محاضرة :الخطأ المبتور (Truncation Error) وتطبيقاته

المرحلة الثالثة / كلية الإدارة والاقتصاد / مادة التحليل العددي

م.م. لمى طارق عباس

أهداف المحاضرة(Learning Objectives)

تهدف المحاضرة إلى تمكين طالب المرحلة الثالثة في كلية الإدارة والاقتصاد من تحقيق ما يلي:

1- فهم المفهوم العلمي للخطأ المبتور (Truncation Error) والتمييز بينه وبين أنواع الأخطاء الأخرى مثل خطأ التدوير.(Rounding Error)

2- إدراك كيفية نشوء الخطأ المبتور أثناء اقتطاع المتسلسلات اللا نهائية(مثل متسلسلات تايلور وماكلوران) أو عند تقريب المشتقات والتكاملات عددياً.

3- التمكن من حساب القيمة التقريبية والخطأ المبتور المطلق والنسبي في التطبيقات الرياضية والإحصائية المختلفة.

4- تطبيق أساليب التحليل العددي في حل النماذج الاقتصادية وتقريب الدوال المعقدة (مثل الدوال الأسية واللوغاريتمي).

5- موازنة العلاقة بين دقة النموذج الكمي ودقة الحسابات وبين التكلفة والحجم الحسابي اللازم للوصول إلى النتيجة المطلوبة.

أولاً :مقدمة ومفهوم الخطأ المبتور(Truncation Error)

في التحليل العددي والأساليب الكمية، غالباً ما يتم التعبير عن الدوال الرياضية المعقدة والنماذج الاقتصادية على شكل سُلاسل لا نهائية (Infinite Series) مثل متسلسلة تايلور (Taylor Series) أو متسلسلة ماكلوران (Maclaurin Series).

وحيث إنه من المستحيل حساب عدد لا نهائي من الحدود عند إجراء الحسابات العملية أو البرمجية، فإننا نضطر إلى' بتر 'قطع (المتسلسلة عند حد معين، وإهمال باقي الحدود اللا نهائية).

تعريف أساسي

تعريف الخطأ المبتور (Truncation Error) : هو الفرق الناتج بين القيمة الحقيقية المحسوبة باستخدام متسلسلة لا نهائية (والقيمة التقريبية) المحسوبة بعد اقتطاع أو بتر المتسلسلة عند حد معين n .

ثانياً :الصيغة الرياضية للخطأ المبتور

إذا كانت لدينا متسلسلة تعبر عن دالة f(x) على النحو التالي:

$$f(x) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots = \Sigma\, a_k \text{ (من } k=0 \text{ إلى } \infty)$$

وحسبنا القيمة التقريبية المقتطعة $P_n(x)$ عند الحد n :

$$P_n(x) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

فإن الخطأ المبتور المطلق (E_t) هو مجموع الحدود المتبقية التي تم إهمالها:

$$E_t = f(x) - P_n(x) = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \Sigma\, a_k \text{ (من } k=n+1 \text{ إلى } \infty)$$

أهمية التطبيق:

ملاحظة اقتصادية / إحصائية :في النماذج الاقتصادية والتنبؤ، كلما زاد عدد الحدود المحتفظ بها، قلَّ الخطأ المبتور وزادت دقة النموذج، ولكن ذلك يأتي على حساب وقت وتكلفة المعالجة الحسابية (Computational Cost).

ثالثاً :أمثلة

مثال :(1) حساب الدالة الأسية e^x

تُستخدم الدالة الأسية بكثرة في حساب الفوائد المركبة وتوقع النمو الاقتصادي .تُعطى متسلسلة ماكلوران للدالة e^x بالصيغة:

$$e^x = 1 + x + (x^2/2!) + (x^3/3!) + (x^4/4!) + \dots$$

المطلوب:

1- احسب القيمة التقريبية لـ $e^{0.5}$ باستخدام الحدود الأربعة الأولى فقط.

2- احسب الخطأ المبتور المطلق والنسبي علماً أن القيمة الحقيقية المقربة هي. $e^{0.5} \approx 1.648721$

الحل:

- الخطوة 1 :حساب القيمة التقريبية (P4)

الحدود الأربعة الأولى:(n = 0, 1, 2, 3)

$$P4(0.5) = 1 + 0.5 + (0.5)^2/2! + (0.5)^3/3!$$

$$P4(0.5) = 1 + 0.5 + (0.25 / 2) + (0.125 / 6)$$

$$P4(0.5) = 1 + 0.5 + 0.125 + 0.020833 = 1.645833$$

- الخطوة 2 :حساب الخطأ المبتور المطلق (E_t)

E_t = | القيمة الحقيقية – القيمة التقريبية |

$E_t = |1.648721 - 1.645833| = 0.002888$

- الخطوة 3 :حساب الخطأ المبتور النسبي (E_r)

$E_r = (E_t$ / القيمة الحقيقية) × 100%

$E_r = (0.002888 / 1.648721) \times 100\% \approx 0.175\%$

مثال (2) :التقريب باستخدام صيغة الفروق الأمامية(Numerical Differentiation)

في التنبؤ بالتكاليف الحدية، يُستخدم التقريب الخطي للمشتقة الأولى:

$$f'(x) \approx [f(x + h) - f(x)] / h$$

ويُعطى حد الخطأ المبتور النظري في هذه الصيغة بالمعادلة :

$$E_T = -(h / 2) \cdot f''(\xi)$$

إذا كانت دالة التكلفة الكلية $f(x) = x^3$ ونريد حساب المشتقة عند $x = 2$ بحجم خطوة: $h = 0.1$

1- احسب التقريب العددي للمشتقة.

2- احسب الخطأ المبتور الفعلي.

الحل:

- القيم الحقيقية:

$f(2) = 2^3 = 8$

$f(2.1) = (2.1)^3 = 9.261$

المشتقة الحقيقية:

$f'(x) = 3x^2 \Leftarrow f'(2) = 3(2)^2 = 12$

- التقريب العددي:

$f'(2) \approx (9.261 - 8) / 0.1 = 1.261 / 0.1 = 12.61$

- الخطأ المبتور الفعلي:

$E_T = 12 - 12.61 = -0.61$ (أو $|E_t| = 0.61$)

خامساً :الاستنتاجات والتوصيات (Conclusions & Recommendations)

بناءً على الشرح الرياضي والأمثلة التطبيقية المحلولة، نستنتج ما يلي:

1- حتمية الخطأ المبتور :تُظهر الدراسة أن الخطأ المبتور أمر لا مفر منه عند التعامل مع الدوال غير الخطيّة والمتسلسلات اللا نهائية في التطبيقات الحسابية، نتيجة الاقتصار على عدد محدود من الحدود.

2- العلاقة بين عدد الحدود ودقة التقدير :تزداد دقة التقدير وينخفض مقدار الخطأ المبتور بشكل ملحوظ كلما تم تضمين عدد أكبر من حدود المتسلسلة.

3- أثر حجم الخطوة :(Step Size – h) في التقريب العددي للمشتقات والتفاضل، يقل الخطأ المبتور بتقليل حجم الخطوة h ، ولكن تقليل h بدرجة كبيرة جداً قد يؤدي لزيادة أخطاء التدوير.(Rounding Errors)

4- الأهمية في النماذج الاقتصادية :يساعد فهم الخطأ المبتور الباحثين والمحللين الإحصائيين في تقدير مدى موثوقية النماذج الكمية، وموازنة الدقة المطلوبة مع الجهد والتكلفة الحسابية.