**التفاضل**

**المجموعة : SET**

المجموعة الجزئية : ⊆ B ⊆ A ⇒ B جزئية من A نعبر عنها رمزيا

 ∀x: $×\in A⇒×\in B$⇔ B ⊆ A

* كل مجموعة هي جزئية من نفسها :

 A ⊆ A ①

 ⊆ A $∅$②

* تساوي مجموعتين : نقول A تساوي B اذا كانت B ⊆ A و A ⊆ B

رمزيا $A=B⇔ A⊆B ∧ B ⊆A $

* *التقاطع :* $A∩B=\left\{x :\left.×\in A ∧ ×\in B\right\}\right.$

*ملاحظة : ①* $A⊆B⇔A∩B=A$

 ② اذا كان $A∩B=∅$ *فان المجموعتين A وB منفصلتان*

* *الاتحاد :* $A∪B=\{×:×\in A∨ ×\in B\}$

*ملاحظة : ①* $A∪A=A$

 *②* $A⊆B⇒A∪B=B $

***الحاصل الديكارتي***

*حاصل الضرب الديكارتي للمجموعتين A و B يرمز له بالرمز* ⅹBA هو *مجموعة كل الازواج المرتبة (*b *و* a*)* *حيث* $a \in A , b\in B$

*بلغة الرموز* $AxB=\{\left(a,b\right) :a\in A , b\in B\}$

*ملاحظة :* $ AxB\ne BxA$

*نظرية : اذا كانت* A *و* B *و* C *ثلاثة مجموعات فان*

① $A∩\left(B∩C\right)=\left(A∩B\right)∩C $

② $A∪\left(B∪C\right)=(A∪B)∪C$

**الفترات**

تعريف :

 فترة مفتوحة $\left(a,b\right)=\{×:a<×<b\}$

$\left[a,b\right]=\{×:a\leq ×\leq b\}$ فترة مغلقة

$ \left(a,b\right]=\{×:a<×\leq b\}$ فترة نصف مفتوحة

$\left[a,b\right)=\{×:a\leq ×<b\}$

الفترات الغير منتهية :

$$\left(a,\infty \right)=\left\{×:×>a\right\}$$

$$\left[a,\infty \right)=\left\{×:×\geq a\right\}$$

$$\left(-\infty ,b\right)=\left\{×:×<b\right\}$$

$\left(-\infty ,b\right]=\left\{×:×\leq b\right\}$

**الاعدادالطبيعية N**

**الاعداد الصحيحة I**

**R الاعداد الحقيقية**

)$ -\infty $,$\infty $)=R

**الدوال**

*الدالة : العلاقة من المجموعة A الى المجموعة B هي قاعدة تقرن كل عنصر من عناصر المجال بعنصر وحيد من عناصر المدى .*

*رمزيا : B* $\rightarrow $ *F:A*

1. $∀×\in A,∃y\in B:f\left(X\right)=Y حيث (x,y)\in f$*شروط الدالة :*
2. $f\left(x,y\right)\in f∧(x,ỳ)\in f⇒y=ỳ$

*ملاحظة* *: يجب كل عنصر في المجال يقترن بسهم لجميع العناصر في المجال و Y تكون دالة اذا اشترك العنصر في المجال بسهمين .*

*امثلة :*

 *① مجال مقابل مجال ② مجال مقابل مجال ③ مجال مقابل مجال*

*ليست دالة لان عنصر (3) دالة لان كل عنصر ليست دالة كون (3)*

*غير مشترك بسهم ارتبط بسهم اشترك باكثر من سهم*

**F: A B**

*الدالة*

 *المجال Domain: هو كل العناصر التي تنتمي الى المجال(A)* ①

$Dғ=\{×:×\in Á\}$ المجال *A* $Dғ$ يرمز له

 *② المجال المقابل* Codomain : *كل العناصر التي تنتمي الى المجال المقابل (B)*

 يرمز له $cod f$ $ cod f=\{y:y\in B\}$

 *هو كل العناصر المرتبطة في المجال وفي المجال المقابل* Rangeالمدى *③*

$Ry=\{y:y\in B,y=f\left(x\right)\}$

Ex1:

نستطيع القول ان المعادلة ²x =y دالة . حيث مجالها مجموعة الاعداد الحقيقية R , لاننا نستطيع تربيع اي عدد حقيقي بدون اي مشكلة . اما مداها فهو مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة .

Ex2:

المعادلة $y=\frac{x}{x-3}$ هي دالة مجالها مجموعة R عدا 3=x اي {3}-R وكي نحسب المدى نجد قيمة x بدلالة y كالاتي :

$$yx-3y=x⇒yx-x=3y⇒x\left(y-1\right)=3y⇒x=\frac{3y}{y-1}$$

لذا مجموعة المدى هي مجموعة R عدا 1=y اي -{1} R

***انواع الدوال***

***تنقسم الى نوعين*** *:*

***① الدوال الجبرية*** *: هي الدوال التي يمكن الحصول عليها باجراء عمليات حسابية كالجمع والطرح وغيرها بالنسبة للمتغير (x) .*

 *متعددة الحدود* $ y=x²+3x+2$

*الكسرية* $f\left(x\right)=y=\frac{x}{x+3}$

*الجذرية* $y=\sqrt{x^{2}+1}$

***② الدوال الغير جبرية*** *:*

1. *دوال مثلثية sin*
2. *دوال الاساسية cos , tan*
3. *دوال اللوغارتمية ,….log*
4. *دوال القيمة المطلقة*

***مجال الدوال الجبرية*** *:*

1. *مجال متعددة الحدود كل R*
2. *مجال الدوال الكسرية كل R ماعدا القيمة التي تجعل المقام =0*

 / {-3} R$⇒$ Ex: $\frac{x}{x-3}$

1. *مجال الدوال الجذرية تحت الجذر* $0\leq $ *وفي حالة الجذر بالبسط مجالها تحت الجذر* $0<$ *في المقام .*

$y₁=\sqrt{x}$ $Dy₁=\left\{x:x\geq 0\right\}$ *مجالها*

$y₂=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $Dy₂=\left\{x:x>0\right\}$  *مجالها*

$y₃=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ $Dy₃=\left\{x:x-1>0\right\}$ 1 < x  *مجالها*

Ex1: let f(x) = $\sqrt{x-1}$ find DF, Rye?

DF = {x: x -1 $\geq $ 0} = {x: x $\geq $ 1}

RF = { f(x) : x $\in $ DR } = {f(x) : x $\geq $ 1 } = [ 0 , $\infty $)

**Ex2**: f(x) = x² + $\frac{2}{\sqrt{x}}$ find DF?

DF= {x: x $> $0}

ملاحظة : اذا كانت كل من f(x) و g(x) دالة فأن كل مماياتي دالة

جمع الدوال $①(f+g)₍ₓ₎=f\left(x\right)+g(x)$

طرح $②\left(f-g\right)₍ₓ₎=f\left(x\right)-g(x)$

قسمة g(x) $\ne $ 0 $③\left(\frac{f}{g}\right)₍ₓ₎=f(x)/g(x)$

ضرب $④\left(f.g\right)₍ₓ₎=(f.g)ₓ$

Ex1: f(x) = $\sqrt{x}$ , g(x) = x+1, find (f+g) ₍ₓ₎, (F-g) ₓ, (f-g) ₍ₓ₎, (fig) ₓ, (f/g) ₍ₓ₎, (g/f) ₍ₓ₎.

 (f+g)₍ₓ₎ = $\sqrt{x}$ + x +1الحل

(F-g)₍ₓ₎ = $\sqrt{x}$ - (x-1)

(f.g)ₓ = $\sqrt{x}$ . (x+1)

(F/g)ₓ = $\frac{f(x)}{g(x)}$ = $\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ x$\ne $-1

(G/f)ₓ = $\frac{g(x)}{f(x)}$ = $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$ x$\ne $0

Ex2: f(x) =$\sqrt{x}$ g(x) = $\sqrt{1-x}$ find?

① (f+g) ₍ₓ₎ = (f+g) ₓ = f(x) + g(x) = $\sqrt{x}$ + $\sqrt{1-x}$

② (f-g) ₓ = F(x) – g (x) = $\sqrt{x}$ – $\sqrt{1-x}$

③ (f.g) ₍ₓ₎ =f(x). G(x) = $\sqrt{x}$ . $\sqrt{1-x}$

④ (f/g) ₍ₓ₎ = $\frac{f(x)}{g(x)}$ = $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$ x $\ne $ 1

Ex3**:** g(x) =$\left\{\begin{array}{c}-3\\1\\4\end{array}\right.$ $\begin{matrix}x\leq -1\\-1\leq x²\\2<x\end{matrix}$ Find domain **₍g₎,** Rg?

Dy = R , Ry = {-3, 1, 4}

Ex: let f(x) = $\sqrt{5-x}$ find DF, RF?

DF = {x: 5-x $\geq $ 0} $⇒$ {x: x $\leq $ 5}

Rf = { f(x) : x $\in $ Df } = { f(x) : x $\leq $ 5 } =[0 , $\infty $)

**تركيب الدوال**

تعريف: اذا كانت $f :A\rightarrow B$ و $g :B\rightarrow C$ دالتين فالدالة المركبة $g o f$ هي دالة من A الى C بحيث $(gof)₍ₓ₎=g(f₍ₓ₎)$ لكل $x\in A$ .

Ex1: اذا كانت $f\left(x\right)=-3x , g\left(x\right)=\cos(x)$ فان

$(gof)₍ₓ₎=g(f₍ₓ₎)=\cos(x (f₍ₓ₎)=\cos(x \left(-3x\right)=\cos(3x)))$

Ex2:

اذا كانت $f\left(x\right)=x²$ و $g\left(x\right)=x-5$

 $g(f₍ₓ₎)=g\left(x^{2}\right)=(x-5)²$

Ex3:

اذا كانت $f\left(x\right)=\sqrt{x}$ و $g\left(x\right)=x²+3$ هل $(fog)₍ₓ₎$ تساوي $(gof)₍ₓ₎$

 $(gof)₍ₓ₎=g(f₍ₓ₎)=g\left(\sqrt{x }\right)=(\left(\sqrt{x}\right)^{2}+3)²$

 $(fog)₍ₓ₎=f(g₍ₓ₎)=f\left(x^{2}+3\right)=\sqrt{x²+3}$

$$\dot{..} \left(gof\right)ₓ\ne (fog)ₓ$$

Ex:

اذا كانت $f\left(x\right)=2x+1$ جد g(x) حيث $(gof)₍ₓ₎$

$$(gof)₍ₓ₎=f(g₍ₓ₎)=2g₍ₓ₎+1=x³⇒2g₍ₓ₎=x³-1⇒g\left(x\right)=\frac{x³-1}{2}$$

**الغايات او النهايات limit**

غاية الدالة f(x) عندما X تقترب من a هي العدد L اذا اعطيت $ϵ>0$ $δ>0$ $∃$ بحيث ان كل قيم X
$$0<\left|x-a\right|<δ⇒\left|f\left(x\right)-l\right|<ϵ$$

① let f(x) = c, c $\in $ R

$$\lim\_{x\to a}c=c$$

$$\lim\_{x\to a}f\left(x\right)=c$$

 ② $\lim\_{x\to a}f\left(x\right)=L , \lim\_{x\to a}g\left(x\right)=M $

الجمع

$$\lim\_{x\to a}\left(f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)=\lim\_{x\to a}f\left(x\right)+\lim\_{x\to a}g\left(x\right)=L+M$$

الطرح

$$\lim\_{x\to a}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)=\lim\_{x\to a}f\left(x\right)-\lim\_{x\to a}g\left(x\right)=L-M$$

الضرب

$$\lim\_{x\to a}\left(f\left(x\right).g\left(x\right)\right)=\lim\_{x\to a}f\left(x\right).\lim\_{x\to a}g\left(x\right)=L.M$$

القسمة

$$\lim\_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\_{x\to a}f(x)}{\lim\_{x\to a}g(x)}=\frac{L}{M}$$

عدد ثابت

$$\lim\_{x\to a}K.f\left(x\right)=K.\lim\_{x\to a}f(x)=k.L$$

حيث n عدد موجب

$$\lim\_{x\to a}(f\left(x\right))ⁿ=(\lim\_{x\to a}f(x))ⁿ$$

Ex1:

اذا كان $g\left(x\right)=x+1$ و $f\left(x\right)=3x$ جد :

1. $\lim\_{x\to 2}\left[f\left(x\right)+g(x)\right]$

$$\lim\_{x\to 2}f\left(x\right)+\lim\_{x\to 2}g\left(x\right)=\left(2×3\right)+\left(2+1\right)=6+3=9$$

1. $\lim\_{x\to 3}\left[f\left(x\right)-g(x)\right]$

$$\lim\_{x\to 3}f\left(x\right)-\lim\_{x\to 3}g\left(x\right)=\left(3×3\right)-(3+1)=9-4=5$$

1. $\lim\_{x\to 1}\left[f\left(x\right).g(x)\right]$

$$\lim\_{x\to 1}f\left(x\right).\lim\_{x\to 1}g\left(x\right)=\left(3×1\right).\left(1+1\right)=3 .2=6$$

1. $\lim\_{x\to 3}\left(f(x)\right)^{2}$

$(\lim\_{x\to 3}f(x))²=(\lim\_{x\to 3}3x)²\left(3.3\right)^{2}=\left(9\right)^{2}=81$

1. $\lim\_{x\to 3}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\_{x\to 3}f(x)}{\lim\_{x\to 3}g(x)}=\frac{\lim\_{x\to 3}3x}{\lim\_{x\to 3}(x+1)}=\frac{3.3}{3+1}=\frac{9}{4}$

Ex:

احسب $\lim\_{x\to -2}(x^{2}-5)³$

$$\lim\_{x\to -2}\left(x^{2}-5\right)^{3}=(\lim\_{x\to -2}(x^{2}-5))³=\left[\lim\_{x\to -2}x^{2}-\lim\_{x\to -2}5\right]³=\left[4-5\right]³=(-1)³=-1$$

 Ex: $\lim\_{x\to 0}\frac{\sqrt{y+x }-\sqrt{y}}{x} $

$$\lim\_{x\to 0}\frac{\sqrt{y+x }-\sqrt{y}}{x}×\frac{\sqrt{y+x}+\sqrt{y}}{\sqrt{y+x}+\sqrt{y}}=\lim\_{x\to 0}\frac{y+x-y}{x(\sqrt{y+x}+\sqrt{y}}$$

$$\lim\_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{y+x}+\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{y+0}+\sqrt{y}}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Ex:

F(x) = $\left\{\begin{array}{c}2x x<1 \\\frac{x²+x}{3x} x\geq 1 \end{array}\right.$

 ①$x\rightarrow 3$ ② $x\rightarrow 0$ ③ $x\rightarrow -1$ ④ $x\rightarrow \frac{1}{2}$ عندما lim f(x) جد

1. $\lim\_{x\to 3}f\left(x\right)=\lim\_{x\to 3}\frac{x²+x}{3x}=\frac{3²+3}{3.3}=1.3$
2. $\lim\_{x\to 0}f\left(x\right)=\lim\_{x\to 0}2x=2.0=0$
3. $\lim\_{x\to -1}f\left(x\right)=\lim\_{x\to -1}2x=2 . -1=-2$
4. $\lim\_{x\to \frac{1}{2}}f\left(x\right)=\lim\_{x\to \frac{1}{2}}2x=2 . \frac{1}{2}=1$

واجب : جد

1. $\lim\_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$
2. $\lim\_{x\to 2}\frac{x²-5x+6}{x-2}$
3. $\lim\_{x\to 1}\frac{x²-1}{x-1}$
4. $\lim\_{x\to 2}\frac{x²-3x+2}{x-2}$
5. $\lim\_{x\to 1}\frac{(x-1)³}{x³-2x²+x }$
6. $f\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}x²-1 x\geq 1\\x+1 x\leq 1\\x³-1 x<0\end{array}\right.$

جد lim f(x)

① $x\rightarrow 2$ ② $x\rightarrow \frac{1}{2}$ ③ $x\rightarrow -1$ ④ $x\rightarrow 1$ ⑤$x\rightarrow 0$