{SS_E}{d.f(SS_E)} \Rightarrow SS_E = d.f(SS_E) * MS_E = 28 * 8 = 224$$

ايجاد SS_B مجموع المربعات بين المجموعات على النحو الاتي:

$$SS_E = SS_T - SS_B \Rightarrow 224 = 280 - SS_B \Rightarrow SS_B = 280 - 224 = 56$$

ايجاد MS_B متوسط مجموع المربعات بين المجموعات على النحو الاتي:

$$MS_B = \frac{SS_B}{d.f(SS_B)} = \frac{56}{3} = 18.667$$

ايجاد F_{cal} بتطبيق القانون الاتي:

$$F_{cal} = \frac{MS_B}{MS_E} = \frac{18.667}{8} = 2.333$$

ANOVA						
Source of Variation	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P-value*	*F crit*
Between Groups	56	3	18.667	2.333		2.95
Within Groups	224	28	8			
Total	280	31				

القرار:

ان قيمة $\mathbf{F = 2.333}$ اصغر من قيمة $\mathbf{F\ crit = 2.95}$ هذا يعني قبول الفرضية

$$\mathbf{H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4}$$

لا توجد فروق بين المجموعات.

ثانياً : تحليل التباين لمعيارين (تجزئة التباين الى ثلاث اجزاء):

ان المتطابقة الاساسية لتحليل التباين لمعيارين هي تجزئة SS_T الى ثلاث اجزاء وعلى النحو الاتي:

$$\underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(x_{ij}-\bar{x}_{..})^2}}_{d.f=tr-1=N-1} = \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})^2}}_{d.f=t-1} + \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(\bar{x}_{.j}-\bar{x}_{..})^2}}_{d.f=r-1} + \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(x_{ij}-\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{.j}+\bar{x}_{..})^2}}_{d.f=(t-1)(r-1)=N-t-r+1}$$

حيث ان:

$$\left.\begin{matrix} i=1,2,\dots t \\ j=1,2,\dots r \end{matrix}\right\rangle where\ \boxed{N=t.r}$$

t : عدد الصفوف.

r : عدد الاعمدة.

حساب المجاميع والمتوسطات لجدول تحليل التباين

$$SS_T=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(x_{ij}-\bar{x}_{..})^2=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}x_{ij}^2-\frac{1}{N}(x_{..})^2 \qquad ,where\ d.f=N-1$$

$$SS_R=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})^2=\sum_{i=1}^{t}\frac{x_{i.}^2}{r}-\frac{1}{N}(x_{..})^2 \qquad ,where\ d.f=t-1$$

$$MS_R=\frac{SS_R}{d.f(SS_R)}=\frac{\sum_{i=1}^{t}\frac{x_{i.}^2}{r}-\frac{1}{N}(x_{..})^2}{t-1}$$

$$SS_C=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(\bar{x}_{.j}-\bar{x}_{..})^2=\sum_{j=1}^{r}\frac{x_{.j}^2}{t}-\frac{1}{N}(x_{..})^2 \qquad ,where\ d.f=r-1$$

$$MS_C=\frac{SS_C}{d.f(SS_C)}=\frac{\sum_{j=1}^{r}\frac{x_{.j}^2}{t}-\frac{1}{N}(x_{..})^2}{r-1}$$

$$SS_E=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(x_{ij}-\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{.j}+\bar{x}_{..})^2=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}{}^2-\sum_{i=1}^{t}\frac{x_{i.}{}^2}{r}-\sum_{j=1}^{r}\frac{x_{.j}{}^2}{t}+\frac{1}{N}(x_{..})^2 \quad ,\text{where d.f} = N-t-r+1$$

$$\boxed{SS_E=SS_T-SS_R-SS_C} \quad ,\text{where d.f}=N-t-r+1 \ \text{ or d.f}=(t-1)(r-1)$$

$$MS_E=\frac{SS_E}{d.f(SS_E)}=\frac{(SS_T-SS_C-SS_R)}{(t-1)(r-1)}$$

احصاءة الاختبار للصفوف:

$$F_{cal(R)}=\frac{MS_R}{MS_E}$$

احصاءة الاختبار للأعمدة:

$$F_{cal(C)}=\frac{MS_C}{MS_E}$$

ان فكرة تحليل التباين هي اختبار عدة مجموعات دفعة واحدة باستخدام اختبار (F)

ANOVA						
Source of Variation	**SS**	**df**	**MS**	**F**	**P-value**	**F crit**
Between Groups Rows	SS_R	$t-1$	MS_R	$F_{cal(R)}$		تستخرج من جداول F
Between Groups Columns	SS_C	$r-1$	MS_C	$F_{cal(C)}$		تستخرج من جداول F
Error	SS_E	$(t-1)(r-1)$	MS_E			
Total	SS_T	$N-1$				

القرار: يتم استخراج القيمة الجدولية من جداول توزيع F_{tab} وتقارن مع القيمة المحتسبة لـ F_{cal}

فاذا كانت

القيمة المحتسبة F_{cal} اكبر من او تساوي القيمة الجدولية F_{tab} ، ترفض الفرضية H_0 هذا يعني وجود اختلافات او فروق معنوية بين المجموعات بشكل عام.

اما اذا كانت

القيمة المحتسبة F_{cal} اصغر من القيمة الجدولية F_{tab} ، تقبل الفرضية H_0 هذا يعني المتوسطات متساوية اي لا توجد فروق معنوية بين المجموعات.

مثال(27): أريد دراسة تأثير اربع مركبات دوائية في علاج احد الامراض ، تم اختيار 20 شخص مصاب بهذا المرض ، وتم تقسيمهم الى خمس مجموعات وفقاً لفئات العمر وتم اخضاعهم لهذه المركبات الدوائية كما موضح في الجدول الاتي:

		فئات العمر				
		1	2	3	4	5
المركبات الدوائية	A	18	15	24	10	12
	B	30	35	31	25	27
	C	25	30	30	25	35
	D	50	50	55	40	45

المطلوب: اجراء تحليل التباين لاختبار الفرضية القائلة بعدم وجود فروق بين المركبات الدوائية والفرضية القائلة بعدم وجود فروق بين الفئات العمرية.

الحل: $\mathbf{t = 1, 2, 3, 4}$

الفرضية الخاصة بالمركبات الدوائية

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_4$$

$\mathbf{H_1}$: يوجد على الاقل احد المتوسطات لا يساوي باقي المتوسطات.

اما $\boldsymbol{r = 1, 2, 3, 4, 5}$

الفرضية الخاصة بفئات العمر

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_5$$

$\mathbf{H_1}$: يوجد على الاقل احد المتوسطات لا يساوي باقي المتوسطات.

$$\mathbf{SS_T = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} x_{ij}^2 - \frac{1}{\mathit{N}}(x_{..})^2 \qquad , where\ d.f = N - 1}$$

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} x_{ij}^2 = 18^2 + 15^2 + \cdots + 45^2 = 21734$$

$$\frac{1}{N}(x_{..})^2 = \frac{1}{20}(612)^2 = 18727.2$$

$$SS_T = 21734 - 18727.2 = \boxed{3006.8} \quad \text{, where d.f} = 20 - 1 = 19$$

STAT				
	Count	Sum	Average	Variance
Row 1	5	79	15.8	30.2
Row 2	5	148	29.6	14.8
Row 3	5	145	29	17.5
Row 4	5	240	48	32.5

$$SS_R = \sum_{i=1}^{t} \frac{x_{i.}^2}{r} - \frac{1}{N}(x_{..})^2 \quad \text{, where d.f} = t - 1$$

$$\sum_{i=1}^{t} \frac{x_{i.}^2}{r} = \frac{1}{5}[79^2 + 148^2 + 145^2 + 240^2] = \frac{106770}{5} = \boxed{21354}$$

$$SS_R = 21354 - 18727.2 = 2626.8 \quad \text{, where d.f} = 4 - 1 = 3$$

$$MS_R = \frac{SS_R}{d.f(SS_R)} = \frac{2626.8}{3} = 875.6$$

Groups	STAT	Column 1	Column 2	Column 3	Column 4	Column 5
Count		4	4	4	4	4
Sum		123	130	140	100	119
Average		30.75	32.5	35	25	29.75
Variance		188.92	208.33	187.33	150	194.25

$$SS_C = \sum_{j=1}^{r} \frac{x_{.j}^2}{t} - \frac{1}{N}(x_{..})^2 \quad \text{, where d.f} = r - 1$$

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{x_{.j}^2}{t} = \frac{1}{4}[123^2 + 130^2 + 140^2 + 100^2 + 119^2] = \frac{75790}{4} = 18947.5$$

$$\mathbf{SS_C = 18947.5 - 18727.2 = \boxed{220.3}} \quad \mathbf{, where\ d.f = 5 - 1 = 4}$$

$$\mathbf{MS_C = \frac{SS_C}{d.f(SS_C)} = \frac{220.3}{4} = 55.075}$$

$$\boxed{\mathbf{SS_E = SS_T - SS_R - SS_C}} \quad \mathbf{where\ d.f = N - t - r + 1 \quad or \quad d.f = (t-1)(r-1)}$$

$$\boldsymbol{SS_E} \mathbf{= 3006.8 - 2626.8 - 220.3 = 159.7 \quad , where\ d.f = 20 - 4 - 5 + 1 = 121\ or\ \ d.f = (3)(4) = 12}$$

$$\mathbf{MS_E = \frac{SS_E}{d.f(SS_E)} = \frac{159.7}{12} = 13.308}$$

الان : نجد جدول تحليل التباين وعلى النحو الاتي:

ANOVA						
Source of Variation	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P-value*	*F crit*
Rows	2626.8	3	875.6	65.79336	0	3.490295
Columns	220.3	4	55.075	4.138384	0.0247	3.259167
Error	159.7	12	13.308			
Total	3006.8	19				

القرار:

القيمة المحتسبة $\mathbf{F_{cal} = 65.79}$ اكبر من القيمة الجدولية $\mathbf{F_{tab} = 3.49}$ ، ترفض الفرضية $\mathbf{H_0}$ هذا يعني وجود اختلافات او فروق معنوية بين المركبات الدوائية (بمعنى هنالك احد المتوسطات على الاقل هو ذو تأثير اعلى من بقية المتوسطات الاخرى أي قبول الفرضية البديلة).

وكذلك

القيمة المحتسبة $\mathbf{F_{cal} = 4.138}$ اكبر من القيمة الجدولية $\mathbf{F_{tab} = 3.26}$ ، ترفض الفرضية $\mathbf{H_0}$ هذا يعني وجود اختلافات او فروق معنوية بين فئات العمر(بمعنى هنالك احد المتوسطات على الاقل هو ذو تأثير اعلى من بقية المتوسطات الاخرى أي قبول الفرضية البديلة).

وهنا نشير الى الملاحظة الاتية:

ان قيمة P-value للصفوف والاعمدة اصغر من مستوى المعنوية = 0.05 وهذا يعني رفض الفرضية الصفرية.