محاضرة رقم (2) : التحليل العددي (Numerical Analysis)

المرحلة الثالثة ـــ قسم الإحصاء :الخطأ المطلق والخطأ النسبي

الساعات الدراسية : 2ساعة دراسية	**الموضوع :** الخطأ المطلق والنسبي(Absolute & Relative Error)

م.م. لمى طارق عباس

1- المقدمة (Introduction & Objectives)

تُعد دراسة الأخطاء من الركائز الأساسية في مادة التحليل العددي، حيث نلجأ إلى الحلول التقريبية عند صعوبة أو استحالة الحصول على الحلول المضبوطة الدقيقة للمسائل الرياضية والمعادلات التفاضلية.

الأهداف:

- التعرف على مفهوم القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية.
- التمييز بين الخطأ المطلق (Absolute Error) والخطأ النسبي.(Relative Error)
- حساب مقدار الخطأ وحدوده العليا في المسائل العددية المختلفة.

2- التعاريف الأساسية (Basic Definitions)

ليكن لدينا:

x : المضبوطة أو الحقيقية القيمة (Exact Value).

x* (أو $\hat{x}$) : التقريبية القيمة (Approximate Value).

أ .الخطأ المطلق (E_A - Absolute Error)

يُعرف الخطأ المطلق بأنه القيمة المطلقة للفرق بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية:

الخطأ المطلق:(Absolute Error)

$$E_A = |x - x^*|$$

ملاحظة مهمة:

- القيمة المطلقة تضمن أن يكون الخطأ دائماً موجباً أو صفراً.($E_A \geq 0$)
- يحمل الخطأ المطلق نفس وحدات قياس المتغير الأصلي) x (مثل :متر، كيلوغرام، ثانية).

ب .الخطأ النسبي (Relative Error - E_R)

على الرغم من أهمية الخطأ المطلق، إلا أنه قد لا يعطي مؤشراً دقيقاً عن مدى جودة التقريب دون مقارنته بحجم القيمة الأصلية .لذا نستخدم الخطأ النسبي:

$$E_R = |x - x^*| / |x| = E_A / |x| \quad (\text{حيث } x \neq 0)$$

ج - النسبة المئوية للخطأ: (Percentage Error)

$$\text{Percentage Error} = E_R \times 100\%$$

3- أمثلة (Examples)

مثال (1) :

إذا كانت القيمة الحقيقية لجذر محدد هي $x = \pi \approx 3.1415926$ وقُمنا بتقريبها إلى $x^* = 3.14$. احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي والنسبة المئوية للخطأ.

الحل:

1- **الخطأ المطلق (E_A)** :

$$E_A = |x - x^*| = |3.1415926 - 3.14| = |0.0015926| = 0.0015926$$

2- **الخطأ النسبي (E_R)** :

$$E_R = E_A / |x| = 0.0015926 / 3.1415926 \approx 0.00050694$$

3- النسبة المئوية للخطأ:

$$\text{Percentage Error} = 0.00050694 \times 100\% \approx 0.0507\%$$

مثال (2) :

قاس طالب طول جسر فكان النتيجة $x_1^* = 999\ m$ بينما الطول الفعلي $x_1 = 1000\ m$. وقاس طالب آخر طول قطعة خشبية فكانت $x_2^* = 9\ cm$ بينما الطول الفعلي $x_2 = 10\ cm$. قارن بين الخطأين.

الحل:

حالة الجسر :

$$E_A1 = |1000 - 999| = 1\ m$$

$$E_R1 = 1 / 1000 = 0.001 = 0.1\%$$

حالة قطعة الخشب :

$$E_A2 = |10 - 9| = 1\ cm$$

$$E_R2 = 1 / 10 = 0.1 = 10\%$$

تفسيرالمثال :

بالرغم من أن الخطأ المطلق في الحالتين هو وحدة واحدة(1) ، إلا أن قياس الجسر بدقة 0.1% يعتبر ممتازاً جداً مقارنة بقياس قطعة الخشب بنسبة خطأ .10% وهذا يبين أهمية دراسة الخطأ النسبي بجانب الخطأ المطلق.

د.خطأ التدوير والحد الأعلى للخطأ (Rounding Error Limit)

إذا تم تدوير العدد x إلى k من المراتب العشرية للحصول على*x ، فإن الحد الأعلى للخطأ المطلق يُعطى بالقانون:

الحد الأعلى للخطأ المطلق:

$$E_A = |x - x^*| \leq 0.5 \times 10^{-k}$$

مثال(3) :

احسب الحد الأعلى للخطأ المطلق عند تقريب العدد $x = \sqrt{2} \approx 1.41421356$ إلى 3 مراتب عشرية $(x^* = 1.414)$.

الحل:

1- عدد المراتب العشرية $k = 3$.

2 - حد الخطأ الأعلى النظري :

$$\text{Upper Bound} = \tfrac{1}{2} \times 10^{-3} = 0.0005$$

3- بالتحقق من الخطأ الفعلي:

$$E_A = |1.41421356 - 1.414| = 0.00021356$$

ونلاحظ بالفعل أن $0.00021356 \leq 0.0005$.

4- تمارين واجب (Homework Exercises)

س1 : إذا كانت القيمة الحقيقية $x = 1/3$ والقيمة التقريبية لها هي $x^* = 0.3333$. احسب :

(1)الخطأ المطلقE_A ، (2) الخطأ النسبيE_R ، (3) النسبة المئوية للخطأ.

س 2: تم تقريب العدد $x = e \approx 2.7182818$ إلى $x^* = 2.718$.

جد الخطأ المطلق والنسبي، وهل يحقق الخطأ المطلق الشرط $E_A \leq 1/2 \times 10^{(-3)}$ ؟ وضح ذلك.

س 3: إذا علمت أن الخطأ النسبي في تقريب قياس معين هو0.02% ، وكانت القيمة التقريبية المسجلة هي $x^* = 250$ units. أوجد القيمة الحقيقية الممكنة.x

س 4: الخطأ النسبي لمساحة أرض هو 0.03، والمساحة الحقيقية.$320\ m^2$

احسب الخطأ المطلق.