جامعة المستنصرية / كلية الإدارة والاقتصاد
قسم الاحصاء / المرحلة الثالثة

المادة: التحليل العددي (Numerical Analysis)
الكورس الدراسي الأول
العام الدراسي: 2025/2026

الموضوع / الفصل الثاني

حل المعادلات غيرالخطية (إيجاد الجذور)

م.م. لمى طارق عباس

1- المقدمة (Introduction & Objectives)

تُعد مشكلة إيجاد جذور المعادلات غير الخطية من المشاكل الجوهرية في التحليل العددي والتطبيقات الرياضية والفيزيائية الهندسية.

تعريف الجذر:(Root Definition)

نقول إن العدد α هو جذر أو صفر للدالة f(x) إذا وفقط إذا كان $f(\alpha) = 0$:

الهدف من الطرق العددية:

عندما تصعب أو تستحيل الحلول التحليلية المباشرة للمعادلات الشبه معقدة مثل $f(x) = x \cdot e^x - \cos(x)$ = 0)، نلجأ إلى الطرق العددية التكرارية لحساب الجذر التقريبي بمقدار خطأ محدد ومقبول ε.

2- مبرهنة القيمة المتوسطة (Bolzano's Theorem)

تُستخدم المبرهنة لتحديد الفترة المغلقة [a, b] التي تحتوي على جذر واحد على الأقل.

نص المبرهنة : إذا كانت الدالة f(x) مستمرة على الفترة المغلقة [a, b] وكان حاصل ضرب الدالتين عند طرفي الفترة سالباً أي $f(a) \cdot f(b) < 0$ ، فهذا يعني وجود جذر واحد على الأقل $\alpha \in (a, b)$ بحيث $f(\alpha) = 0$.

3- الطرق العددية لإيجاد الجذور(Numerical Methods)

أولاً :طريقة تنصيف الفترات(Bisection Method)

طريقة مغلقة (Bracketing Method) تقوم بتنصيف الفترة الحاوية على الجذر بشكل متتابع حتى الوصول إلى الدقة المطلوبة وبخطأ ε .

- الصيغة:

$$r_k = (a_k + b_k) / 2$$

- شرط التوقف : $|f(c_k)| < \varepsilon$ او $|b_k - a_k| < \varepsilon$

خطوات الحل:

1. إيجاد f(a), f(b).
2. إيجاد قيمة r حيث r = (a+b)/2 ثم إيجاد f(r).
3. انشاء جدول مكون من 6 حقول:

n	a	b	r	f(a)	f(r)

4. إذا كانت إشارة f(a) مساوية ل f(r) فان a = r، وإذا كانت إشارة f(b) مساوية ل f(r) فان b = r.
5. توقف عن الحل عند تحقق احد الشرطين: $|a_n - b_n| \le \varepsilon$ ، $|f(r)| \le \varepsilon$.

مثال: اوجد جذر المعادلة $f(x) = x^2 - x - 1 = 0$ على الفترة [1,2] وبخطأ 0.002.

الحل:

$a = 1 \longrightarrow f(a) = (1)^2 - (1) - 1 = -1$

$b = 2 \longrightarrow f(b) = (2)^2 - (2) - 1 = 1$

$r = (a+b)/2 = (1+2)/2 = 3/2 = 1.5 \longrightarrow f(r) = (1.5)^2 - (1.5) - 1 = -0.25$

n	a	b	r = (a+b)/2	f(a)	f(r)
1	1	2	1.5	−1	−0.25
2	1.5	2	1.75	−0.25	0.312
3	1.5	1.75	1.625	−0.25	0.015
4	1.5	1.625	1.562	−0.25	−0.122
5	1.562	1.625	1.593	−0.122	−0.055
6	1.593	1.625	1.609	−0.055	−0.020
7	1.609	1.625	1.617	−0.020	−0.002

$|f(r)| \le \varepsilon \Longrightarrow |-0.002| \le 0.002$

اذن جذر المعادلة هي $r_7 = 1.617$

ثانيا : طريقة النقطة الثابتة (Fixed–point method)

تسمى ايضاً طريقة التكرار البسيط تتم كتابة المعادلة $f(x) = 0$ بالصيغة $x = g(x)$ بحيث ان هذه الصيغة تكون مناسبة لبناء سلسلة من القيم تؤول في النهاية الى جذر المعادلة $f(x) = 0$.

طريقة الحل:

1. جعل المعادلة بالصيغة $x = g(x)$.
2. اختيار اي قيمة مبدئية من داخل الفترة التي يوجد بها جذر المعادلة.
3. الاستمرار لحين الوصول الى الدقة المطلوبة.

حيث تُسمى النقطة α التي تحقق $\alpha = g(\alpha)$ بالنقطة الثابتة.

•الصيغة التكرارية:

$x_{n+1} = g(x_n)$

- شرط تقارب الطريقة :(Convergence Condition) تتقارب الطريقة نحو الجذر α إذا وفقط اذا كانت $g(x)$ قابلة للاشتقاق وتحقق شرط الانكماش

$$|g'(x)| < 1 \quad \forall\, x \,\epsilon\, [\,a, b]$$

مثال: اوجد جذر المعادلة $f(x) = \cos(2x) - x = 0$ على الفترة $[0.4,0.7]$.

الحل:

$\cos(2x) = x \longrightarrow 2x = \cos^{-1}(x) \Longrightarrow x = \cos^{-1}(x)/2$

$x_{n+1} = \cos^{-1}(x_n)/2$

$|g'(x)| < 1$

$$|g'(x)| = \frac{1}{2} \times \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{-1}{2\sqrt{(1-x^2)}}$$

هذه القيمة تكبر كلما كبر x فاكبرقيمة لها في الفترة هي عندما تكون x= 0.7 تكون قيمة المشتقة تساوي 0.70 < 1 .

$x_0 = 0.6$

$x_1 = \cos^{-1}(x_0)/2 = \cos^{-1}(0.6)/2 = 0.46365$

$x_2 = \cos^{-1}(x_1)/2 = \cos^{-1}(0.46365)/2 = 0.54434$

$x_3 = \cos^{-1}(x_2)/2 = \cos^{-1}(0.54434)/2 = 0.4976$

$x_4 = \cos^{-1}(x_3)/2 = \cos^{-1}(0.4976)/2 = 0.52499$

$x_5 = \cos^{-1}(x_4)/2 = \cos^{-1}(0.52499)/2 = 0.50905$

$x_6 = \cos^{-1}(x_5)/2 = \cos^{-1}(0.50905)/2 = 0.51836$

$x_7 = \cos^{-1}(x_6)/2 = \cos^{-1}(0.51836)/2 = 0.514933$

$x_8 = \cos^{-1}(x_7)/2 = \cos^{-1}(0.51436)/2 = 0.514933$

جذر المعادلة هي $x \approx 0.514933$

ثانياً :طريقة نيوتن – رافسون(Newton–Raphson Method)

هذه طريقة تعتبر من أشهر الطرق العددية المستخدمة لإيجاد جذر المعادلة $f(x) = 0$ والتقريب من قيمة معينة. وهذه الطريقة هي حالة خاصة من طريقة النقطة الثابتة تستخدم صيغة التكرار للوصول الى الجذر المطلوب هي:

$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ بشرط $\acute{f}(x_n) \neq 0$

طريقة الحل:

1. ايجاد $x_0 = (a+b)/2$.
2. ايجاد $f(x_0)$ و $f'(x_0)$.
3. حساب x_{n+1} حسب القانون أعلاه.
4. توقف عن الحل عندما يكون $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$.

مثال: اوجد جذر المعادلة $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$ على الفترة $[0,1]$ وبخطأ $\varepsilon = 0.0015$.

الحل:

$x_0 = (a+b)/2 = (0+1)/2 = 0.5$

$f(x_0) = (0.5)^3 - (0.5)^2 + 2(0.5) - 1 = -0.125$

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$

$f'(0.5) = 3(0.5)^2 - 2(0.5) + 2 = 1.75$

$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = 0.5 - (-0.125)/1.75 = 0.5714$

$x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) = 0.5714 - 0.0028/1.8366 = 0.5698$

$x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2) = 0.5698 - (-0.00007)/1.8344 = 0.5698$

$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon \Longrightarrow |0.5698 - 0.5698| \leq 0.0015$

ثالثاً :طريقة القاطع (Secant Method)

لتطبيق هذه الطريقة نحتاج إلى تقريبين للجذر وهما x_1 و x_2، وكلا التقريبين يجب أن يكونا قريبين من الحل x نجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ فتكون القيمة التقريبية الجديدة للجذر عبارة عن نقطة تقاطع المستقيم مع المحور x بالتكرار نحصل على المعادلة التالية والتي من خلالها نحصل على التقريب الجديد للجذر.

خطوات الحل:

1. ايجاد f(b) و f(a).

2. حساب قيمة c حسب القانون $c = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$

3- ايجاد f(c).

4- انشاء جدول مكون من 7 حقول:

n	a	b	f(a)	f(b)	c	f(c)

4. لتكملة الجدول نجعل f(a) = f(b) , f(b) = f(c) , a = b , b = c وبعد ذلك ايجاد قيمة c و f(c) من جديد.

5. توقف عن الحل عندما يكون $|f(c)| \leq \varepsilon$.

مثال: اوجد جذر المعادلة $f(x) = x^2e^x\cos(2x) = 0$ على الفترة [0.7,0.8] بخطأ 0.005.

الحل:

$a = 0.7 \longrightarrow f(a) = (0.7)^2e^{0.7}\cos(2\times0.7) = 0.1677$

$b = 0.8 \longrightarrow f(b) = (0.8)^2e^{0.8}\cos(2\times0.8) = -0.0415$

$c = b - f(b)(b-a)/(f(b)-f(a)) = 0.8 - (-0.0415)(0.8-0.7)/(-0.0415-0.1677) = 0.7801$

$f(c) = (0.7801)^2e^{0.7801}\cos(2\times0.7801) = 0.0140$

n	a	b	f(a)	f(b)	c	f(c)
1	0.7	0.8	0.1677	−0.0415	0.7801	0.014
2	0.8	0.7801	−0.0415	0.014	0.7851	0.0008

$|f(c)| \leq \varepsilon \longrightarrow |0.0008| \leq 0.005$

اذن جذر المعادلة هي $c_2 = 0.7851$