طريقة الخطأين (الخوارزمي)

(طريقة الموضع الكاذب – False Position / Regula Falsi)

م.م. لمى طارق عباس

١. الفكرة العامة

طريقة الخطأين من الطرق التي تُستخدم لإيجاد جذر المعادلة $f(x) = 0$ ، وتنسب إلى الخوارزمي. تبدأ الطريقة بتخمينين للجذر، ثم تحسب «الخطأ» الناتج عن كل تخمين، أي قيمة الدالة عنده، وتستعمل الخطأين معاً للوصول إلى تخمين أفضل.

تشبه الطريقةُ طريقة التنصيف في أنها تحصر الجذر بين نقطتين تختلف إشارة الدالة عندهما، لكنها لا تأخذ منتصف الفترة، بل تأخذ النقطة التي يقطع فيها الخط المستقيم الواصل بين النقطتين محور x ، فتستفيد من قيم الدالة نفسها.

٢. اشتقاق القانون

لتكن a و b نقطتين بحيث $f(a)\cdot f(b) < 0$. نرسم المستقيم المار بالنقطتين $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ ، ومعادلته:

$$y - f(a) = [\ (f(b) - f(a)) / (b - a)\ ] (x - a)$$

نضع $y = 0$ لإيجاد نقطة تقاطعه مع محور x ، ونسميها c :

$$c = a - f(a)(b - a) / (f(b) - f(a))$$

وبتوحيد المقامات نحصل على القانون النهائي:

$$\mathbf{c = (a\cdot f(b) - b\cdot f(a)) / (f(b) - f(a))}$$

وإذا رمزنا للتخمينين بـ x_1 و x_2 ولخطأيهما بـ $e_1 = f(x_1)$ و $e_2 = f(x_2)$ ، يصبح القانون بصيغة الخوارزمي:

$$x = (x_1\cdot e_2 - x_2\cdot e_1) / (e_2 - e_1)$$

ملاحظة: إذا كانت الدالة خطية فإن الطريقة تعطي الجذر الصحيح من الخطوة الأولى.

٣. خطوات الطريقة

الخطوة 1: نختار a و b بحيث $f(a)\cdot f(b) < 0$ (يوجد جذر بينهما، بشرط أن تكون f مستمرة).

الخطوة 2: نحسب $c = (a\cdot f(b) - b\cdot f(a)) / (f(b) - f(a))$ ثم نحسب $f(c)$.

الخطوة 3: إذا كانت $f(a)\cdot f(c) < 0$ فالجذر بين a و c ، فنضع $b = c$. وإلا فالجذر بين c و b ، فنضع $a = c$.

الخطوة 4: نكرر الخطوات 2 و 3 حتى يتحقق شرط التوقف.

شروط التوقف (يُحدد أحدها في السؤال):

- عدد محدد من التكرارات.
- $|c_n - c_{n-1}| < \varepsilon$ أي أن الفرق بين تقريبين متتاليين أصغر من دقة معينة.
- $|f(c_n)| < \varepsilon$ أي أن قيمة الدالة عند التقريب قريبة من الصفر.

٤. أمثلة محلولة

مثال 1 (فكرة الخوارزمي الأصلية: معادلة خطية)

أوجد حل المعادلة $3x - 6 = 0$ باستخدام طريقة الخطأين، بتخمينين $x_1 = 1$ و $x_2 = 4$.

الحل: نحسب الخطأين:

$$e_1 = f(1) = 3(1) - 6 = -3 \quad , \quad e_2 = f(4) = 3(4) - 6 = 6$$

$$x = (x_1 \cdot e_2 - x_2 \cdot e_1) / (e_2 - e_1) = (1 \times 6 - 4 \times (-3)) / (6 - (-3)) = 18 / 9 = 2$$

وهو الحل الصحيح، لأن الدالة خطية. التحقق: $3(2) - 6 = 0$ ✓

مثال 2

أوجد جذراً للمعادلة $f(x) = x^2 - 3 = 0$ في الفترة $[1, 2]$ باستخدام طريقة الخطأين، بأربع تكرارات.

الحل:

نحسب قيمة الدالة عند طرفي الفترة: $f(1) = -2$ ، $f(2) = 1$. إشارتان مختلفتان، إذن يوجد جذر في الفترة.

$$c_1 = (a \cdot f(b) - b \cdot f(a)) / (f(b) - f(a)) = (1 \times (1) - 2 \times (-2)) / (1 - (-2))$$

$$c_1 = 1.66667$$

نقارن إشارة $f(c_1) = -0.22222$ ، وهي سالبة مثل $f(a)$ ، إذن نضع $a = c_1$ ونعيد الحساب. نلخص التكرارات في الجدول:

f(c)	c	f(b)	f(a)	b	a	n
-0.22222	1.66667	1.00000	-2.00000	2.00000	1.00000	1
-0.01653	1.72727	1.00000	-0.22222	2.00000	1.66667	2
-0.00119	1.73171	1.00000	-0.01653	2.00000	1.72727	3
-0.00009	1.73203	1.00000	-0.00119	2.00000	1.73171	4

إذن الجذر التقريبي هو $x \approx 1.7320$ ، وقيمة الدالة عنده $f(c) = -0.00009$ ، أي قريبة من الصفر.

ملاحظة: الجذر الدقيق هو $\sqrt{3} = 1.73205$.

مثال 3 (شرط التوقف بفرق التقريبين)

أوجد جذراً للمعادلة $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ في الفترة $[2, 3]$ بدقة $|c_n - c_{n-1}| < 0.001$.

الحل:

نحسب قيمة الدالة عند طرفي الفترة: $f(2) = -1$ ، $f(3) = 16$. إشارتان مختلفتان، إذن يوجد جذر في الفترة.

$$c_1 = (a \cdot f(b) - b \cdot f(a)) / (f(b) - f(a)) = (2 \times (16) - 3 \times (-1)) / (16 - (-1))$$

$$c_1 = 2.05882$$

$\lvert c - c_{n-1} \rvert$	f(c)	c	f(b)	f(a)	b	a	n
—	-0.39080	2.05882	16.00000	-1.00000	3.00000	2.00000	1
0.02244	-0.14720	2.08126	16.00000	-0.39080	3.00000	2.05882	2
0.00838	-0.05468	2.08964	16.00000	-0.14720	3.00000	2.08126	3
0.00310	-0.02020	2.09274	16.00000	-0.05468	3.00000	2.08964	4
0.00114	-0.00745	2.09388	16.00000	-0.02020	3.00000	2.09274	5
0.00042	-0.00275	2.09431	16.00000	-0.00745	3.00000	2.09388	6

توقفنا عند التكرار 6 لأن الفرق بين آخر تقريبين 0.00042 وهو أصغر من 0.001 .

إذن الجذر التقريبي هو $x \approx 2.0943$ ، وقيمة الدالة عنده $f(c) = -0.00275$ ، أي قريبة من الصفر.

مثال 4 (دالة مثلثية)

أوجد جذراً للمعادلة $\cos x - x = 0$ في الفترة $[0, 1]$ (الزاوية بالراديان) بدقة $|c_n - c_{n-1}| < 0.0005$.

الحل:

نحسب قيمة الدالة عند طرفي الفترة: $f(0) = 1$ ، $f(1) = -0.4597$. إشارتان مختلفتان، إذن يوجد جذر في الفترة.

$$c_1 = (a \cdot f(b) - b \cdot f(a)) / (f(b) - f(a)) = (0 \times (-0.4597) - 1 \times (1)) / (-0.4597 - (1))$$

$$c_1 = 0.68507$$

$\lvert c - c_{n-1} \rvert$	f(c)	c	f(b)	f(a)	b	a	n
—	0.08930	0.68507	-0.45970	1.00000	1.00000	0.00000	1
0.05123	0.00466	0.73630	-0.45970	0.08930	1.00000	0.68507	2
0.00265	0.00023	0.73895	-0.45970	0.00466	1.00000	0.73630	3
0.00013	0.00001	0.73908	-0.45970	0.00023	1.00000	0.73895	4

توقفنا عند التكرار 4 لأن الفرق 0.00013 أصغر من 0.0005 .

إذن الجذر التقريبي هو $x \approx 0.7391$ ، وقيمة الدالة عنده $f(c) = 0.00001$ ، أي قريبة من الصفر.

٥. مقارنة مع طريقة التنصيف

وجه المقارنة	طريقة التنصيف	طريقة الخطأين
نقطة التقريب الجديدة	منتصف الفترة $(a + b)/2$	تقاطع المستقيم مع محور x
الاعتماد على قيم الدالة	تعتمد على إشارتها فقط	تستعمل قيمها في القانون
سرعة التقارب	بطيئة نسبياً	أسرع في الغالب
طول الفترة	يتناقص إلى النصف كل مرة	قد يبقى أحد الطرفين ثابتاً
الشرط الأساسي	$f(a)\cdot f(b) < 0$	$f(a)\cdot f(b) < 0$