قسم الاحصاء– المرحلة الثالثة

التحليل العددي

محاضرة: الخطأ الصلبي (Inherent Error)

م.م. لمى طارق عباس

1. المقدمة

عند حل أي مسـألة عددية نبدأ ببيانات إدخال (قياسـات، ثوابت، معاملات). إذا كانت هذه البيانات غير دقيقة أصلاً فإن النتيجة ستكون غير دقيقة مهما كانت طريقة الحل ممتازة. هذا النوع من الخطأ يسمى الخطأ الصلبي (Inherent Error)، ويسمى أيضاً الخطأ الموروث أو خطأ البيانات (Data Error).

التعريف

الخطأ الصلبي هو الخطأ الموجود في بيانات الإدخال قبل بدء العمليات الحسابية، والذي ينتقل (ينتشر) إلى النتيجة النهائية.

2. مصادر الخطأ الصلبي

- أخطاء القياس: دقة المسطرة أو الميزان أو الجهاز محدودة، فنكتب القياس بالشكل 12.4 ± 0.05.
- الثوابت التقريبية: مثل $\pi \approx 3.14$ أو $g \approx 9.8$ أو $\sqrt{2} \approx 1.414$ عندما تدخل بياناتٍ في المسألة.
- نتائج حسابات سابقة: ناتج مرحلة سابقة (يحمل خطأً) يصبح بيانات لمرحلة لاحقة.
- تبسيط النموذج الرياضي: إهمال عوامل مثل مقاومة الهواء أو الاحتكاك عند صياغة المعادلة.

3. الفرق بين الخطأ الصلبي والخطأ المتولد

وجه المقارنة	الخطأ الصلبي (Inherent)	الخطأ المتولد (Generated)
موضع حدوثه	في بيانات الإدخال قبل الحل	أثناء الحل بسبب الخوارزمية
الأنواع	قياس، ثوابت، نموذج	تقريب (Round-off) وبتر (Truncation)
يعتمد على	طبيعة المسألة وحالتها (Conditioning)	الطريقة المستعملة وثباتها (Stability)
هل تحسنه طريقة أفضل؟	لا، يلزم تحسين البيانات	نعم، باختيار خوارزمية أفضل

الخطأ الكلي في النتيجة يتكون تقريباً من مجموع النوعين:

$$\text{الخطأ الكلي} \approx \text{الخطاء الصلبي} + \text{الخطاء المتولد}$$

4. حساب الخطأ الصلبي في الدوال

ليكن $y = f(x)$ وكانت x^* قيمة تقريبية للمتغير x بخطأ مطلق Δx. نحصل من مفكوك تايلور من الرتبة الأولى على:

$$\Delta y \approx |f'(x)| \cdot \Delta x$$

وللدالة ذات عدة متغيرات $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\Delta f \approx |\partial f/\partial x_1|\Delta x_1 + |\partial f/\partial x_2|\Delta x_2 + \ldots + |\partial f/\partial x_n|\Delta x_n$$

5. رقم الحالة (Condition Number)

يقيس رقم الحالة مدى تضخيم المسألة للخطأ الصلبي النسبي

رقم الحالة يأتي من تحويل الخطأ المطلق الى خطأ نسبي ثم تطبيق القانون على كل دالة

رقم الحالة لدالة الاشتقاق العام

$$\Delta f \approx |f'(x)| \cdot \Delta x$$

`

نقسم على $|f|$ ونضرب ونقسم على $|x|$:

$$\Delta f/|f| \approx |x \cdot f'(x)/f(x)| \cdot (\Delta x/|x|) = \kappa \cdot \delta x$$

$$\delta f \approx \kappa(x) \cdot \delta x$$

أي ان :

$$\kappa(x) = |\, x \cdot f'(x) \,/\, f(x)\,|$$

- إذا كان κ صغيراً (قريباً من 1 أو أقل): المسألة جيدة الحالة (Well-conditioned)، والخطأ الصغير في البيانات يعطي خطأً صغيراً في النتيجة.
- إذا كان κ كبيراً: المسألة سيئة الحالة (Ill-conditioned)، وتغيير صغير في البيانات يسبب تغييراً كبيراً في النتيجة.

أمثلة على أرقام الحالة لدوال شائعة:

الدالة	رقم الحالة κ	متى تكون سيئة الحالة؟
x^n	$x^n : f' = nx^{n-1}, k = \|x.n.x^{n-1}/x^n\| = \|n\|$	عندما n كبير
$\sqrt{x}$	$\sqrt{x} : f' = 1/(2\sqrt{x}), k = \|x/(2\sqrt{x}\sqrt{x}) = x/(2x) = 1/2$	لا تكون سيئة الحالة أبداً
e^x	$e^x : f' = e^x, k = \|x \cdot e^x / e^x\| = \|x\|$	ذ

$\ln x$	$\ln x : f' = 1/x \ , \ k = \| x\ (1/x) / \ln x \| = 1/\|\ln x\|$	عندما x قريب من 1 يقترب المقام من الصفر عندما x تقترب من 1 K سوف تصبح كبيرة
$1/(1-x)$	$1/(1-x) = (1-X)^{-1} : f' = (-1)\ (1-X)^{-2}(-1) = (1-X)^{-2} = 1/(1-X)^2 \ , \ K = \|X .[\ 1/(1-X)^2\ ] / [1/(1-X)] = X . (1-X)/\ (1-X)^2\ \| = \ \|x/(1-X)\|$	عندما x قريب من 1 يقترب المقام من الصفر عندما x تقترب من 1 K سوف تصبح كبيرة

ملاحظة مهمة

الخطأ الصلبي صفة للمسألة نفسها وليس للخوارزمية. فإذا كانت المسألة سيئة الحالة فلن تنقذها أي طريقة حل؛ والحل الوحيد هو الحصول على بيانات أدق.

6. أمثلة محلولة

مثال 1

قيس ضلع مربع فكان $a = 5.2$ cm بخطأ مطلق أعلى 0.05 cm. جد مساحته مع الخطأ الصلبي المطلق والنسبي.

الحل:

$$A = a^2 = (5.2)^2 = 27.04$$

$$\Delta A \approx |dA/da| \cdot \Delta a = 2a \cdot \Delta a = 2(5.2)(0.05) = 0.52$$

$$\delta A = 0.52 \ / \ 27.04 \approx 0.0192 \ \ (1.92\ \%)$$

تحقق: الخطأ النسبي للمربع يساوي ضعف الخطأ النسبي للضلع: $2 \times (0.05/5.2) = 0.0192$ ✓.

(رقم الحالة هو 2 حسب الجدول x^n ال $k = |n|$

$$\Delta A \ / \ A = 2a \cdot \Delta a \ / A$$

$$\Delta A \ / \ A = 2a \cdot \Delta a \ / a^2$$

$$\delta A = 2\ \delta x$$

مثال 2

السؤال: جد $\sqrt{x}$ عند $x = 25.0$ علماً أن الخطأ المطلق في x هو 0.05. ثم جد رقم الحالة.

الحل:

$$y = \sqrt{25} = 5, \quad f'(x) = 1/(2\sqrt{x}) = 1/10$$
$$\Delta y \approx (1/10)(0.05) = 0.005, \quad \delta y = 0.005/5 = 0.001$$
$$\kappa = |x\, f'(x)/f(x)| = 25 \cdot (1/10) \,/\, 5 = 1/2$$

الخطأ النسبي في x يساوي 25/0.05 = 0.002، وفي النتيجة 0.001 أي نصفه تماماً، وهذا ما يعطيه رقم الحالة. المسألة جيدة الحالة.

$$\delta y = k(x).\, \delta x$$

$$\delta y = 1/2.\, \delta x$$

مثال 3

السؤال: جد رقم الحالة للدالة f(x) = ln x عند x = 1.01 وعند x = 5، وعلّق على النتيجة.

الحل:

$$\kappa(x) = |x \cdot (1/x) \,/\, \ln x| = 1 \,/\, |\ln x|$$
$$\text{عند } x = 1.01: \quad \kappa = 1/0.00995 \approx 100.5$$
$$\text{عند } x = 5: \quad \kappa = 1/1.6094 \approx 0.62$$

عند x = 1.01 المسألة سيئة الحالة: خطأ نسبي في x مقداره 1 % يتضخم إلى نحو 100 % في ln x. أما عند x = 5 فالمسألة جيدة الحالة.

مثال 4

السؤال: جد قيمة f(x) = 1/(1 − x) عند x = 0.99 علماً أن الخطأ المطلق في x هو 0.005.

الحل:

$$f(0.99) = 1/0.01 = 100$$
$$\Delta f \approx |f'(x)|\Delta x = \Delta x/(1-x)^2 = 0.005/0.0001 = 50$$
$$\delta f = \Delta f \,/\, f$$
$$\delta f = 50/100 = 0.5$$
$$\delta x = \Delta x \,/\, x$$
$$\delta x = 0.005/0.99 = 0.00505$$

التحقق برقم الحالة

$$\kappa = |x/(1-x)| = 0.99/0.01 = 99$$
$$\delta f = k\,.\,\delta x = 99 \text{ x } 0.00505 = 0.5$$

النتيجتان متطابقتان

هذا مثال على مسألة سيئة الحالة.

مثال 5

السؤال: حل النظام الخطي: $x + 1.0001y = 2.0001$ ، $x + y = 2$. ثم غيّر الطرف الأيمن للمعادلة الثانية إلى 2.0002 وقارن الحلين.

الحل:

بطرح المعادلة الأولى من الثانية

$x + y = 2$ .....(1)

$x + 1.0001y = 2.0001$ .....(2)

نحصل على

$0.0001y = 0.0001$

$y = 1, \quad x = 1$

بعد التغيير

$0.0001y = 0.0002$

$y = 2, \quad x = 0$

تغيّر البيانات بنسبة تقارب 0.005 % فقط (من 2.0001 إلى 2.0002) فتغيّر الحل تغيراً كاملاً (x من 1 إلى 0 و y من 1 إلى 2). أي تغير بنسبة 100% تغير صغير جدا في البيانات سبب تغيير كامل وهذا هو التغير الصلبي المضخم