مادة التحليل العددي – المرحلة الثالثة – قسم الإحصاء

محاضرة 7: إيجاد جذور المعادلات بالطريقة البيانية (طريقة الرسم)

Finding the roots of equations using the graphical metho (graphing method)

م.م. لمى طارق عباس

أهداف المحاضرة

بعد انتهاء المحاضرة يكون الطالب قادرًا على أن:

- يفسّر جذر المعادلة هندسيًا بوصفه نقطة تقاطع منحنى مع محور السينات أو مع منحنى آخر.
- يطبّق الطريقة البيانية بصيغتيها: رسم $y = f(x)$، أو رسم $y = g(x)$ و$y = h(x)$.
- يحسّن التقدير الأولي للجذر بالجدولة وتصغير الخطوة.
- يتعرّف حدود الطريقة ودورها في إيجاد التخمين الأولي لطرق التنصيف ونيوتن.

1. المقدمة

كثير من المعادلات لا يمكن حلها تحليليًا بصيغة مغلقة، مثل $e^x = 3x$ أو $\cos x = x$، ولذلك نلجأ إلى الطرق العددية. وتبدأ معظم هذه الطرق بتخمين أولي قريب من الجذر، والطريقة البيانية هي أبسط وسيلة للحصول عليه.

تعريف: الجذر (أو صفر الدالة) هو عدد r يحقق $f(r) = 0$. هندسيًا هو الإحداثي السيني لنقطة تقاطع منحنى $y = f(x)$ مع محور السينات.

2. الفكرة الأساسية

الصيغة الأولى: رسم الدالة مباشرة

نرسم المنحنى $y = f(x)$، فتكون جذور المعادلة $f(x) = 0$ هي الإحداثيات السينية لنقاط تقاطعه مع محور السينات.

الصيغة الثانية: تجزئة الدالة

نكتب $f(x) = g(x) - h(x)$، فتكافئ المعادلة $f(x) = 0$ المعادلة $g(x) = h(x)$. ثم نرسم المنحنيين $y = g(x)$ و$y = h(x)$ في نظام إحداثي واحد، فتكون الجذور هي الإحداثيات السينية لنقاط تقاطعهما.

لماذا الصيغة الثانية؟ لأن رسم منحنيين بسيطين (مثل e^x وخط مستقيم) أسهل وأدق من رسم منحنى مركّب. فمثلًا في $e^x - 3x = 0$ نرسم $y = e^x$ و$y = 3x$. ولاحظ أنه إذا تحققت $g(r) = h(r)$ فإن $f(r) = g(r) - h(r) = 0$.

3. خطوات الطريقة

1) نكتب المعادلة بالصورة $f(x) = 0$ ونحدد مجال الدالة (مثلًا $\ln x$ تتطلب $x > 0$).

2) نختار الصيغة المناسبة: الدالة مباشرة، أو تجزئتها إلى $g(x) = h(x)$.

3) نكوّن جدول قيم لـ x بخطوة ثابتة (مثل 0.5) على مدى مناسب.

4) نعيّن النقاط على المستوى ونصلها بمنحنى سلس.

5) نحدد نقاط التقاطع، ونسجّل الفترات التي تتغير فيها إشارة f.

6) نحسّن التقدير: نكوّن جدولًا جديدًا داخل الفترة بخطوة أصغر (0.1 ثم 0.01) أو نكبّر الرسم حول التقاطع.

7) نتحقق بالتعويض في المعادلة الأصلية، ونتأكد أن $f(r)$ قريبة من الصفر.

قاعدة التصغير (مهمة): في كل مرحلة نقسم الخطوة على 10، أي 0.5 ثم 0.1 ثم 0.01 ثم 0.001. نحسب f ابتداءً من بداية الفترة الحالية خطوة بعد خطوة إلى أن تتغير الإشارة، فتكون الفترة الجديدة بين آخر قيمة قبل التغيّر وأول قيمة بعده. وكل مرحلة تضيف منزلة عشرية واحدة إلى الجذر. نتوقف عند الدقة المطلوبة، ثم نختار من طرفي الفترة الأخيرة الطرف الذي قيمة $|f|$ عنده أصغر. ونكتب $r \approx$ لا $r =$ لأن الناتج تقريب للجذر الدقيق.

4. مبرهنة القيمة الوسطية (أساس قراءة الجداول)

المبرهنة: إذا كانت f مستمرة على $[a, b]$ وكانت $f(a)\cdot f(b) < 0$ فيوجد على الأقل عدد $r \in (a, b)$ يحقق $f(r) = 0$.

أي أن تغيّر إشارة الدالة بين نقطتين متتاليتين في الجدول يدل على وجود جذر بينهما. ولاحظ أن العكس غير صحيح، فعدم تغيّر الإشارة لا ينفي وجود جذور (كأن يوجد جذران في الفترة نفسها، أو جذر مكرر يمس المنحنى محور السينات)، وسنرى ذلك في المثال الرابع.

5. أمثلة محلولة

مثال (1): رسم الدالة مباشرة

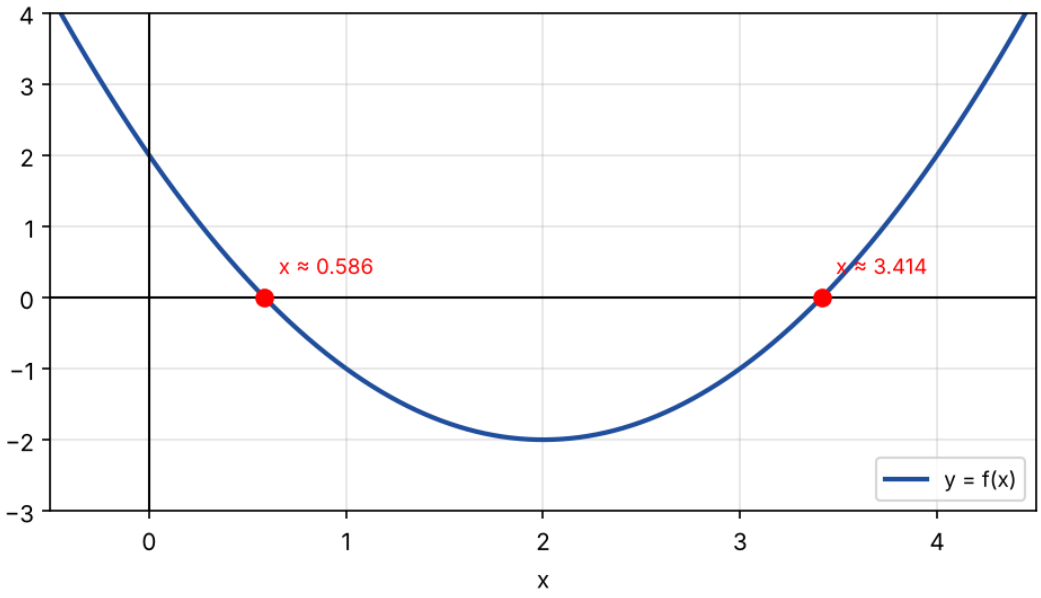
جد جذور المعادلة $x^2 - 4x + 2 = 0$ بالطريقة البيانية.

الحل:

نضع $f(x) = x^2 - 4x + 2$، ومجالها جميع الأعداد الحقيقية. نكوّن جدول القيم بخطوة 0.5:

x	f(x)	الإشارة
0	2.0000	+
0.5	0.2500	+
1	−1.0000	−
1.5	−1.7500	−
2	−2.0000	−
2.5	−1.7500	−
3	−1.0000	−
3.5	0.2500	+
4	2.0000	+

نرسم المنحنى (شكل 1)، وهو قطع مكافئ يقطع محور السينات في نقطتين.



الشكل (1): منحنى الدالة $x^2 - 4x + 2$

الجذر الأول

من الجدول الأول تتغير إشارة الدالة بين $x = 0.5$ و$x = 1$:

$$f(0.5) = 0.2500\,, \quad f(1) = -1.0000$$

فالجذر في الفترة:

$$\mathbf{r \in (0.5, 1)}$$

المرحلة 1: نصغّر الخطوة إلى 0.1 ونحسب f ابتداءً من $x = 0.5$ إلى أن تتغير إشارة f:

x	f(x)	الإشارة
0.5	0.2500	+
0.6	−0.0400	−

تغيرت الإشارة بين $x = 0.5$ و$x = 0.6$، فالجذر في الفترة:

$$\mathbf{r \in (0.5, 0.6)}$$

المرحلة 2: نصغّر الخطوة إلى 0.01 ونحسب f ابتداءً من $x = 0.5$ إلى أن تتغير إشارة f:

x	f(x)	الإشارة
0.50	0.25000	+
0.51	0.22010	+
0.52	0.19040	+
0.53	0.16090	+
0.54	0.13160	+
0.55	0.10250	+
0.56	0.07360	+
0.57	0.04490	+
0.58	0.01640	+
0.59	−0.01190	−

تغيرت الإشارة بين $x = 0.58$ و$x = 0.59$، فالجذر في الفترة:

$$\mathbf{r \in (0.58, 0.59)}$$

المرحلة 3: نصغّر الخطوة إلى 0.001 ونحسب f ابتداءً من $x = 0.58$ إلى أن تتغير إشارة f:

x	f(x)	الإشارة
0.580	0.01640	+
0.581	0.01356	+
0.582	0.01072	+

x	f(x)	الإشارة
0.583	0.00789	+
0.584	0.00506	+
0.585	0.00223	+
0.586	−0.00060	−

تغيرت الإشارة بين $x = 0.585$ و$x = 0.586$، فالجذر في الفترة:

$$\mathbf{r \in (0.585, 0.586)}$$

طول الفترة الآن 0.001 فنتوقف. نختار الطرف الذي تكون قيمة $|f|$ عنده أصغر (أي الأقرب إلى الصفر):

$$|f(0.585)| = 0.00223\,, \quad |f(0.586)| = 0.00060$$

إذن الجذر التقريبي هو:

$$\mathbf{r \approx 0.586}$$

الجذر الثاني

من الجدول الأول تتغير إشارة الدالة بين $x = 3$ و$x = 3.5$:

$$f(3) = -1.0000\,, \quad f(3.5) = 0.2500$$

فالجذر في الفترة:

$$\mathbf{r \in (3, 3.5)}$$

المرحلة 1: نصغّر الخطوة إلى 0.1 ونحسب f ابتداءً من $x = 3$ إلى أن تتغير إشارة f:

x	f(x)	الإشارة
3.0	−1.0000	−
3.1	−0.7900	−
3.2	−0.5600	−
3.3	−0.3100	−
3.4	−0.0400	−
3.5	0.2500	+

تغيرت الإشارة بين $x = 3.4$ و$x = 3.5$، فالجذر في الفترة:

$$\mathbf{r \in (3.4, 3.5)}$$

المرحلة 2: نصغّر الخطوة إلى 0.01 ونحسب f ابتداءً من $x = 3.4$ إلى أن تتغير إشارة f:

x	f(x)	الإشارة
3.40	−0.04000	−
3.41	−0.01190	−
3.42	0.01640	+

تغيرت الإشارة بين $x = 3.41$ و$x = 3.42$، فالجذر في الفترة:

$$\mathbf{r \in (3.41, 3.42)}$$

المرحلة 3: نصغّر الخطوة إلى 0.001 ونحسب f ابتداءً من $x = 3.41$ إلى أن تتغير إشارة f:

x	f(x)	الإشارة
3.410	−0.01190	−
3.411	−0.00908	−
3.412	−0.00626	−
3.413	−0.00343	−
3.414	−0.00060	−
3.415	0.00222	+

تغيرت الإشارة بين $x = 3.414$ و$x = 3.415$، فالجذر في الفترة:

$$\mathbf{r \in (3.414, 3.415)}$$

طول الفترة الآن 0.001 فنتوقف. نختار الطرف الذي تكون قيمة $|f|$ عنده أصغر (أي الأقرب إلى الصفر):

$$|f(3.414)| = 0.00060\,, \quad |f(3.415)| = 0.00222$$

إذن الجذر التقريبي هو:

$$\mathbf{r \approx 3.414}$$

التحقق التحليلي بالقانون العام:

القانون العام لحل المعادلة التربيعية: إذا كانت المعادلة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ فإن جذريها يُعطيان بالصيغة:

$$\mathbf{x = (-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}) / 2a}$$

في مثالنا $x^2 - 4x + 2 = 0$ فالمعاملات هي $a = 1$ و$b = -4$ و$c = 2$، فنعوّض:

$$x = (4 \pm \sqrt{(16 - 8)}) / 2 = (4 \pm \sqrt{8}) / 2$$

ولأن $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ نحصل على:

$$x = (4 \pm 2\sqrt{2}) / 2 = 2 \pm \sqrt{2}$$

فالجذران الدقيقان هما:

$$x_1 = 2 - \sqrt{2} \approx 0.5858\,, \quad x_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3.4142$$

وهما يطابقان ما حصلنا عليه بيانيًا (0.586 و3.414)، وهذا يؤكد صحة الطريقة البيانية. ونلاحظ أن الفرق بين الحل البياني والدقيق صغير جدًا، وكلما صغّرنا الخطوة اقتربنا من القيمة الدقيقة أكثر.

ملاحظة: استخدمنا هنا القانون العام لأن المعادلة تربيعية ويمكن التحقق منها بسهولة. أما المعادلات مثل $e^x = 3x$ و$\cos x = x$ فلا توجد لها صيغة جاهزة كهذه، ولذلك نحتاج إلى الطرق العددية ومنها الطريقة البيانية.

مثال (2): تجزئة الدالة إلى منحنيين

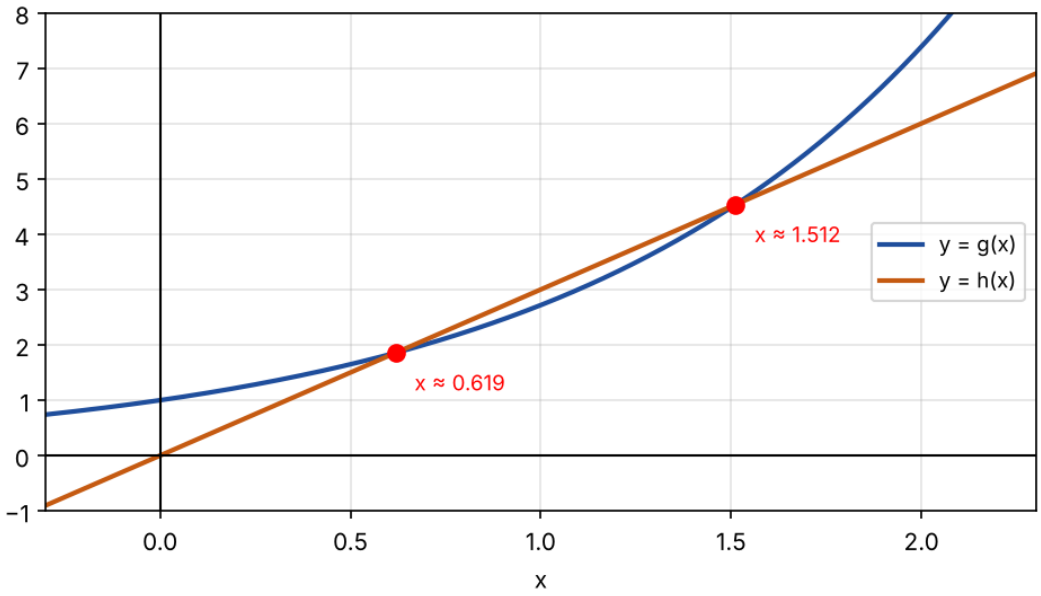
جد الجذور الحقيقية للمعادلة $e^x - 3x = 0$.

الحل:

نكتب المعادلة بالصورة $e^x = 3x$، ونأخذ $g(x) = e^x$ و$h(x) = 3x$، ونكوّن الجدول:

x	g(x)	h(x)	f(x) = g − h	الإشارة
0	1.0000	0.0000	1.0000	+
0.5	1.6487	1.5000	0.1487	+
1	2.7183	3.0000	−0.2817	−
1.5	4.4817	4.5000	−0.0183	−
2	7.3891	6.0000	1.3891	+

نرسم $y = g(x)$ و$y = h(x)$ في نظام واحد (شكل 2)، فنرى أن المنحنى يقطع المستقيم في نقطتين.



الشكل (2): تقاطع $y = e^x$ مع $y = 3x$

الجذر الأول

من الجدول الأول تتغير إشارة الدالة بين $x = 0.5$ و$x = 1$:

$$f(0.5) = 0.1487\,, \quad f(1) = -0.2817$$

فالجذر في الفترة:

$$\mathbf{r \in (0.5,\ 1)}$$

المرحلة 1: نصغّر الخطوة إلى 0.1 ونحسب g وh ثم $f = g - h$ ابتداءً من $x = 0.5$ إلى أن تتغير إشارة f:

الإشارة	$f(x) = g - h$	h(x)	g(x)	x
+	0.1487	1.5000	1.6487	0.5
+	0.0221	1.8000	1.8221	0.6
−	−0.0862	2.1000	2.0138	0.7

تغيرت الإشارة بين $x = 0.6$ و$x = 0.7$، فالجذر في الفترة:

$$\mathbf{r \in (0.6,\ 0.7)}$$

المرحلة 2: نصغّر الخطوة إلى 0.01 ونحسب g وh ثم $f = g - h$ ابتداءً من $x = 0.6$ إلى أن تتغير إشارة f:

الإشارة	$f(x) = g - h$	$h(x)$	$g(x)$	x
$+$	0.02212	1.80000	1.82212	0.60
$+$	0.01043	1.83000	1.84043	0.61
$-$	-0.00107	1.86000	1.85893	0.62

تغيرت الإشارة بين $x = 0.61$ و$x = 0.62$، فالجذر في الفترة:

$$\mathbf{r \in (0.61, 0.62)}$$

المرحلة 3: نصغّر الخطوة إلى 0.001 ونحسب g وh ثم $f = g - h$ ابتداءً من $x = 0.61$ إلى أن تتغير إشارة f:

الإشارة	$f(x) = g - h$	$h(x)$	$g(x)$	x
$+$	0.01043	1.83000	1.84043	0.610
$+$	0.00927	1.83300	1.84227	0.611
$+$	0.00812	1.83600	1.84412	0.612
$+$	0.00696	1.83900	1.84596	0.613
$+$	0.00581	1.84200	1.84781	0.614
$+$	0.00466	1.84500	1.84966	0.615
$+$	0.00351	1.84800	1.85151	0.616
$+$	0.00236	1.85100	1.85336	0.617
$+$	0.00121	1.85400	1.85521	0.618
$+$	0.00007	1.85700	1.85707	0.619
$-$	-0.00107	1.86000	1.85893	0.620

تغيرت الإشارة بين $x = 0.619$ و$x = 0.62$، فالجذر في الفترة:

$$\mathbf{r \in (0.619, 0.62)}$$

طول الفترة الآن 0.001 فنتوقف. نختار الطرف الذي تكون قيمة $|f|$ عنده أصغر (أي الأقرب إلى الصفر):

$$|f(0.619)| = 0.00007\,, \quad |f(0.62)| = 0.00107$$

إذن الجذر التقريبي هو:

$$\mathbf{r \approx 0.619}$$

الجذر الثاني

من الجدول الأول تتغير إشارة الدالة بين $x = 1.5$ و$x = 2$:

$$f(1.5) = -0.0183\ ,\quad f(2) = 1.3891$$

فالجذر في الفترة:

$$\mathbf{r \in (1.5,\ 2)}$$

المرحلة 1: نصغّر الخطوة إلى 0.1 ونحسب g وh ثم $f = g - h$ ابتداءً من $x = 1.5$ إلى أن تتغير إشارة f:

الإشارة	$f(x) = g - h$	h(x)	g(x)	x
−	−0.0183	4.5000	4.4817	1.5
+	0.1530	4.8000	4.9530	1.6

تغيرت الإشارة بين $x = 1.5$ و$x = 1.6$، فالجذر في الفترة:

$$\mathbf{r \in (1.5,\ 1.6)}$$

المرحلة 2: نصغّر الخطوة إلى 0.01 ونحسب g وh ثم $f = g - h$ ابتداءً من $x = 1.5$ إلى أن تتغير إشارة f:

الإشارة	$f(x) = g - h$	h(x)	g(x)	x
−	−0.01831	4.50000	4.48169	1.50
−	−0.00327	4.53000	4.52673	1.51
+	0.01223	4.56000	4.57223	1.52

تغيرت الإشارة بين $x = 1.51$ و$x = 1.52$، فالجذر في الفترة:

$$\mathbf{r \in (1.51,\ 1.52)}$$

المرحلة 3: نصغّر الخطوة إلى 0.001 ونحسب g وh ثم $f = g - h$ ابتداءً من $x = 1.51$ إلى أن تتغير إشارة f:

الإشارة	$f(x) = g - h$	h(x)	g(x)	x
−	−0.00327	4.53000	4.52673	1.510
−	−0.00174	4.53300	4.53126	1.511
−	−0.00021	4.53600	4.53579	1.512
+	0.00133	4.53900	4.54033	1.513

تغيرت الإشارة بين $x = 1.512$ و$x = 1.513$، فالجذر في الفترة:

$$\mathbf{r \in (1.512,\ 1.513)}$$

طول الفترة الآن 0.001 فنتوقف. نختار الطرف الذي تكون قيمة |f| عنده أصغر (أي الأقرب إلى الصفر):

$$|f(1.512)| = 0.00021\,, \quad |f(1.513)| = 0.00133$$

إذن الجذر التقريبي هو:

$$\mathbf{r \approx 1.512}$$

إذن للمعادلة جذران حقيقيان تقريبًا 0.619 و1.512. تحقق: عند $x = 0.619$ نجد $e^x \approx 1.857$ و $3x = 1.857$.

عندما $x = 1.512$ نجد $e^x \approx 4.536$ و $3x \approx 4.536$

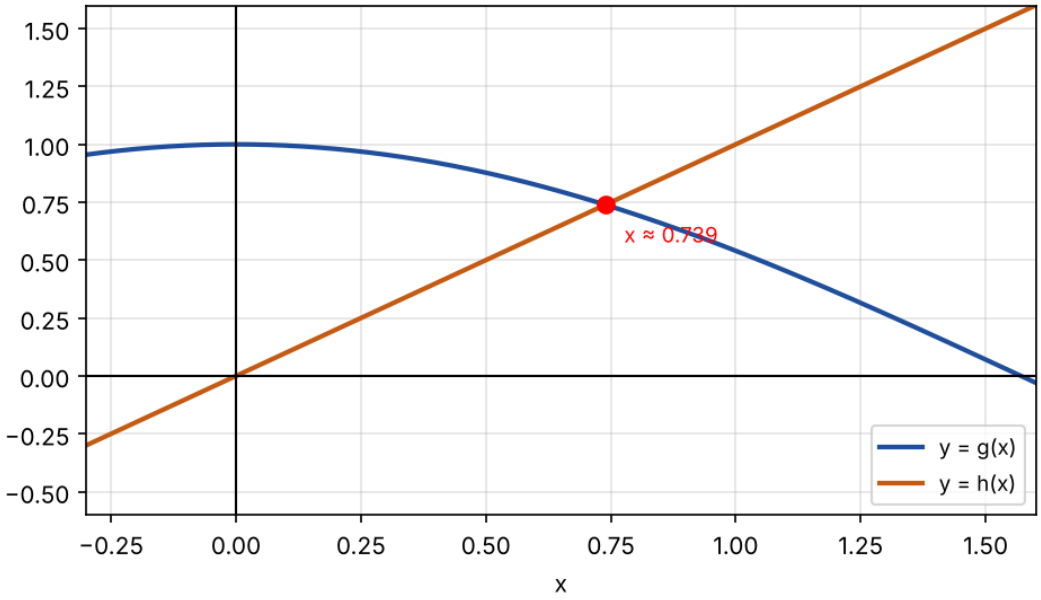
مثال (3): معادلة مثلثية

جد جذر المعادلة $\cos x = x$، علمًا أن x بالراديان.

الحل:

نأخذ $g(x) = \cos x$ و$h(x) = x$. المنحنى $\cos x$ محصور بين -1 و1، فأي جذر يجب أن يقع في $[-1, 1]$، ثم نكوّن جدولًا على $[0, 1.5]$:

x	g(x)	h(x)	f(x) = g − h	الإشارة
0	1.0000	0.0000	1.0000	+
0.5	0.8776	0.5000	0.3776	+
1	0.5403	1.0000	−0.4597	−
1.5	0.0707	1.5000	−1.4293	−



الشكل (3): تقاطع $y = \cos x$ مع $y = x$

الجذر الأول

من الجدول الأول تتغير إشارة الدالة بين $x = 0.5$ و$x = 1$:

$$f(0.5) = 0.3776\,, \quad f(1) = -0.4597$$

فالجذر في الفترة:

$$\mathbf{r \in (0.5,\ 1)}$$

المرحلة 1: نصغّر الخطوة إلى 0.1 ونحسب g وh ثم $f = g - h$ ابتداءً من $x = 0.5$ إلى أن تتغير إشارة f:

x	g(x)	h(x)	$f(x) = g - h$	الإشارة
0.5	0.8776	0.5000	0.3776	+
0.6	0.8253	0.6000	0.2253	+
0.7	0.7648	0.7000	0.0648	+
0.8	0.6967	0.8000	−0.1033	−

تغيرت الإشارة بين $x = 0.7$ و$x = 0.8$، فالجذر في الفترة:

$$\mathbf{r \in (0.7,\ 0.8)}$$

المرحلة 2: نصغّر الخطوة إلى 0.01 ونحسب g وh ثم $f = g - h$ ابتداءً من $x = 0.7$ إلى أن تتغير إشارة f:

الإشارة	$f(x) = g - h$	$h(x)$	$g(x)$	x
$+$	0.06484	0.70000	0.76484	0.70
$+$	0.04836	0.71000	0.75836	0.71
$+$	0.03181	0.72000	0.75181	0.72
$+$	0.01517	0.73000	0.74517	0.73
$-$	-0.00153	0.74000	0.73847	0.74

تغيرت الإشارة بين $x = 0.73$ و$x = 0.74$، فالجذر في الفترة:

$$\mathbf{r \in (0.73, 0.74)}$$

المرحلة 3: نصغّر الخطوة إلى 0.001 ونحسب g وh ثم $f = g - h$ ابتداءً من $x = 0.73$ إلى أن تتغير إشارة f:

الإشارة	$f(x) = g - h$	$h(x)$	$g(x)$	x
$+$	0.01517	0.73000	0.74517	0.730
$+$	0.01351	0.73100	0.74451	0.731
$+$	0.01184	0.73200	0.74384	0.732
$+$	0.01017	0.73300	0.74317	0.733
$+$	0.00850	0.73400	0.74250	0.734
$+$	0.00683	0.73500	0.74183	0.735
$+$	0.00516	0.73600	0.74116	0.736
$+$	0.00349	0.73700	0.74049	0.737
$+$	0.00182	0.73800	0.73982	0.738
$+$	0.00014	0.73900	0.73914	0.739
$-$	-0.00153	0.74000	0.73847	0.740

تغيرت الإشارة بين $x = 0.739$ و$x = 0.74$، فالجذر في الفترة:

$$\mathbf{r \in (0.739, 0.74)}$$

طول الفترة الآن 0.001 فنتوقف. نختار الطرف الذي تكون قيمة $|f|$ عنده أصغر (أي الأقرب إلى الصفر):

$$|f(0.739)| = 0.00014\,, \quad |f(0.74)| = 0.00153$$

إذن الجذر التقريبي هو:

$$\mathbf{r \approx 0.739}$$

تنبيه: يجب ضبط الحاسبة على وضع الراديان (RAD) عند حساب القيم، وإلا ستكون القيم خاطئة.

المستقيم $y = x$ متزايد دائمًا بينما $\cos x$ متناقص على $[0, 1]$، فلا يتقاطعان إلا مرة واحدة، أي أن الجذر الحقيقي وحيد.

8. خلاصة المحاضرة

- جذور $f(x) = 0$ هي نقاط تقاطع $y = f(x)$ مع محور السينات، أو الإحداثيات السينية لتقاطع $y = g(x)$ مع $y = h(x)$ عند كتابة $f = g - h$.
- تغيّر إشارة f بين نقطتين يدل على وجود جذر بينهما (مبرهنة القيمة الوسطية).
- نحسّن التقدير بتصغير الخطوة، والخطأ ≥ نصف طول آخر فترة.
- الطريقة مناسبة للتخمين الأولي، ثم تُكمَل بالتنصيف أو نيوتن للحصول على دقة أعلى.