

جامعة المستنصرية — كلية الإدارة والاقتصاد - قسم الإحصاء

المادة : التحليل العددي | (Numerical Analysis)

المرحلة الثالثة / المحاضرة رقم (1)

الموضوع : نظرية الأخطاء ومعالجتها (Theory of Errors and Their Treatment)

المدرس المساعد لمى طارق عباس

١. مقدمة

يُعنى التحليل العددي بتصميم وتحليل الخوارزميات التي تُنتج تقريبات عددية لحلول المسائل الرياضية. ولما كانت كل عملية حسابية، يدوية أو باستخدام الحاسوب، تستخدم عددًا منتهيًا من الأرقام، وكانت كثير من المسائل الرياضية لا يمكن حلها إلا تقريبًا (كإيجاد جذور المعادلات غير الخطية، والتكاملات، والمعادلات التفاضلية، والمتسلسلات اللانهائية...)، فإن وقوع الخطأ أمر لا يمكن تجنبه في الحساب العددي.

والغرض من نظرية الأخطاء ليس التخلص من الخطأ كليًا — إذ يستحيل ذلك غالبًا — وإنما فهم مصادره، وقياس مقداره، والسيطرة على تناميّه أثناء سلسلة الحسابات، وتصميم طرائق وصيغ حسابية تُبقي الخطأ النهائي أصغر ما يمكن.

٢. التعريفات الأساسية

لتكن x هي القيمة الحقيقية (المضبوطة) لكمية ما، ولتكن x^* تقريبًا لها ناتجًا عن قياس أو حساب أو طريقة عددية. عندئذٍ تُعرّف:

$$e = x - x^* \quad \text{الخطأ :}$$

$$e_x = |x - x^*| \quad \text{الخطأ المطلق :}$$

$$\delta_x = |x - x^*| / |x|, \quad x \neq 0 \quad \text{الخطأ النسبي :}$$

$$\delta p = \delta_x \times 100\%$$

الخطأ المئوي :

3- الأخطاء في العمليات الحسابية

إن التعامل مع القيم التقريبية يؤدي إلى حدوث أخطاء في نتائج العمليات الحسابية الأربع لذلك هما القيم التقريبية $\hat{x}$ و $\hat{y}$ لا بد من معرفة الخطأ المطلق والنسبي لكل عملية حسابية، حيث أن x و y للقيم الحقيقية .

• عملية الجمع

إذا كانت $\hat{x}$, $\hat{y}$ تمثل القيم التقريبية لـ x , y فإن الخطأ المطلق لحاصل الجمع هو :

$$e_{x+y} = e_x + e_y$$

الخطأ النسبي لحاصل الجمع يساوي :

$$\delta_{x+y} = (e_x + e_y) / (x + y)$$

• عملية الطرح

عند طرح العددين التقريبيين ينتج الخطأ المطلق لعملية الطرح $\hat{x}$ و $\hat{y}$:

$$e_{x-y} = e_x - e_y$$

الخطأ النسبي يساوي :

$$\delta_{x-y} = (e_x - e_y) / (x - y)$$

ويمكن كتابته بالشكل الآتي :

$$\delta_{x-y} = (x \delta_x - y \delta_y) / x - y$$

• عملية الضرب

ينتج الخطأ المطلق لعملية الضرب $\hat{x}$ و $\hat{y}$ عند ضرب العددين التقريبيين :

$$e_{xy} = x e_y + y e_x$$

أما الخطأ النسبي لعملية الضرب فيساوي :

$$\delta_{xy} = \delta_x + \delta_y$$

• عملية القسمة

عند قسمة العددين التقريبيين ينتج الخطأ المطلق لعملية القسمة :

$$e_{x/y} = (x / y) [(e_x / x) - (e_y / y)]$$

أما الخطأ النسبي لعملية القسمة فيساوي :

$$\delta_{x/y} = \delta_x - \delta_y$$

وبصورة أعمّ، من أجل دالة قابلة للاشتقاق f في عدة متغيرات $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، يمكن تقدير الخطأ المنتشر من التفاضل الكلي:

$$\Delta f \approx \sum_i \left| \partial f / \partial x_i \right| \cdot \Delta x_i$$

وتُعدّ هذه الصيغة أساس تحليل انتشار الخطأ في القياسات غير المباشرة وفي الحسابات العددية متعددة الخطوات.

4. مصادر الخطأ

يمكن تصنيف الأخطاء التي تظهر في الحساب العددي بحسب منشئها إلى:

1. الخطأ الكامن (خطأ البيانات): وهو خطأ موجود أصلاً في البيانات المُدخلة قبل بدء أي حساب، كخطأ القياس، أو تقريب ثوابت معطاة، أو عدم اليقين في البيانات التجريبية.
 2. خطأ التقريب (خطأ التدوير Round-off Error): ينشأ لأن الحواسيب والآلات الحاسبة تُمثّل الأعداد الحقيقية بعدد منتهٍ من الأرقام (تمثيل محدود الدقة/الفاصلة العائمة). فكل عملية حسابية قد تُدخل خطأ تدوير صغيراً، وقد تتراكم هذه الأخطاء عبر عمليات كثيرة.
 3. خطأ الاقتطاع (Truncation Error): ينشأ عن استبدال عملية رياضية لا نهائية أو مضبوطة بعملية منتهية تقريبية — كاقطاع متسلسلة تايلور أو متسلسلة لا نهائية بعد عدد منتهٍ من الحدود، أو استبدال المشتقة بفرق منته، أو إيقاف طريقة تكرارية بعد عدد منتهٍ من التكرارات.
- الخطأ الكلي في أي نتيجة عددية محسوبة هو عموماً محصلة خطأ التدوير وخطأ الاقتطاع معاً. وغالباً ما يؤدي تقليل أحدهما إلى زيادة الآخر؛ فتقليل خطوة الحساب h في صيغة الفروق المنتهية يُقلّل خطأ الاقتطاع، لكنه يتطلب عمليات حسابية أكثر، مما يزيد خطأ التدوير المتراكم. لذا فإن اختيار خطوة مناسبة يقتضي موازنة بين الخطأين.

5- الخلاصة

نوع الخطأ	السبب	العلاج المعتاد
الخطأ الكامن	بيانات مُدخلة غير دقيقة / خطأ قياس	تحسين طريقة جمع البيانات؛ توثيق عدم اليقين فيها
خطأ التدوير	الحساب بدقة منتهية	استعمال دقة أعلى؛ تقليل عدد العمليات الحسابية
خطأ الاقتطاع	استبدال عملية لا نهائية/مضبوطة بعملية منتهية	زيادة عدد الحدود/تصغير خطوة الحساب؛ طرائق أعلى رتبة
فقدان الدقة المعنوية	طرح كميتين متقاربتين جداً	إعادة صياغة العبارة الجبرية

إن فهم هذه الأنواع من الأخطاء، وكيفية انتشارها عبر سلسلة الحسابات، وكيفية تفاعلها مع بعضها، يُشكّل أساس التحليل العددي. فكل طريقة عددية تُدرّس لاحقاً في المقرر (إيجاد الجذور، والاستيفاء، والتكامل

العددي، وحل المعادلات التفاضلية) يجب تقييمها لا من حيث صحتها في الحساب المضبوط فحسب، بل من حيث سلوكها في وجود خطأي التدوير والاقتطاع.