c محاظرات هندسة

أعداد : د.عبدالخضر غالي و م. منهى عبد الرزاق

أمثله عن أنظمة بديهية :

يتكون المستوي الأسقاطي من مجموعه π لكلمات أولية تقنية تدعى نقاط (pointe)

ومجموعات جزئية من π تدعى خطوط (lines) وهي غير معرفة أيضاً . سنرمز للنقاط بالحروف الكبيرة ...A,B,C وللخطوط البالحروف الصغيرة ...l,m,n .

مجموعة البديهيات :

A_1 أي نقطتين مختلفتين في π يحتويهما خط واحد فقط .

أي أن , أذا كان $A,B \in \pi$ بحيث أن A ≠B و $A,B \in l \wedge A,B \in$ فان l=m

A_2 كل خط يحتوي على ثلاث نقاط على الأقل .

A_3 أذا كان l خطاً في π فأنه توجد على الأقل نقطة واحدة A بحيث أن $A \notin l$

A_4 أي خطان يشتركان في نقطة واحدة في الأقل .

A_5 يوجد في الاقل خط واحد في π .

ملاحظات :

1) واحد فقط تكافئ في الاقل وفي اأكثر واحد ولبرهان وجود واحد فقط يجب أن نبرهن على وجود واحد في الأقل ثم نبرهن على وجود واحد في الأكثر .
2) العبارة الخط هو مجموعة نقاط لا تعتبر تعريفاً للخط لأن الدائرة هي مجموعة نقاط وكذلك المثلث وغيرهما من الأشكال
3) النقطة P عنصر في المستوي π (□ p∈) في خين ان الخط l مجموعة جزئية من المستوي π ($l \subseteq \pi$) .
4) العبارة $p \in l$ تعني أن النقطة l يمر بالنقطة p عنصرا لأكثر من خط مثل l,m , نقول أن l يلتقي مع m في p , أو أنهما يتقاطعان في p .

من هذه البديهيات نستطيع أن نكون مبرهنات :

مبرهنة 1 : أي خطين في المستوي الاسقاطي يشتركان في نقطة واحدة فقط .

البرهان :- ليكن $l \neq m, l, m \subseteq \pi$.

من **A_4** توجد نقطة A بحيث أن $A \in L, A \in m$.

نستنتج من **A_1** أن $l = m$ وبهذا يناقض فرضية $l \neq m$ وبهذا l و m يشتركان في نقطة واحدة فقط . وبهذا يتم البرهان .

ملاحظة:

من المبرهنة 1 كل خطين مختلفين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط , لذا لا يمكننا الحديث عن التوازي في المستوي الأسقاطي .

مبرهنة 2 :- كل نقطة في المستوي الاسقاطي يمر بها ثلاث خطوط .

البرهان :

لتكن $p \in \pi$.

من **A_3** يوجد خط l

اولا : أذا كانت $p \notin l$

من A_2 الخط l يحتوي على ثلاث نقاط في الأقل , لتكن A_1, A_2, A_3 .

من **A_2** توجد الخطوط PA_1, PA_2, PA_3 التي تمر النقطة P وهي مختلفة .

ثانيا : أذا كانت $P \in l$ فأنه ومن A_2 الخط l يحتوي على ثلاث نقاط في الأقل , واتكن A_1, A_2, P. ومن A_3 توجد نقطة B بحيث أن $B \notin l$ من A_1 يوجد الخطوط $m=BA_1$, $k=BP$
الخط $m=BA_1$ يحتوي على نقطة أخرى في الأقل , وتكن *D* من *A_1* مرة أخرى يوجد الخط

i=DP و بهذا يكون لدينا 3 خطوط هي $k=BP$, $i=DP$ *و* l *.*

وبهذا يتم البرهان .

تمارين :

1) توجد في الأقل ثلاث خطوط مختلفة في المستوي الأسقاطي .
2) ليست كل الخطوط تمر من نقطة واحدة .

مستويات اسقاطية منته

هي مجموعه منتهيه تحقق البديهيات السابقه

مبرهنة 3:

هذا وجد خط في مستوي اسقاطي منته يحتوي بالضبط على n من النقاط فان المستوي يحتوي بالضبط n^2+n+1 .

البرهان:

ليكن $L\subseteq\pi$, $p_1,p_2,\dots,p_n \in L$

من A_3 يوجد خط l بحيث ان $p\notin l$

من A_1 توجد n من الخطوط هي $p\,p_1, pp_2,\dots, pp_n$

ومن A_2 توجد نقطة ثالثه على كل خط من الخطوط المذكورة ولتكن

$Q_1,Q_2,Q_3\dots Q_n$ على التوالي ,

النقطه q_1نصلها بالنقاط $P_1,P_2,\dots,P_N$ لنحصل على n من الخطوط

$P_1Q_1,p_2Q_1,\dots,p_nQ_1$ هذه الخطوط تقطع pp_2 في n من النقاط المختلفه لذللك

Pp_2 يحتوي على n-1 من النقاط اضافه الى النقطه p . وبنفس الطريقه كل الخطوط الاخرى تحوي عاى n-1 من النقاط اضافه الى النقطه p .

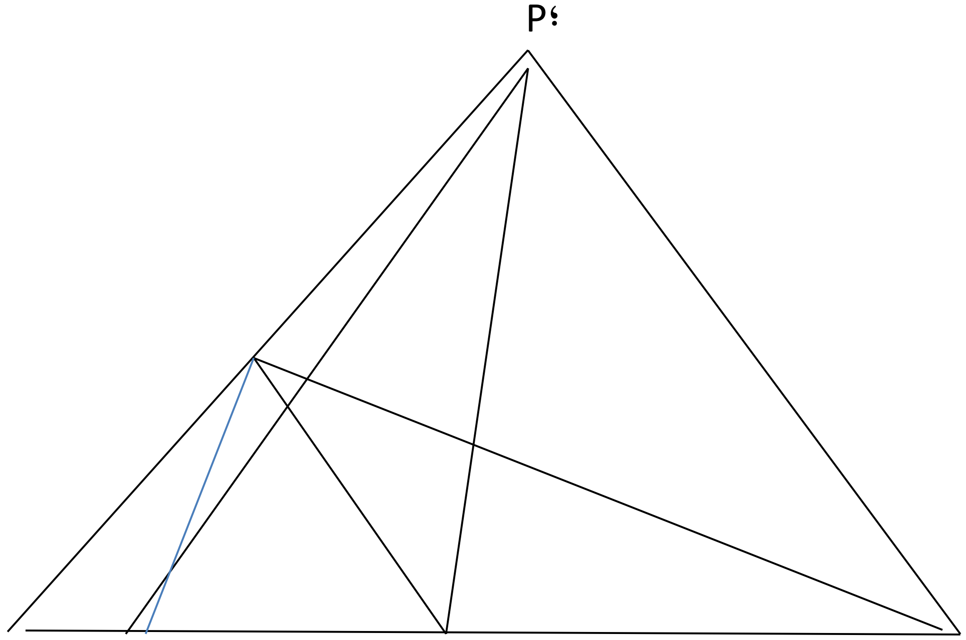
لذ لك اصبح n من الخطوط كل منها بحتوي n-1 من النفاط اضافة الى النقطة p

$N(n-1)+1=n^2\_n+1$ من النقاط على الاقل

ولكي نبرهن على الاكثر نفرض توجد نقطة اضافيه ولتكن Q والخط pQ يختلف عن الخطوط المشار اليه ومن مبرهنه 1 يجب ان يقطع الخط l في النقطه p_{n+1} ,

وبذلك يكون الخط l يحتوي n+1 من النقاط وهذا يخالف الفرض

اذا المستوي يحتوي بالضبط n^2+n+1 من النقاط



نتيجه:اذا وجدخط في مستوي اسقاطي منته يحتوي بالضبط على n من النقاط فان اي خط اخر يحتوي بالضبط n

المستوي التالفي (Affine plane)

يتكون المستوي α من مجموعة من النقاط ومجموعة جزئيه تدعى الخطوط وسنرمز للنقاط باحرف كبيرة وللخطوط باحرف صغيرة

مجموعه البديهيات:

A_1 اي نقطتين مختلفتين في α يختويهما خط واحد .

A_2 كل خط يحتوي على ثلاث نقاط في الأقل .

A_3 أذا كان l خط في α فأنه توجد نقطة A وتحدة في الأقل بحيث أن $A \notin l$

A_5 أذا كان l خط و A نقطة بحيث ان $A \notin l$ فأنه يوجد خط واحد فقط m يحتوي A بحيث أن : - $l \cap m = \emptyset$

A_5 يوجد في الأقل خط واحد α .

تعريف :- يقال لخطين مختلفين l , m أنهما متوازيان أذا كان $l \cap m = \emptyset$

من التعريف يمكن صياغة A_4 كالاتي:

اذا كان l خط و A *نقطه* بحيث ان $A \notin l$ فانه يوجد خط واحد فقط m يمرمن A *ويوازي* l

مبرهنه 4:

اي خطين في المستوي التالفي يشتركان في نقطه واحدة على الاكثر

البرهان:

نفرض العبارة ليست صحيحة اي يوجد خطان مختلفان $l \neq, m$

وهذايعني وجود نقطتين يحتويهما خط واحد والذي يناقض A_1

مبرهنه 5:

اذا قطع خط احد خطين متوازيين في المستوي التالفي فانه يقطع الاخر

البرهان:

ليكن $l\cap M=\emptyset$ نفرض أن العباره الأخيرة خاطئة أي أن $l \cap m = \emptyset$.

من النقطة P يمر خطان هما m و k يوازيان الخط l وهذا يناقض A_4

وبهذا يتم البرهان .

مبرهنة 6 :- الخطان الموازيان لخط واحد متوازيان في المستوي التألفي .

البرهان :-

ليكن $L \cap K = \emptyset$ وليكن $m \cap k = \emptyset$ يجب أن نبرهن أن $m \cap l = \emptyset$

نفرض أن العبارة الأخيرة خاطئة , $\leftarrow$ $l \cap m \neq \emptyset$

حسب مبرهنة 5 $l \cap k \neq \emptyset$ وهذا يناقض الفرض .

أذاً الخطان الموازيان لخط واحد متوازيين في المستوي التألفي .

وبهذا يتم البرهان .

مستويات تألفية منهية

هي مجموعات منهية تحقق البديهيات الاربعة للمستوي التالفي .

مبرهنة7 :- أذا وجد حط l في مستوي نألفيمنته يحتوي بالضبط n من المقاط فأن أي خط أخر يوازي l يحتوي بالضبط على n من النقاط .

البرهان :-

ليكن l خط وليكن $P_1,P_2,P_3...,P_n\in l$ وليكن m خط أخر يوازي l .

يجب ان نبرهن أن m يحتوي بالضبط على n من النقاط

من A_2 *توجد النقطة* Q_1 *على* m *ز ومن* A_1 *يوجد خط* P_1Q_2 .

من A_4 توجد $n\text{-}1$ من الخطوط الموازيه الى P_1Q_1 تمر بالنقاط $P_1,P_2,P_3\ldots, P_n$

وهذه الخطوط حسب مبرهنة 6 تكون متوازية . و أستناد الى مبرهنتين 4و5 تقطع هذه الخط m في $n\text{-}1$ من النقاط المختلفة , ولتكن $Q_1,Q_2,Q_3\ldots Q_n$ والتي تختلف عن Q_1

حسب تعريف التوازي .

توجد n *من النقاط على الخط* m *الأقل .*

نفرض وجود نقطة أخرى $Q_{n+1} \in m$ *من* A_4 يوجد خط k يمر بالنقطة

$Q_{n+1} \in m$ يوازي P_1Q_1 . وأستنادا للمبرهنتين 4 و 5 يقطع هذه الخط k الخط l في نقطة مختلفة عن النقاط $P_1,P_2,P_3,..P_n$ وهذا يخالف الفرض لأن l يحتوي بالضبط على n من النقاط .

أذاً يختوي بالضبط على n من النقاط . وبهذا التألفي منته يحتوي بالضبط على n من النقاط فأنه توجد بالضبط $n\text{-}1$ من الخطوط الموازية الى l

البرهان :-

ليكن l خط وليكن $P_1 ,P_2 , P_3,\ldots.P_n \in l$ ولتكن p نقطة $P\notin L$ (A_3)

من A_1 يوجد خطين هما PP_1,PP_K حيث أن PP_K هي اي نقطة من النقاط $P_1,P_2,P_3\ldots,P_N$

من A_4 توجد بالضبط $n\text{-}1$ من الحطوط الموازية الى pp_1 والتي تمر بالنقاط $p_2,p_3,..p_n$

وبالتأكيد فأن أحدهم يمر بالنقطة p_k

من المبرهنة 4 مبرهنة5 الخط pp_1 في نقاط مختلفة عددها مع النقطة p_k يساوي n من النقاط ولتكن $Q_1=P,Q2 ,\ldots.,Q_n =p_{k,\ldots.}Q_n$.

من A_4 *ومبرهنة 5 توجد بالضبط على* N-1 *من الخطوط الموازية الى* l *والتي تمر بالنقاط*

$Q_1=P,Q_2,\ldots,Q_k =p_k , \ldots Q_N$

من A_4 *يوجد خط* m *يوازي* PP_1 *يمر بالنقطة* R *. ومن مبرهنة 4 مبرهنة 5 الخط* m *يقطع الخط* l *في النقطة* P_{n+1} *التي تختلف عن النقاط* $P_1,P_2,P_3,..,P_n$ *وهذا يناقض الفرض .*

وبهذا يتم البرهان

<u>نظاما يونج وفانو *(the systems of young and fano)*</u>

<u>نظام يونج :</u>

هو نظام يتكون من البديهيات المستوي التألفي الخمسة أضافة الى البديهية التالية :

A_6*أذا كان* l *خط في* α *فانه توجد ثلاث نقاط في الأكثر على* l *.*

أن A_3 *مع* A_6 *تجعل النظام منته وكل خط يحتوي على ثلاث نقاط فقط .*

<u>مبرهنة 10 :-</u>يحتوي نظام يونج على تسع نقاط فقط .

<u>مبرهنة 11 :</u>- يحتوي نظام يونج على أثني عشر حطا فقط .

<u>مبرهنة 12:</u>- أي نقطة في نظام يونج يمر بها أربعة خطوط فقط .

نظام فانو :-

هو نظام يتكون من بديهيات المستوي الأسقاطي الخمسة أضافة الى البديهية التالية :

A_6 أذا كان lخط في π فأنه توجد ثلاث نقاط في الأكثر على l .

أن A_3مع A_6 تجعل النظام منته وكل خط يحتوي على ثلاث نقاط فقط .

<u>مبرهنة13:-</u> يحتوي نظام فانو على سبع نقاط فقط .

<u>مبرهنة 14:</u>- يحتوي نظام فانو على سبع خطوط فقط .

<u>مبرهنة 15:</u>- أس نقطة في نظام فانو يمر بها ثلاث خطوط .

تمارين:-

ت[1]) في المستوبي التالفي أذا وجد خط واحد يحتوي على nالنقاط ز برهن :-

أ) كل نقطة يمر بها بالضبط $n+1$ من الخطوط .
ب)يحتوي النظام بالضبط على n^2 من النقاط .
ت)يحتوي النظام بالضبط على $n(n+1)$ من الخطوط .

ت[2]) في المستوي التألفي كل خطين مختلفين لهما نقطة واحدة مشتركة على الأكثر .

ت[3]) في المستوي الاسقاطي أذا وجد خط واحد يحتوي على n نقاط . برهن

أ) لكل نقطة يوجد n من الخطوط تمر منها .
ب)يحتوي كل خط بالضبط على n نقاط .
ت)يحتوي النظام بالضبط على $n^2 - n + 1$ من الخطوط .

الهندسة الأقلدية:(*edclidean geometry*)

هي 10 فرضيان 5 منها مفاهيم و 5 منها بديهيات .

المفاهيم العامة: *(common notation)*

1- الأشياء المساوية لشئ واحد متساوية .
2- أذا أضيفت كميات متساوية لأخرى متساوية فالنتائج تكون متساوية .
3- أذا طرحت كميات متساوية من أخرى متساوية فالنتائج تكون متساوية .
4- الأشياء المتطابقة متساوية فيما بينها .
5- الكل أكبر من الجزء .

البديهيات :-

P_1 من الممكن رسم مستقيم من أي نقطة الى نقطة أخرى .
P_2 يمكن مد قطعة مستقيم من جهتيها الى غير حد .
P_3 يمكن رسم دائرة أذا علم مركزها ونصف قطرها .
P_4 جميع الزوايا القوائم متساوية .
P_5 أذا قطع مستقيمان بمثلث بحيث كان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة منقائمينتين فأن المستقيمين , اذا مدا بغير حد و يتلاقيان في تلك الجهة من القاطع التي يكون فيها مجمزع الزاويتين أقل من قائمتين .

برهن أقليدس 28 دون ان يستخدم P_5 مما اثار انتباه العلماء بعده اذ اعتقد الكثسر منهم ان P_5 يجب ان تكون مبرهنة وتحتاج الى برهان . ومن هذه النقطة بدأت دراسة الهندسة اللا اقليدية.

بعض مواضع الضعف في نظام أقليدس

1- خلو النظام البديهي لأقليدس من الكلمات الأولية , حيث ان لاقليدس يعرف النقطة بواسطة البعد و الطول والعرض ,ما هو البعد و الطول والعرض ؟ أن أقليدس يعرف الكلمات بواسطة كلمات أخرى قد تكون اصعب من الكلمة وربما هذه الكلمات تحتاج الى تعاريف اخرى , وهكذا و حيث تكون سلسلة من التعاريف التي قد تنتهي بنفس الكلمة الاولى , لذلك فانه في الانظمة الحديثة قد أستخدمت كلمات اولية وبدلالتها تعرف بقيمة الكلمات في النظام ز
2- لقد أسنخدم أقليدس بديهيات لم يشير اليها في نظامه لذلك سميت بديهيات ضمنية او فرضية ضمنية وهي :-

1-فرضية الأستمرارية

2_ بديهية باخ
3_ بديهيات البينية
4_ وحدانية المستقيم
5 _ لا نهائية المستقيم
6 _ بديهيات الترتيب الخطية

3- يستعمل ارخميدس كلمة يساوي , بينما في الانظمة الحديثة يعني تطابق فمثلا عندما يقال زاويتان متساويتان تقول بانهما متطابقتان .
4- اعتمد على الرسم لبرهان مبرهناته وليس مجرد توضيح للبرهان .
5- ان بديهيات اقليدس ليست كاملة . حيث يكون واضحا لو اخذنا مجموعة بديهيات هلبرت سنبين اننا نستطيع اضافة بديهييات جديدة الى مجموعة اقليدس . طريقة اخرى لبيان ان مجموعة بديهيات اقليدس لبيان ان مجموعة بديهيات اقليدس غير كاملة , وكذلك من العبالاة التالية : الخط الذي يصل بين نقطة داخل دائرة ونقطة خارجها يقطع الدائرة ز هذه العبارة لا يمكن برهنتها او دحضها ز والسبب الالساسي هو عدم اعطاء بديهية الاستمرارية .

مبرهنه 1:

لتكن AB قطعه مستقيم وحسب بديهيه 3 توجد دائرة مركزها A ونصف قطرها AB

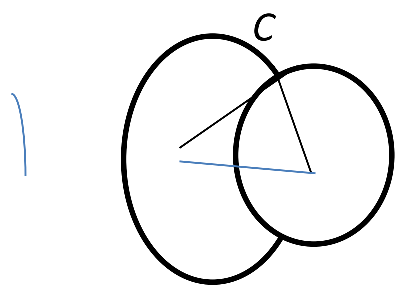
ولتكن c نقطه تقاطع الدائرتين وحسب بدبهيه 1 توجد القطعتان AC,BC وحسب تعريف الدائره $AC=AB$ و$AB=BC$ اذن $AB=BC=AC$

اذن ABC مثلث متساوي الاضلاع

الخلل في البرهان:

1-وجود النقطة c على AB فلا نحصل على مثلث وعدم وجود بديهيه عن تقاطع دائرتين

2- لايوجد شى عن وحدانية قطعة مستقيم 3-لم يذكر شى عن ثلاثة نقاط ليست على استقامه واحدة تمثل دائرة



البديهيه الخامسه لاقليدس (بديهيه التوازى)

لقد حاول العلماء برهنه هذه البديهيه لفترة تزيد عن الفي سنه ولم يستطيع احد اعطاء البرهان الصحيح لان جميع المحاولات اعتمدت على عبارات مكافئه لهذه البديهيه.

بعض مكافئات البديهيه الخامسه:

1-بديهيه بليفير :من نقطه لا تقع على مستقيم معلوم يمكن رسم موازي واحد فقط للمستقيم المعلوم

2- اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فان الزاويتين الداخليتين المتبادلتين متساويتين والزاويه الخارجيه تساوي الزاويه الداخليهالمقابله لها وكذلك مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع يساوي قائمتين

3- مجموع زوايا المثلث يساوي زاويتين قائمتين

4- الزاويه الخارجيه في المثلث تساوي مجموع الزاويتين الداخليتين المقابلتين لهما

5-يوجد زوج من المثلثات المتشابه

6- اذا قطع مستقيم احد مستقيمين متوازيين فانه يقطع الاخر
7- المسافه العموديه بين مستقيمين متوازيين تكون ثابته
8- يوجد زوج من المستقيمات التي تكون المسافه بينهما ثابته
9- اذا كان مجموع زوايا اي مثلث مقدار ثابت فان هذا المجموع يساوي زاويتين قائمتين
10- اذا كانت ثلاث زوايا من شكل رباعي قوائم فالزاويه الرابعه تكون قائمه ايضا
11- المستقيمان الموازيان لمستقيم معلوم يكونان متوازيان

لا ي ثلاث نقاط لا تقع على مستقيم واحد توجد دائرة تمر من هذه النقاط

محاولات لبرهنه البديهيه الخامسه او احد مكافئاتها

فيما يلي بعض هذه المحاولات :

محاولات بطليموس:

لقد برهن بطليموس مبرهنه 29 بدون استخدام البديهيه الخامسه

مبرهنه 29:

_اذا قطع مستقيمان متوازيان بقاطع فان الزاويتين الداخلتين المتبادلتان متساويتان والزاويه الخارجيه تساوي الزاويه الداخليه المقابله لها وكذلك مجموع الزاويتين الداخلتين على جهه واحده من القاطع تساوي قائمتين.

البرهان:

ليكن AB,CD مستقيمان متوازيان و EF مستقيم ثالث يقطع AB,CD في H,G على التوالي

علينا ان نبرهن $\angle DHG + \angle BGH = \pi$ و $\angle BGE = \angle AGH$ و ∠

$\angle BGH = \angle CHG$

نفرض ان

$\angle AGH + \angle CHG \neq \pi$ و $\angle BGH + \angle DHG \neq \pi$

$\angle BGH + \angle AGH + \angle DHG + \angle CHG \neq \pi$

ولكن

$\angle CHG = \angle DHG + \angle CHG = \pi$ و $\angle AGB + \angle BGH = \pi$

زاويتين مستقيميتين)

وهذا تناقض

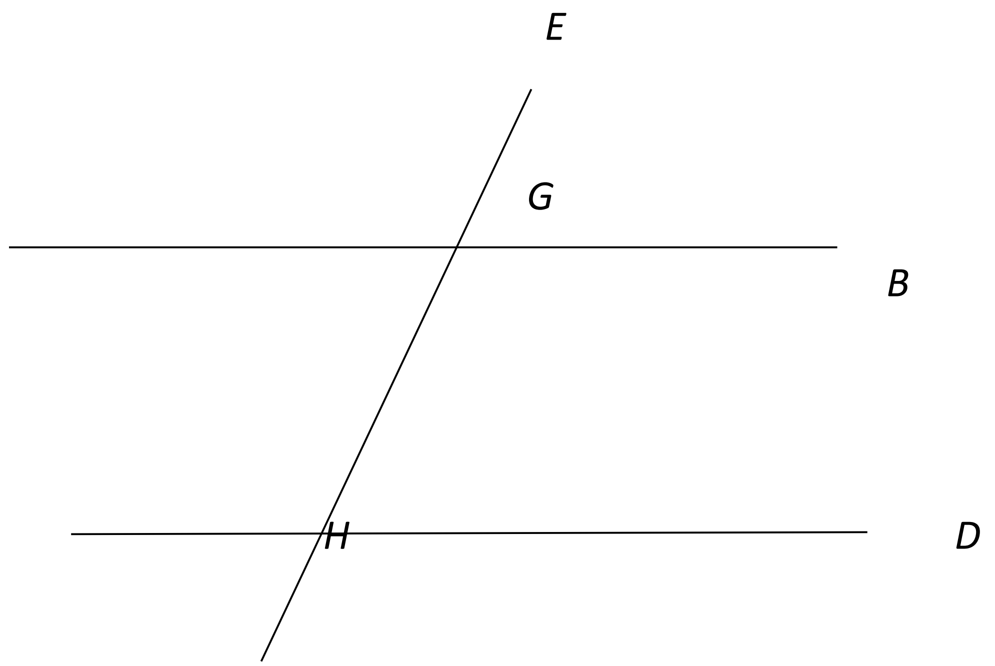
$\angle BGH + \angle DHG = \pi$

وكذلك $\angle AGH + \angle CHG = \pi$

زاويه مستقيمه

<u>الخلل فى البرهان:</u>

اعتمد بطليموس في برهانه على بديهيه بليفير وهي احدى مكافئات البديهيه الخامسه

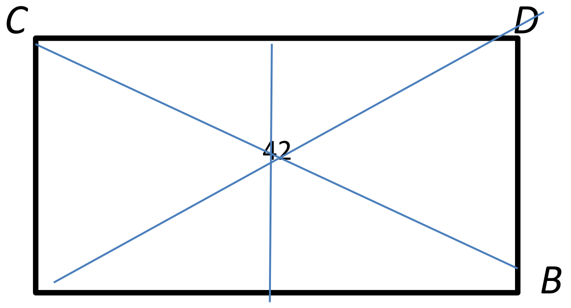


F

<u>**محاولة عمر الخيام**</u>

حاول اثبات اذا وجد ثلاث زوايا في شكل رباعي قوائم فالزاويه الرابعة تكون قائمه ايضا وهي مكافئه للبديهيه الخامسه

تعريف رباعي الخيام: هو شكل رباعي تكون زاويتا القاعده قوائم ويكون العمودان متساويان وتسمى القاعدة العليا بالسمت



A

في المثلثان ABC و ABD

$AC = BD$ و AB مشترك والزاويتان A,B قائمتان لذلك المثلثان متساويان

ومن التساوي ينتج $AD=BC$

وفي المثلثين ADC,CBD وفيهما

$AC=BD$ و CD مشترك و$BC=DA$ لذلك المثلثان متساويان ومن التساوي ينتج الزاويتان A,C متساويان

وبعد ذلك برهن ان (المتقيم الواصل بين منتصفي القاعدة والسمت يكون عموديا عليهما

ليكن EF منصف القاعدة والسمت في E وF على التوالي نصلED, EC ثم نطابق المثلثين ACE,BDE وفيهما

$AC=BD$ وان الزاويتين A,B و$AE=BE$,(بالتنصيف)

لذا يتطابق المثلثين ACE,BDE وينتج من التطابق $EC=DE$

ثم نطابق المثلثين CEF,DEF وفيهما $EC=ED$ والضلع EF و $DF=CF$ (بالتنصيف)

لذا فان المثلثين متطابقين .ومن التطابق ينتج الزاويتين 3و4 متساويين ولان

$\angle 3 + \angle 4 = \pi$ وان $\angle 3 = \angle 4 = 90$ اي ان EF عمودي على CD

ومن التطابق ينتج $\angle 6 = \angle 5$ وان الزاويتين $1,2$ متساويتين فان

$\angle 6 + \angle 2 = \angle 5 + \angle 1$ حسب مفهوم 2 اي ان

$\angle BEF = \angle AEF$ وهتان زاويتين مستقيمتين اذن EF عمودي على AB

في الشكل الرباعي $BEFD$ $\angle D = \angle 4$ اي زاوية D قائمة.

الخلل في البرهان:

اعتمد على ان المسافة العموديه بين المستقيمين المتوازيين ثابته وهي مكافئه للبديهيه الخامسه

هندسه هلبرت (Hilbert)

قدم الالماني ديفيد هلبرت نظام بدهيا متكاملا حيث صحح الاخطاء التي رافقت اعمال اقليدس

بديهيات الوجود والوقوع :

P_1 لكل نقطتين مختلفتين يوجد مستقيم واحد فقط يحتويهما

P_2 كل مستقيم يحتوي على نقطتين في الاقل

P_3 لكل مستقيم معلوم توجد في الاقل نقطه واحدة لا تنتمي اليه

تعريف 1 :تكون المجموعتين متساويتين اذا وفقط اذا احتوتا بالضبط على نفس العناصر

مبرهنه 1 :توجد في الاقل ثلاث نقاط في المستوي

البرهان: حسب البديهيات 2و3و4

مبرهنه 2 :اي مستقيمين مختلفين في المستوي يشتركان في نقطه واحدة على الاكثر

البرهان :يترك واجب

تمارين :

1-برهن لكل نقطه يوجد في الاقل مستقيمان يمران بها

2- يوجد في الاقل مستقيم واحد لا يمر من نقطه معلومه

بديهيات الترتيب:

رمز:

بين (*Between*) هي كلمه اوليه فمثلا العبارة (*B* تقع بين *A,C* بالرمز

A-B-c

البديهيات :

P_5 *A-B-c* اذاوفقط اذا *C_-B- A*

P_6 اذا كان *A-B-c* فان النقاط *A,B,C* نقاط مختلفه وعلى استقامه واحدة

P_7 *اذا كانت* A,B,C *ثلاث نقاط مختلفه وتقع على مستقيم واحد فان واحدة فقط تتحقق* C-A-B or B-A - c or A-B-C

رمز: الرمز *A-B-C-D* هو مختصر *A-B-C,A-B-D ,A-C-D , B-C-D*

لاكثر من اربع نقاط

P_8 *اذا كانت* A,B,C,D *ا ربع نقاط مختلفه وتقع على مستقيم واحد وان* A-B-C

فان واحده فقط تتحقق D-A-B-C , A-D-B-C , A-B-D-C , A-B-C-D

P_9 *اذا كانت* A,B *نقطتين فان*

-1 توجد نقطه C *بحيث ان* A-B-C

-2 توجد نقطه D *بحيث ان* A-D-B

-3 توجد نقطه E *بحيث ان* E-A-B

مبرهنه 3 :

اذا كان *A-C-D , A-B-C* فان النقاط *A,B,C,D* مختلفه وتقع على مستقيم واحد

-2 اذا كان *A-B -D , B-C-D* فان النقاط *A,B,C,D* مختلفه وتقع على مستقيم واحد

-3 اذا كان *A-B-C , B-C-D* فان النقاط *A,B,C,D* مختلفه وتقع على مستقيم واحد

البرهان:

-1من بديهيه 6 بما ان *A-B-C* فان التقاط *A,B,C* مختلفه وعلى مستقيم واحد وكذلك بما ان *A-C-D* فان النقاط *A,C,D* مختلفه وعلى مستقيم واحد

فاذا كان *B=D* فان *A-C-B=A-C-D* وهذا يناقض *A-B-C*

لذلك فان النقاط *A,B,C,D* مختلفه وحسب بديهيه 1 يوجد مستقيم واحد فقط بين *A,C* وبما ان *B,D* تقعان على *AC* فان النقاط *A,B,C,D*

وبنفس الطريقه نبرهن 2-و3-

مبرهنه 4 :

-1 اذا كان *A-B-C , A-C-D* فان *A-B-C-D*

-2 اذا كان *A-B-D ,B-C-D* فان *A-B-C-D*

-3 اذا كان *A-B-C ,B-C-D* فان *A-B-C-D*

البرهان:

1- حسب مبرهنه 3 $A-B-C$,$A-C-D$ فالنقاط A,B,C,D مختلفه وعلى مستقيم واحد

وحسب بديهيه 7و8 تتحقق الحاله $A-B-C-D$ وبنفس ا لطريقه نبرهن 2- و3-