تفاضل متقدم (مرحلة ثانية)

الحاصل الديكارتي

تعريف: إذا كانت A و B مجموعتين غير خاليتين وكان $x \in A$ و $y \in B$ فأن الزوج المرتب (x,y) هو مفهوم رياضي يتكون من العنصرين x و y المقترنين بالترتيب x ثم y، يطلق على x المسقط الأول أو الإحداثي الأول وعلى y المسقط الثاني أو الإحداثي الثاني للزوج المرتب (x,y).

ان حاصل الضرب الديكارتي للمجموعتين A, B هو المجموعة $A \times B$ والحاوية على جميع الأزواج المرتبة (x,y) حيث $x \in A$ و $y \in B$ وبعبارة أخرى:

$$A \times B = \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

مثال: لتكن $A = \{a,b,c\}$ و $B = \{2,3\}$ فأن:

$$A \times B = \{(a,2),(a,3),(b,2),(b,3),(c,2),(c,3)\}$$

$$B \times A = \{(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)\}$$

واضح أن:

$$A \times B \neq B \times A$$

العلاقة (The Relation)

لتكن A, B مجموعتين غير خاليتين، تعرف العلاقة من A إلى B بأنها مجموعة من أزواج مرتبة من العناصر (x,y) العنصر الأول ينتمي إلى A والعنصر الثاني ينتمي إلى B ويعبر عنها

$$R : A \longrightarrow B$$

وبذلك فأن $R \subseteq A \times B$

الدالة (The Function)

تعريف: لتكن A و B مجموعتين غير خاليتين، ولتكن f علاقة من A إلى B أو $A \times B$
يقال أن f دالة من A إلى B ونرمز لها $(f: A \longrightarrow B)$.
إذا وفقط إذا كان لكل $x \in A$ توجد قيمة وحيدة $y \in B$
بحيث أن $f(x) = y$ بمعنى آخر
أن لكل عنصر في المجموعة A صورة وحيدة في المجموعة الثانية B
(هذه الدالة ذات متغير واحد)
ورياضياً

لكي تكون دالة
① يجب أن تكون علاقة
٢- يجب أن تكون صورة
٣- يجب أن تكون صورة وحيدة

$$\forall x \in A, \exists y \in B \text{ s.t } y = f(x)$$

وبنفس الطريقة
نعرف الدالة ذات المتغيرين المستقلين بالشكل $(f: R \to R)$

$$\forall x, y \in R \times R, \exists z \in R^2 \text{ s.t } z = f(x, y)$$

وهكذا يمكن تعريف الدالة ذات n من المتغيرات المستقلة
وبنفس الشكل أعلاه:

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n, \exists z \in R^n \text{ s.t } z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ملاحظة
تعريف: لتكن f دالة من R إلى R، $f: R \to R$ فأن:

1- مجال الدالة (منطلق الدالة) Domain
هو عناصر المجموعة الأولى ونرمز لها بالرمز D_f
فإذا كانت الدالة ذات متغيرين مستقلين فأن:

$$D_f = \{(x, y) : (x, y) \in \underbrace{R \times R}_{R^2}\}$$

٢- المجال المقابل (Codomain)
هو العناصر الموجودة في المجموعة الثانية ويرمز لها بالرمز Codf فاذا كانت الدالة ذات متغيرين مستقلين فان المجال المقابل هو:

$$Codf = \{ z : z \in R^2 \} \ s.t \ z = f(x, y) \}$$

٣- مدى الدالة (Rang) مستقر الدالة
هو العناصر الموجودة في المجموعة الثانية والمرتبطة مع عناصر المجموعة الاولى ويرمز لها بالرمز Rf فاذا كانت الدالة ذات متغيرين مستقلين فان:

$$Rf = \{ z : z \in R^2 \ s.t \ z = f(x, y) \}$$

"انواع الدوال"

١- الدوال الجبرية
٢- " الغير جبرية

{ هي الدالة التي يمكن الحصول عليها بأجراء عدد محدود من العمليات كالجمع والطرح والقسمة والرفع الى اس والضرب لثابتة واضافة ثابتة بالنسبة للمتغيرين (x,y) }

أولاً: الدوال الجبرية: وهناك ثلاث انواع من الدوال الجبرية

أ) دالة متعددة حدود:
وتكتب بالشكل التالي:

1. $z = x^2 - y^2 + 3y + 2$
2. $z = 3 - x^2 + y^2$

ب) دالة كسرية أو قياسية:

(صيغتها $z = \frac{\text{متعددة حدود}}{\text{متعددة حدود}}$)

1. $z = \dfrac{1 + x - y}{x^2 + y^2}$ or 2. $z = \dfrac{x + y + 1}{x}$

جـ) دالة جذرية:

1. $z = \sqrt{\dfrac{x + y}{x - y}}$ or 2. $z = \sqrt{x + y}$

شعبة. لـ.و.ق

المشتقة (Derivative)

تعريف : يقال للدالة $y = f(x)$ بأنها قابلة للاشتقاق عند نقطة إذا كان

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ موجوداً.

ويرمز للاشتقاق بأحد الرموز التالية

$$f'(x) \;,\; y' \;,\; \frac{d f(x)}{dx} \;,\; \frac{dy}{dx}$$

مثال : أوجد مشتقة الدالة $f(x) = x^2$ باستخدام التعريف ؟

قوانين الاشتقاق

1. If $f(x) = c$ Then $f'(x) = 0$, $c \in R$

2. If $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n\,x^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$

دالة مركبة أو قاعدة السلسلة

3. If $f(x) = [g(x)]^n \Rightarrow f'(x) = n[g(x)]^{n-1} \cdot \frac{d}{dx} g(x)$, $n \in Z$

4. $\frac{d}{dx}(f \mp g)(x) = \frac{d}{dx} f(x) \mp \frac{d}{dx} g(x)$

5. $\frac{d}{dx}(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot \frac{d}{dx}(g(x)) + g(x) \cdot \frac{d}{dx} f(x)$

6. $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$

7. $\frac{d}{dx}(c f)(x) = c\,\frac{d}{dx} f(x)$

مجال الدوال ذات متغيرين مستقلين

1- كل متعددة حدود مجالها R^2 أي $R \times R$

ex1: $Z = 3 + x + 5y$ فان مجالها هو R^2

$D_f = R^2$

ex2: $W = x + y + 2Z$ هنا ثلاث متغيرات مستقلة

$D_f = R^3$ or $R \times R \times R$

2- كل دالة قياسية (كسرية) فان مجالها هو R^2 ما عدا القيم التي تجعل المقام يساوي صفر.

ex1: $Z = \dfrac{1}{2x+y}$

$D_f = \overbrace{R \times R}^{R^2} / \{(x,y) ; 2x+y=0\}$ or ~~$D_f = \{(x,y) \in R^2 , 2x+y=0\}$~~

ex2: $Z = \dfrac{x+y}{x^2+y^2} \Rightarrow D_f = R^2 \setminus \{(x,y) ; x^2+y^2=0\}$

3- كل دالة جذرية مجالها هو المقدار تحت الجذر يكون اكبر او يساوي صفر (في حالة الجذر في البسط)
اما اذا كان المقدار في المقام فيكون اكبر من الصفر فقط. (اي بدون المساواة)

ex1: $Z = \sqrt{x+y-1} \Rightarrow D_f = \{(x,y) ; x+y-1 \geq 0\}$

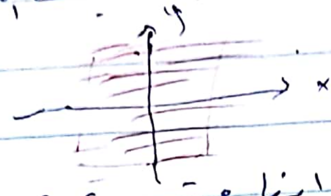
ex2: $Z = \sqrt{x^2+y^2-3} \Rightarrow D_f = \{(x,y) ; x^2+y^2-3 \geq 0\}$

ex3: $Z = \sqrt{\dfrac{1}{x-y}} \Rightarrow D_f = \{(x,y) ; x-y > 0\}$

أمثلة

س: أوجد مجال الدوال التالية، مع ذكر السبب والرسم؟

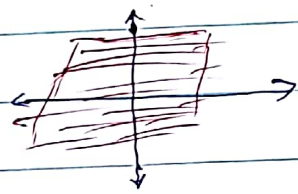
1. $z = x^3y^3 + x^2y^2$



الحل/ بما أنها متعددة حدود فإن مجالها هو R^2

sol: $\therefore D_f = R^2$

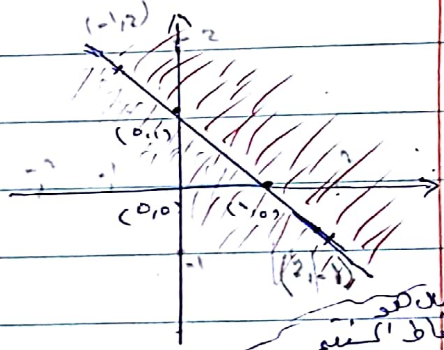
2. $z = x^3y^3 + x^2y^2 + xy + 1$



لأنها متعددة حدود

sol: $D_f = R^2$ ~~$\setminus\{(x,y) : x^2+y^2\}$~~ Polynomial

3. $z = \dfrac{x}{x+y-1}$



x	y
0	1
1	0
2	-1
-1	2
-2	3

الحل/ بما أنها دالة كسرية

∴ مجالها هو R^2 عدا القيم التي تجعل المقام = صفر

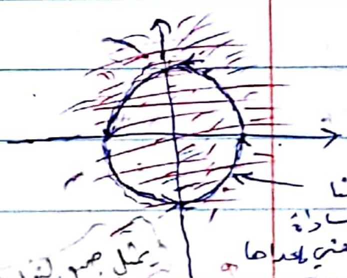
$\therefore D_f = R^2 / \{(x,y) ; x+y-1=0\}$

المجال هو كل نقاط المستوى
أي أن المجال هو كل ما
فقط المستقيم لا على قد المستقيم

4. $z = \dfrac{x+y}{x^2+y^2-1}$

الحل/ هنا تمثل معادلة دائرة نصف قطرها = 1

بما أنها دالة كسرية ∴ مجالها هو R^2 عدا القيم التي تجعل المقام مساوي إلى الصفر



هنا المساواة يعني بحدها

$x^2 + y^2 = 1$

$\therefore D_f = R^2 / \{(x,y) ; x^2+y^2-1=0\}$

يمثل جميع النقاط ... في المستوى ما عدا نقاط الدائرة

يعني كل ما عدا الدائرة مشمولة بالمجال

x	y
0	∓ 1
$\frac{1}{4}$	∓ 0.97
$\frac{1}{2}$	∓ 0.85
$\frac{3}{4}$	∓ 0.66
∓ 1	0

لما $x = \frac{1}{4} \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{1}{16} \Rightarrow y = \mp \frac{\sqrt{15}}{16} \Rightarrow (\frac{1}{4}, 0.97), (\frac{1}{4}, -0.97), (-\frac{1}{4}, 0.97), (-\frac{1}{4}, -0.97)$

$x = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = \mp \frac{\sqrt{15}}{16} \approx \mp 0.97$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \approx \mp 0.85 \Rightarrow (\frac{1}{2}, 0.85), (\frac{1}{2}, -0.85), (-\frac{1}{2}, 0.85), (-\frac{1}{2}, \ldots)$

$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \mp 0.85$

$\Rightarrow (\frac{3}{4}, 0.66), (\frac{3}{4}, -0.66), (-\frac{3}{4}, 0.66), (-\frac{3}{4}, \ldots)$

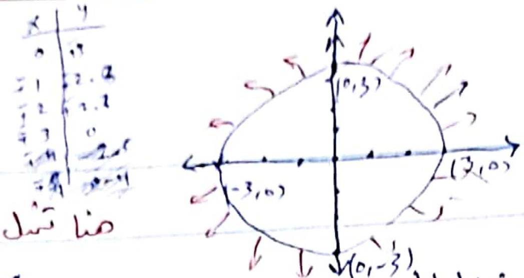
$x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \ldots \quad x = -\frac{3}{4} \Rightarrow \ldots$

6

تمثل جميع القيم من اعلى وخارجه

5. $z = \sqrt{x^2+y^2-9}$

هنا تمثل معادلة دائرة



الحل/ بما ان الدالة جذرية

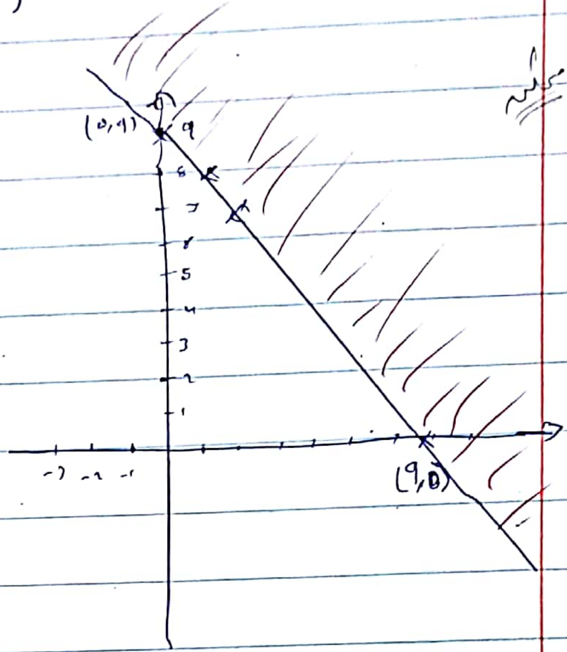
$x^2+y^2-9 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 9$

∴ القيمة التي تحت الجذر تكون اكبر او يساوي صفر

$x^2+y^2=9$ تمثل معادلة دائرة نصف قطرها 3

$D_f = \{(x,y) : x^2+y^2-9 \geq 0\}$

6. $z = \sqrt{x+y-9}$



x	y
0	9
1	8
2	7
3	6
-1	10
-2	11
-3	12
⋮	⋮
9	0

الحل/ بما انها معادلة جذرية

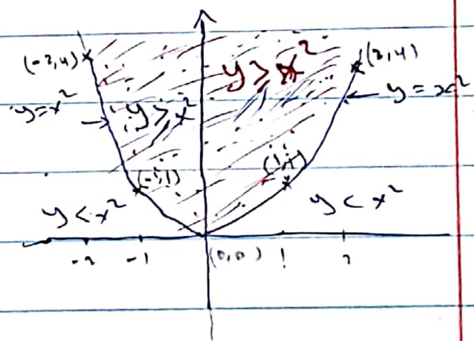
∴ القيمة تحت الجذر تكون اكبر او يساوي صفر

$\therefore x+y-9 \geq 0 \Rightarrow x+y \geq 9$

$\therefore D_f = \{(x,y) : x+y-9 \geq 0\}$

س واجب/ اوجد مجال الدالة $z = f(x,y) = \sqrt{y-x^2}$ وما هو مداها؟

Sol: $y-x^2 \geq 0 \Rightarrow y \geq x^2$



x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

$\therefore D_f = \{(x,y) \in R^2 : y-x^2 \geq 0\}$

$= \{(x,y) \in R^2 : y \geq x^2\}$

اذن مجال الدالة هو كل النقاط التي تقع داخل المنحني $y \geq x^2$ وعلى خط المنحني $y=x^2$

$R_f = \{(x,y) \in R^2 : z \geq 0\}$

ايضاً مدى هذه الدالة هو جميع النقاط الغير سالبة لانها دالة جذرية

واجب
س/ اوجد مجال ومدى الدالة $z = f(x,y) = \frac{xy}{x^2-y^2}$

الحل/ بما ان الدالة هي دالة كسرية
اذن مجالها هو R^2 ما عدا القيم التي تجعل المقام مساوي الى الصفر

x	y
-3	∓ 3
-2	∓ 2
0	0
1	∓ 1
2	∓ 2
3	∓ 3

$$D_f = R^2 / \{(x,y) : x^2-y^2=0\} = R^2 \setminus \{(x,y) : x^2=y^2\}$$

$$R_f = \{(x,y)\in R^2 : z \in R^2\} \quad or \quad -\infty < z < \infty$$

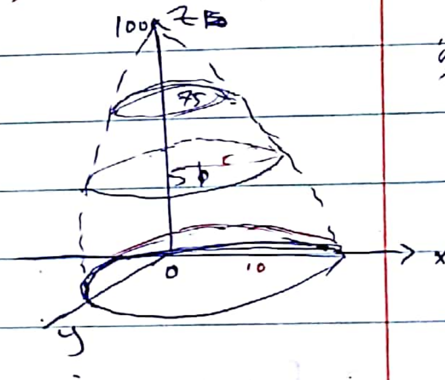
اي ان مداها هو جميع الاعداد الحقيقية لان المقام عبارة عن مستقيمات ...

سؤال واجب
س/ ارسم بيانيا الدالة $z = f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$ وبين مستوى المنحنى $z = f(x,y) = 0, 51, 75$

مكافئ
الحل/ الرسم هو مجسم اهليجي (مخروطي)

$$D_f = \{(x,y) : (x,y)\in R^2\}$$
OR $D_f = R^2$

$$R_f = \{z : z \le 100\}$$



If $f(x,y) = 0$
هنا يمثل معادلة دائرة
$\Rightarrow 100 - x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 100$
تمثل دائرة في المستوي xy نصف قطرها 10 ومركزها النقطة $(0,0,0)$

If $f(x,y) = 51 \Rightarrow 100 - x^2 - y^2 = 51 \Rightarrow x^2 + y^2 = 49$
هنا تمثل دائرة في المستوي xy نصف قطرها 7 ومركزها $(0,0,51)$

If $f(x,y) = 75 \Rightarrow 100 - x^2 - y^2 = 75 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$
هنا تمثل دائرة في المستوي نصف قطرها 5 ومركزها $(0,0,75)$

سؤال/ تابع في ظهر الورقة ←

"العمليات على الدوال"

إذا كانت $f(x,y)$ و $g(x,y)$ دوال معرفة على منطقة ما فيمكن تعريف العمليات التالية:

1. $(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y)$, $x,y \in D_f \cap D_g$

2. $(f-g)(x,y) = f(x,y) - g(x,y)$, $x,y \in D_f \cap D_g$

3. $(f \cdot g)(x,y) = f(x,y) \cdot g(x,y)$, $x,y \in D_f \cap D_g$

4. $(f/g)(x,y) = f(x,y) / g(x,y)$, $x,y \in D_f \cap D_g - \{(x,y) ; g(x,y) \neq 0\}$

   شرط $g(x,y) \neq 0$

   اي نشيل القيمة التي تجعل المقام = صفر

5. $(\alpha f)(x,y) = \alpha f(x,y)$

مثال (1)

إذا كانت: $f(x,y) = x^3 + y^3 + y$ و $g(x,y) = xy - 3x^2$

اوجد ① $f+g$ ② $f-g$ ③ $\frac{f}{g}$ ④ D_{f+g} ⑤ $D_{\frac{f}{g}}$

Sol.:

① $(f+g)(x,y) = x^3 + y^3 + y + xy - 3x^2$

② $(f-g)(x,y) = x^3 + y^3 + y - xy + 3x^2$

③ $\left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{x^3 + y^3 + y}{xy - 3x^2}$.

④ $D_{f+g} = D_f \cap D_g = R^2 \cap R^2 = R^2$

⑤ $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g / \{$القيم التي تجعل المقام = صفر$\} = R^2 \cap R^2 \setminus \{$المقام = صفر$\}$

جذر

$= R^2 / \{(x,y) : xy - 3x^2 = 0\}$

جذر

مثال (2)

س: اذا كانت $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$, $g(x,y,z)=\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2-9}$

جد ① $f-g$ ② $\frac{f}{g}$ ③ D_{f-g} ④ $D_{\frac{f}{g}}$

Sol:

① $(f-g)(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2-9}$

② $\left(\frac{f}{g}\right)(x,y,z) = \frac{f(x,y,z)}{g(x,y,z)} = \frac{x^2+y^2-z^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2-9}}$

③ $D_{f-g} = D_f \cap D_g$

$\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2-9 \geq 0\}$

$= R\times R\times R \cap \{(x,y,z); \cancel{\sqrt[3]{\ }}x^2+y^2+z^2-9 \geq 0\}$

$= R^3 \cap$ جزء

$=$ جزء

$= \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2-9 \geq 0\}$

④ $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \,/\,$ {القيم التي تجعل المقام = صفر}

$= R^3 \cap \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2-9 \geq 0\}$

$= \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2-9 > 0\}$ هنا نرفع المساواة لكي يكون المقام غير مساوي للصفر

"The Limits" النهايات

تعريف: لتكن الدالة $f(x,y)$ معرفة على منطقة دائرية مركزها (a,b) باستثناء أن تكون الدالة معرفة عند (a,b) فنقول ان

تساوي L (ثابتة)

غاية الدالة $f(x,y)$ عندما (x,y) تقترب من (a,b) وتكتب بالشكل

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

or fixed number
حيث ان L عدد ثابت (Constant)

وتعرف رياضياً (مفهوم الرمز):

اذا كان لكل عدد $\epsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ ، بحيث انه

اذا كان $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$

فأن $|f(x,y) - L| < \epsilon$

Theorem ①:

① $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$

② $\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$

③ $\lim_{(x,y)\to(a,b)} K = K$

ملخص الثلاث نقاط اعلاه:

OR $\lim_{(x,y)\to(h,k)} (ax+by+c) = ah+bk+c$

Theorem(2): If $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_1$, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L_2$

Then:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (f\mp g)(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \mp \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L_1 \mp L_2$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (f\cdot g)(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L_1 \cdot L_2$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \dfrac{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, s.t $L_2 \neq 0$ i.e $g(x,y)\neq 0$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} [\alpha f(x,y)] = \alpha \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \alpha . L_1$, $(\alpha \in R)$
or (α any constant)

5. The limit point if exist then it is unique
(نقطة الغاية ان وجدت فهي وحيدة)

امثلة: اوجد غاية كل من الدوال التالية:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} x^2+y^2 = (1)^2+(1)^2 = 1+1 = 2$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^2-xy+10}{x^2y+2xy+y^2} = \dfrac{10}{1} = 10$

3. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x,y,1)} z = 1$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x^2+y+2}{xy+1} = \dfrac{(1)^2+2+2}{(1)\cdot(2)+1} = \dfrac{5}{3}$ ▫

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy+y^2}{y} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\cancel{y}(x+y)}{\cancel{y}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) = 0+0 = 0$

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,3)} \dfrac{x^3-y^3}{x-y} = \lim\limits_{(x,y)\to(3,3)} \dfrac{\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2)}{\cancel{(x-y)}} = \lim\limits_{(x,y)\to(3,3)} x^2+xy+y^2 = 27$

7. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,-2,2)} \dfrac{x+y+z}{xyz} = \dfrac{2-2+2}{(2)(-2)(2)} = \dfrac{\cancel{2}^{1}}{-\cancel{8}_{4}} = -\dfrac{1}{4}$ ← يتبع ما قبل الورقة *

∴ الغاية غير موجودة .

8. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \sin x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{(0)\sin 0}{\sqrt{(0)^2+3}} = \frac{0}{\sqrt{3}} = 0$

9. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{x^2+y^2}{x+y+1}\right) = \cos\left(\frac{0}{1}\right) = \cos 0 = 1$

10. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

ⓐ $\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}\right] = \lim_{x\to 0} 1 = 1$

ⓑ $\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right] = \lim_{y\to 0}\left[\frac{y^2}{-y^2}\right] = \lim_{y\to 0} -1 = -1$

since $\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right] \neq \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right]$

∴ lim is not exist ∴ الغاية غير موجودة

11. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

ⓐ $\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x^3}{x^2}\right] = \lim_{x\to 0} x = 0$

ⓑ $\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right] = \lim_{y\to 0}\left[\frac{y^3}{y^2}\right] = \lim_{y\to 0} y = 0$

بما ان الغاية

since $\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right] = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right]$

∴ الغاية موجودة

12. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2+y-2}{x-y}$ ← HW2

ⓐ $\lim_{x\to 1}\left[\lim_{y\to 1} \frac{x^2+y-2}{x-y}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2+1-2}{x-1}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2-1}{x-1}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}$

$= \lim_{x\to 1} x+1 = 1+1 = 2$

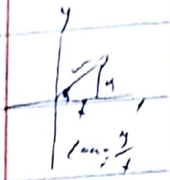
ⓑ $\lim_{y\to 1}\left[\lim_{x\to 1} \frac{x^2+y-2}{x-y}\right] = \lim_{y\to 1}\left[\frac{1+y-2}{1-y}\right] = \lim_{y\to 1}\left[\frac{y-1}{1-y}\right] = \lim_{y\to 1}\left[\frac{-(1-y)}{\cancel{(1-y)}}\right]$

$= \lim_{y\to 1} -1 = -1$

Since $\lim_{x\to 1}\left[\lim_{y\to 1} \frac{x^2+y-2}{x-y}\right] \neq \lim_{y\to 1}\left[\lim_{x\to 1} \frac{x^2+y-2}{x-y}\right]$

∴ الغاية غير موجودة

س1/ اختبر وجود الغاية للدالة $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{xy}$ والواقعة على المستقيم $y=mx$ عندما $(x,y)\to(0,0)$



Sol:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{xy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+m^2x^2}{x^2m}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2(1+m^2)}{\cancel{x^2}m}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1+m^2}{m}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1+\tan^2\theta}{\tan\theta}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\tan\theta}+\lim_{(x,y)\to(0,0)}\tan\theta$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\cot\theta+\lim_{(x,y)\to(0,0)}\tan\theta=\cot\theta+\tan\theta$$

بما ان الغاية هنا تعتمد على الزاوية θ

وان الزاوية θ هي متغيرة $\Leftarrow$ لا يوجد غاية للدالة

س2/ اختبر وجود غاية الدالة $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ الواقعة على المستقيم $y=mx$

عندما $(x,y)\to(0,0)$

Sol:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2m}{x^2(m^2+1)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{m}{m^2+1}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\tan\theta}{\sec^2\theta}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\tan\theta\cdot\frac{1}{\sec^2\theta}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos^2\theta=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sin\theta\cos\theta$$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$
$\Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2\theta=\sin\theta\cos\theta$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}\sin 2\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

$\therefore$ الغاية غير موجودة وذلك لانها تعتمد على الزاوية θ

والمتغيرة من $\left[-\frac{1}{2} \text{ to } \frac{1}{2}\right]$

س3 / اختبر وجود الغاية للدالة $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$

عندما $(x,y)\to(0,0)$ وتقع ① على المستقيم $y=mx$ ② تقع على القطع المكافئ $y=x^2$ ، هل ان f تمتلك غاية عندما $(x,y)\to(0,0)$

Sol. ① Along the line $y=mx$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2mx}{x^4+m^2x^2}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\cancel{x^2}(mx)}{\cancel{x^2}(x^2+m^2)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{m.x}{x^2+m^2}=\frac{0}{0+m^2}=0$$

② Along the parabola $y=x^2$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2.x^2}{x^4+x^4}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4}{2\cancel{x^4}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

بما ان الغاية ليست وحيدة $\Leftarrow$ لا يوجد غاية للدالة

س4 واجب / اوجد الغاية لكل من الدوال الاتية :

1. $\lim_{(x,y)\to(0,4)}\dfrac{x}{\sqrt{y}}=\dfrac{0}{\sqrt{4}}=0$

2. $\lim_{(x,y,z)\to(1,1,1)}\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}=\sqrt{1+1+1-1}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$

3. $\lim_{(x,y)\to(1,1)}\cos\sqrt[3]{|xy|-1}=\cos\sqrt[3]{1-1}=\cos 0=1$

4. $\lim_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x^2-y^2}{x-y}=\lim_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{(x-y)(x+y)}{x-y}=\lim_{(x,y)\to(1,1)}x+y=1-1=0$

5. $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$ جد $f(x,y)=x^2y^2+5xy+8$ اذا كانت

6. $\lim_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{1}{2-1}=\dfrac{1}{1}=1$

يتبع خلف الورقة

الاستمرارية The Continuity

تعريف: يقال للدالة $z = f(x,y)$ بأنها مستمرة عند النقطة (a,b) اذا تحققت الشروط التالية:

1. $f(a,b)$ exist الصورة موجودة

2. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ exist الغاية موجودة

3. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ الغاية = الصورة

ملاحظات:

1- اذا لم يتحقق واحد من الشروط السابقة، فيقال بأنها دالة غير مستمرة عند تلك النقطة.

2- يقال للدالة بأنها مستمرة على مجالها اذا تحققت الشروط السابقة في كل نقطة من نقاط المجال

3- المعنى الهندسي: أن الدالة $z = f(x,y)$ مستمرة وأن السطح لا يحتوي على ثقب.

* نظرية ①: اذا كانت $f(x,y)$ و $g(x,y)$ دوال مستمرة، فأن:

① $f \mp g$ cont مستمرة ② $f \cdot g$ cont ③ $\frac{f}{g}$ مستمرة ما عدا النقاط التي تجعل المقام = صفر

④ αf cont, $\alpha \in R$

* نظرية ②:

- كل متعددة حدود مستمرة على مجالها.
- كل دالة قياسية (كسرية) مستمرة على مجالها.
- ،، ،، جذرية ،، ،، ،،

* ملاحظة: عكن تعريف الاستمرارية للدالة $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
عند النقطة $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ بنفس الطريقة السابقة:

1. $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ exist موجودة

2. $\lim\limits_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \to (a_1, a_2, \dots, a_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ exist موجود

3. الصورة = النهاية

أمثلة (1)

س: ناقش استمرارية الدالة $f(x,y) = x^2 - y^2$
عندما $(x,y) \to (1,-1)$

Sol: ① $f(1,-1) = (1)^2 - (-1)^2 = 1 - 1 = 0$

② $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} x^2 - y^2 = 1^2 - (-1)^2 = 1 - 1 = 0$

③ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y) = f(1,-1) \Rightarrow$ is cont. ∴ الدالة مستمرة

(2) ناقش استمرارية الدالة

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ x + y & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

عندما $(x,y) = (0,0)$

Sol: ① $f(0,0) = 0 + 0 = 0$

② $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r\cos\theta \, r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}$

$= \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{\cancel{r^2} \cos\theta \sin\theta}{\cancel{r^2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \lim\limits_{r\to 0} \cos\theta \sin\theta$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$= \cos\theta \sin\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$

∴ النهاية غير موجودة لانه θ متغيرة

17

(3) ناقش استمرارية الدالة

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x-y} , & x \neq y \\ x^2+y^2 , & x = y \end{cases}$$

عندما $(x,y) \to (1,1)$ ؟

Sol. ① $f(1,1) = 1^2 + 1^2 = 2$

② $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-y^2}{x-y} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{\cancel{(x-y)}(x+y)}{\cancel{(x-y)}} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} x+y = 1+1 = 2$

③ هنا الصورة = الغاية

③ Since $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-y^2}{x-y} = f(1,1) \Rightarrow f$ is cont.

مستمرة f

(4) ناقش استمرارية الدالة عند النقطة $(1,1)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y-2}{x-y} & x \neq y \\ x+y+1 & x = y \end{cases}$$

Sol. ① $f(1,1) = 1+1+1 = 3$

② $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2+y-2}{x-y}$

طريقة المسارات

$\lim\limits_{x\to1}\left[\lim\limits_{y\to1} \dfrac{x^2+y-2}{x-y}\right] = \lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{x^2-1}{x-1}\right] = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}$

$= \lim\limits_{x\to1} x+1 = 1+1 = 2$

$\lim\limits_{y\to1}\left[\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+y-2}{x-y}\right] = \lim\limits_{y\to1}\left[\dfrac{1+y-2}{1-y}\right] = \lim\limits_{y\to1} \dfrac{y-1}{1-y}$

$= \lim\limits_{y\to1} \dfrac{-\cancel{(1-y)}}{\cancel{(1-y)}} = \lim\limits_{y\to1} -1 = -1$

بما أن الغاية غير متساوية

∴ الغاية غير موجودة

∴ الدالة غير مستمرة

(5) ناقش استمرارية الدالة

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x-y} & , x \neq y \\ 6 & , x = y \end{cases}$$

عند النقطة $(x,y)=(3,3)$ ؟

Sol: ① $f(3,3) = 6$

② $\lim\limits_{(x,y)\to(3,3)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(3,3)} \dfrac{x^2-y^2}{x-y} = \lim\limits_{(x,y)\to(3,3)} \dfrac{(x-y)(x+y)}{x-y}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(3,3)} x+y = 3+3 = \boxed{6}$

③ $\lim\limits_{(x,y)\to(3,3)} f(x,y) = f(3,3) \Rightarrow f$ is cont.

(6) ناقش استمرارية الدالة

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x+y} & , (x,y) \neq (4,2) \\ 2 & , (x,y) = (4,2) \end{cases}$$

عند النقطة $(4,2)$ ؟

Sol: ① $f(4,2) = 2$

② $\lim\limits_{(x,y)\to(4,2)} \dfrac{x^2-y^2}{x+y} = \dfrac{16-4}{6} = 2$

③ since $\lim\limits_{(x,y)\to(4,2)} f(x,y) = f(4,2) \Rightarrow f$ is cont.

(7) Prove the function: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (7)

Sol: ① Since the function $f(x,y) = \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = \dfrac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)} = x^2-y^2$

defined at any point $(x,y) \neq (0,0)$

Then the fun. f is cont. at any point $(x,y) \neq (0,0)$

because it is polynomail fun. of x and y.

$\therefore$ f is defined at $(0,0)$ and $f(0,0) = 0$

يتبع ←

"الاشتقاق الجزئي"

Partial derivative

لنتذكر سوياً تعريف مشتق الدالة في متغير واحد

تعريف:
يقال للدالة $y = f(x)$ بأنها قابلة للاشتقاق عند نقطة إذا كانت الغاية موجودة أي أن

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{exist}$$

ويرمز للاشتقاق بأحد الرموز التالية

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d f(x)}{dx}, \quad f'(x), \quad y'$$

وتقرأ $f'(x)$ مشتقة الدالة $f(x)$ بالنسبة لـ x

قوانين الاشتقاق

1. If $f(x) = c$ Then: $f'(x) = 0$, $c \in R$

2. If $f(x) = x^n$ Then: $f'(x) = n x^{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$

3. If $f(x) = [g(x)]^n$ Then: $f'(x) = n[g(x)]^{n-1} \cdot \frac{d}{dx} g(x)$, $n \in Z$ الدالة المركبة وقاعدة السلسلة

4. $\frac{d}{dx}(f \mp g)(x) = \frac{d}{dx} f(x) \mp \frac{d}{dx} g(x)$

5. $\frac{d}{dx}(c f)(x) = c \frac{d}{dx} f(x)$, $c \in R$

6. $\frac{d}{dx}(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x) + g(x) \cdot \frac{d}{dx} f(x)$

7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x) f'(x) - f(x) g'(x)}{[g(x)]^2}$

Scanned by CamScanner

Partial derivative : ((المشتقة الجزئية))

Let $f(x,y) = z$ be a fun. of two independent varibles x and y, if y is fixed then f will be a fun. of one varible x, then we can derive with respect to (w.r.t.) x, this derivative is called Partial derivative of f w.r.t x and denoted by f_x or $\frac{\partial f}{\partial x}$,

hence f_x is a fun. and its value at

$$(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$\text{or } f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Δx ← تمثل التغير في الإزاحة

Now, if x is fixed then f will be a fun. of one varible y, then we derive w.r.t. y this derivative is called Partial derivative of f w.r.t. y and denoted by f_y or $\frac{\partial f}{\partial y}$, hence f_y is a fun. and its value at $(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

$$\text{or } f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

ex:

مثال ①: باستخدام تعريف الاشتقاق الجزئي اوجد

① f_x ② f_y للدالة $f(x,y) = 2x + y^2 - 2$

Sol

$$f(x,y) = 2x + y^2 - 2$$

$$\therefore f(x+\Delta x, y) = 2(x+\Delta x) + y^2 - 2$$

since ① $$f_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\therefore f_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x) + y^2 - 2 - (2x + y^2 - 2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{2x} + 2\Delta x + \cancel{y^2} - \cancel{2} - \cancel{2x} - \cancel{y^2} + \cancel{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} 2 = \boxed{2}$$

② $$f(x, y+\Delta y) = 2x + (y+\Delta y)^2 - 2$$

$$\therefore f_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2x + (y+\Delta y)^2 - 2 - (2x + y^2 - 2)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\cancel{2x} + \cancel{y^2} + 2y\Delta y + (\Delta y)^2 - \cancel{2} - \cancel{2x} - \cancel{y^2} + \cancel{2}}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2y\Delta y + (\Delta y)^2}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\cancel{\Delta y}(2y + \Delta y)}{\cancel{\Delta y}}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} 2y + \Delta y = \lim_{\Delta y \to 0} 2y + \lim_{\Delta y \to 0} \Delta y$$

$$= 2y + 0 = \boxed{2y}$$

يتبع ←

ملاحظة: كل القواعد السابقة للاشتقاق يمكن تطبيقها للدالة ذات المتغيرين أو أكثر.

مثال (3): أوجد f_x ، f_y للدالة $f(x,y) = x^2+y^2-xy+2$

Sol: $f_x = 2x+0-y.1+0 = 2x-y$

$f_y = 0+2y-x.1+0 = 2y-x$

مثال (4): أوجد f_x ، f_y للدالة

1. $f(x,y) = (x^2+4y^3)^5$
2. $f(x,y) = x^2+50\sin x$

Sol ①: $f_x = 5(x^2+4y^3)^4 \cdot 2x = 10x(x^2+4y^3)^4$

$f_y = 5(x^2+4y^3)^4 \cdot 12y^2 = 60y^2(x^2+4y^3)^4$

②: $f_x = 2x+50\cos x$

$f_y = 0$

مثال (5): أوجد الاشتقاق الجزئي f_x ، f_y للدوال التالية:

1. $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$

Sol: $f_x = \cos(x^2+y^2) \cdot 2x = 2x\cos(x^2+y^2)$

$f_y = \cos(x^2+y^2) \cdot 2y = 2y\cos(x^2+y^2)$

2. $Z = x^2+y^2+xy-5$

Sol: $Z_x = 2x+y$, $Z_y = 2y+x$

3. $Z = \ln(x^2y^2) \xRightarrow{\text{Sol.}} Z_x = \frac{1}{x^2y^2} \cdot 2x\,y^2 = \boxed{\frac{2}{x}}$

$Z_y = \frac{1}{x^2y^2} \cdot 2y\,x^2 = \boxed{\frac{2}{y}}$

4. $Z = [\sin(x^2+y^2)]^2$

Sol. $Z_x = 2[\sin(x^2+y^2)] \cdot \cos(x^2+y^2) \cdot 2x$

$= 4x[\sin(x^2+y^2)] \cdot \cos(x^2+y^2)$.

$Z_y = 4y[\sin(x^2+y^2)] \cdot \cos(x^2+y^2)$.

5. $Z = xy\,e^{x^2+1}$

Sol. $Z_x = y\,e^{x^2+1} + 0 + xy\,e^{x^2+1} \cdot (2x)$

$= y\,e^{x^2+1} + 2x^2y\,e^{x^2+1}$

$Z_y = x\,e^{x^2+1}$

6. $Z = \dfrac{\sec(x^3+y^3)}{(x-y)}$

مشتقة البسط × المقام − مشتقة المقام × البسط / المقام تربيع

Sol. $Z_x = \dfrac{[\sec(x^3+y^3)\tan(x^3+y^3) \cdot 3x^2](x-y) - 1 \cdot (\sec(x^3+y^3))}{(x-y)^2}$

$Z_y = \dfrac{(x-y)[\sec(x^3+y^3)\tan(x^3+y^3) \cdot 3y^2] + \sec(x^3+y^3) \cdot 1}{(x-y)^2}$

Kwz س/ أوجد f_x ، f_y ، f_z للدالة

$f(x,y,z) = x^2[\cos(x^2+y^2+z^2)]^2 + \dfrac{\ln(xyz)}{xyz}$

Sol. $f_x = 2x[\cos(x^2+y^2+z^2)]^2 + 2[\cos(x^2+y^2+z^2)] \cdot [(-\sin(x^2+y^2+z^2)) \cdot 2x] \cdot x^2 + \dfrac{(\frac{1}{xyz} \cdot yz) \cdot xyz - yz \cdot \ln(xyz)}{(xyz)^2}$

يتبع ←

* التفاضل التام

أذا كانت الدالة ذات متغيرين مستقلين (x,y) $z = f(x,y)$

فأن التفاضل التام لها والذي يرمز له بالرمز ∂z

هو :

$$\partial z = f_x\,dx + f_y\,dy$$

* ملاحظة : اذا كانت الدالة $w = f(x,y,z)$ فأن

$$\partial w = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz$$

وهكذا يمكن تعميم هذا التعريف للدالة ذات n من المتغيرات المستقلة.

* ملحوظة : مثال رقم (2) نعمله قبل هذا المثال رقم (1)

مثال (1)

: أوجد ∂f للدالة $f(x,y) = e^{x^2+y^2} + \ln(x^3y^3)$

sol.

$$\partial f = f_x\,dx + f_y\,dy$$

$$f_x = 2x\,e^{x^2+y^2} + \left(\frac{1}{x^3y^3}\right)\cdot 3x^2y^3 = 2x\,e^{x^2+y^2} + \frac{3}{x}$$

$$f_y = 2y\,e^{x^2+y^2} + \frac{3x^3y^2}{x^3y^3} = 2y\,e^{x^2+y^2} + \frac{3}{y}$$

$$\therefore\ \partial f = \left(2x\,e^{x^2+y^2} + \frac{3}{x}\right)dx + \left(2y\,e^{x^2+y^2} + \frac{3}{y}\right)dy$$

* ملاحظة : هناك فرق بين الاشتقاق والتفاضل

مثال توضيحي :

يتبع ←

$$f_y = 0 + x \cdot e^{xy} \cdot x + \frac{1}{\frac{x}{y}} \cdot \frac{0 - x \cdot 1}{y^2}$$

$$= x^2 e^{xy} + \left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(\frac{-x}{y^2}\right)$$

$$= x^2 e^{xy} - \frac{1}{y}$$

$$\therefore\ \partial f = \left(xy e^{xy} + e^{xy} + \frac{1}{x}\right) dx + \left(x^2 e^{xy} - \frac{1}{y}\right) dy$$

مثال (4) أوجد ∂f للدالة

$$Z = \tan\left(\frac{y}{x}\right) + \sin(\cos x)$$

Sol.

$$f_x = \sec^2\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{0 \cdot x - y \cdot 1}{x^2} + \cos(\cos x)(-\sin x)$$

$$= -\frac{y}{x^2} \sec^2\left(\frac{y}{x}\right) - \sin x \cos(\cos x)$$

$$f_y = \sec^2\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1 \cdot x - 0 \cdot y}{x^2} = \frac{1}{x} \sec^2\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\therefore\ \partial Z = \left(-\frac{y}{x^2} \sec^2\left(\frac{y}{x}\right) - \sin x \cos(\cos x)\right) dx + \left(\frac{1}{x} \sec^2\left(\frac{y}{x}\right)\right) dy$$

مثال (5)

أوجد ∂f للدالة:

$$Z = \sin(x^2+y^2) + \frac{x+y}{x^3+y^2}$$

Sol.

$$f_x = \cos(x^2+y^2) \cdot 2x + \frac{1 \cdot (x^3+y^2) - 3x^2(x+y)}{[x^3+y^2]^2}$$

$$= 2x \cos(x^2+y^2) + \frac{x^3+y^2-3x^3-3x^2y}{[x^3+y^2]^2}$$

$$f_y = \cos(x^2+y^2) \cdot 2y + \frac{(x^3+y^3) \cdot 1 - 2y(x+y)}{(x^3+y^2)^2}$$

$$\therefore\ \partial f = \left[2x \cos(x^2+y^2) + \frac{y^2 - 2x^3 - 3x^2 y}{(x^3+y^2)^2}\right] dx + \left(2y \cos(x^2+y^2) + \frac{x^3+y^3-2yx-2}{(x^3+y^2)^2}\right.$$

26

* الاشتقاق الجزئي من الرتب العليا

اذا كانت $z = f(x,y)$ دالة فيرمز للاشتقاق الجزئي من الرتبة الثانية بالرموز التالية:

$z = f$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} , \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} , \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} , \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

OR: $z_{xx} , z_{yy} , z_{xy} , z_{yx}$

$f_{xx} , f_{yy} , f_{xy} , f_{yx}$

بإعادة متغيرين

باعادة ثلاث متغيرات بالشكل

OR:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) . \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) . \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) . \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) . \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]$$

* نظرية (1)

: اذا كانت $z = f(x,y)$ قابلة للاشتقاق الجزئي ومستمرة وأن $f_x , f_y , f_{xy} , f_{yx}$ دوال مستمرة فأن $\boxed{f_{xy} = f_{yx}}$

ex: $f(x,y) = x^2 + y^2$

Sol.

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 2x \Rightarrow f_{xy} = 0 \\ f_y &= 2y \Rightarrow f_{yx} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f_{xy} = f_{yx} = 0$$

* نظرية (2): اذا f مستمرة وتملك مشتقات جزئية مستمرة فأن

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$$

يتبع ←

مثال (1)

س: أوجد f_{xx} , f_{yy} , f_{xy} , f_{yx} للدالة

$f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$

Sol: $f_x = -2x\sin(x^2+y^2) \Rightarrow f_{xx} =$

$f_{xx} = -2\sin(x^2+y^2) + \cos(x^2+y^2) \cdot 2x(-2x)$

$= -2\sin(x^2+y^2) - 4x^2\cos(x^2+y^2)$

$f_y = -2y\sin(x^2+y^2)$

$f_{yy} = -2\sin(x^2+y^2) + \cos(x^2+y^2) \cdot 2y(-2y)$

$= -2\sin(x^2+y^2) - 4y^2\cos(x^2+y^2)$

$f_{xy} = \cos(x^2+y^2) \cdot 2y(-2x)$

$= -4xy\cos(x^2+y^2)$

$f_{yx} = -4yx\cos(x^2+y^2)$

مثال (2)

س: أوجد f_{xy} و f_{yx} للدالة

$f(x,y) = e^{x^2+y^2} + \sin(xy)$

Sol: $f_x = e^{x^2+y^2} \cdot 2x + \cos(xy) \cdot y$

$f_{xy} = 2x e^{x^2+y^2} \cdot (2y) + 0 + y(-\sin xy) \cdot x + 1 \cdot (\cos(xy))$

$= 4xy e^{x^2+y^2} - xy\sin(xy) + \cos(xy)$

29

28

$f_y = 2y\,e^{x^2+y^2} + \cos(xy)\cdot x$

$f_{yx} = 4xy\,e^{x^2+y^2} + (-y\sin(xy)\cdot x) + 1\cdot\cos(xy)$

$= 4xy\,e^{x^2+y^2} + \cos(xy) - xy\sin(xy)$

Ex. Let $f(x,y) = x\cos y + y e^x$

Find: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Sol.

$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y + y e^x \Rightarrow$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y e^x$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -x\sin y + e^x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x\cos y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\sin y + e^x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\sin y + e^x$

"قاعدة السلسلة"

Chain Rule

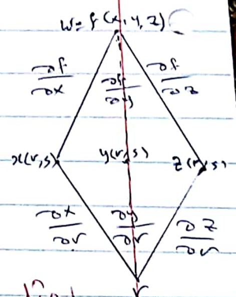
تعريف: اذا كانت $w=f(x,y,z)$ وكانت x , y , z هي دوال لـ r , s بمعنى أن $x=x(r,s)$, $y=y(r,s)$, $z=z(r,s)$

وأن x , y , z , f لها مشتقات جزئية مستمرة

فإن:

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}$$



أمثلة

مثال ① اذا كانت $z=f(x,y)=x^2+y^2$

وأن $x=2t$, $y=3t+1$ فجد $\frac{\partial z}{\partial t}$

sol.

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$=2x\cdot 2+2y\cdot 3=4x+6y$$

$$=4(2t)+6(3t+1)=8t+18t+6=\boxed{26t+6}$$

مثال ② أوجد $\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$ للدالة $w=f(x,y,z)=x+2y+z^2$

اذا كان $x=\frac{r}{s}$, $y=r^2+e^s$, $z=2r$

Sol. $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}$

$= 1\cdot\frac{s}{s^2} + 2\cdot 2r + 2z\cdot 2 = \frac{1}{s} + 4r + 4z$

$= \frac{1}{s} + 4r + 4(2r) = \boxed{\frac{1}{s} + 12r}$

$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}$

$= 1\left(-\frac{r}{s^2}\right) + 2\cdot e^{s} + 2z\cdot 0 = \boxed{-\frac{r}{s^2} + 2e^{s}}$

مثال ③:

أوجد $\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$ للدالة $w = f(x,y,z) = x^2 + 2xy + z^3$

حيث أن $x = 2s + r$, $y = s^2 r$, $z = \ln(s) + r$

Sol. $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}$

$= (2x+2y)\cdot 1 + 2x\cdot s^2 + 3z^2\cdot 1$

$= 2(2s+r) + 2s^2 r + 2(2s+r)\cdot s^2 + 3(\ln(s)+r)^2$

$= 4s + 2r + 2s^2 r + 4s^3 + 2s^2 r + 3(\ln(s)+r)^2$

$= 4s + 2r + 4s^2 r + 4s^3 + 3(\ln(s)+r)^2$

$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}$

$= (2x+2y)\cdot 2 + 2x\cdot 2sr + 3z^2\cdot\frac{1}{s}$

$= 4(2s+r) + 4s^2 r + 4(2s+r)\cdot sr + 3(\ln(s)+r)^2\cdot\frac{1}{s}$

$= 8s + 4r + 12s^2 r + 4sr^2 + 3(\ln(s)+r)^2\cdot\frac{1}{s}$

يتبع ←

أو ضربته افرز

← يتبع

مثال ٤/ اذا علمت أن $z = f(x,y) = x^2 + y^2$
حيث أن $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$
اوجد z_r , z_θ

Sol: $\dfrac{\partial z}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial r}$

$$= 2x\cdot\cos\theta + 2y\cdot\sin\theta$$
$$= 2(r\cos\theta)\cos\theta + 2(r\sin\theta)\sin\theta$$
$$= 2r\cos^2\theta + 2r\sin^2\theta = 2r(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$
$$= 2r$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$= -2xr\sin\theta + 2y\cdot r\cos\theta$$
$$= -2(r\cos\theta)r\sin\theta + 2(r\sin\theta)r\cos\theta$$
$$= -2r^2\cos\theta\sin\theta + 2r^2\cos\theta\sin\theta$$
$$= 0$$

مثال ٥

مسألة اذا علمت أن $z = f(x-ct)$
اثبت ان $z_t + c\,z_x = 0$ حيث c ثابت

Sol: Let $u = x - ct$ نفرض ان
$\Rightarrow z = f(u)$

ليه هنا منفعش انه نشتق مباشرة لـ x ونشتق لـ t وده لم يبقى ... اكل ... العكس

But

$\therefore \dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial t} = z_t$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot(-c)$$

$\& \quad z_x = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}$
$$= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 1$$

← يتبع

مثال 6 / اذا كانت $Z = x^3 + y^3$. $x = t$, $y = 2t$

فأوجد $\frac{\partial z}{\partial t}$

الحل

$$Z = t^3 + 8t^3$$

$$\therefore Z_t = \frac{\partial z}{\partial t} = 3t^2 + 24t^2 = 27t^2$$

الطريقة الثانية

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= 3x^2\cdot 1 + 3y^2\cdot 2$$

$$= 3t^2 + 3(2t)^2\cdot 2 = 3t^2 + 24t^2 = 27t^2$$

مثال (7)

اثبت ان $f_{xy} = f_{yx}$ للدالة

$$f(x,y) = [\tan(x^3+y^2)]^5$$

Sol

$$f_x = 5[\tan(x^3+y^2)]^4 \sec^2(x^3+y^2)\cdot 3x^2$$

$$= 15x^2[\tan(x^3+y^2)]^4 \sec^2(x^3+y^2)$$

$$\therefore f_{xy} = 15x^2\sec^2(x^3+y^2)\cdot 4[\tan(x^3+y^2)]^3 \sec^2(x^3+y^2)\cdot 2y$$

$$+ 15x^2[\tan(x^3+y^2)]^4\cdot 2\sec(x^3+y^2)\sec(x^3+y^2)\cdot\tan(x^3+y^2)\cdot 2y$$

$$= \overset{120}{\cancel{60}}x^2y\sec^4(x^3+y^2)[\tan(x^3+y^2)]^3 + 60x^2y[\tan(x^3+y^2)]^5 \sec^2(x^3+y^2)$$

$$= 60x^2y\sec^2(x^3+y^2)[\tan(x^3+y^2)]^3\left(2\overset{\sec^2(x^3+y^2)}{\cancel{1}} + [\tan(x^3+y^2)]^2\right)$$

$$= 60x^2y\sec^2(x^3+y^2)[\tan(x^3+y^2)]^3\left(2\sec^2(x^3+y^2) + \tan^2(x^3+y^2)\right)$$

$$f_y = 10y[\tan(x^3+y^2)]^4\sec^2(x^3+y^2)$$

$$f_{yx} = 10y\cdot 4[\tan(x^3+y^2)]^3\sec^2(x^3+y^2)\cdot 3x^2\cdot\sec^2(x^3+y^2)$$

$$+ 10y[\tan(x^3+y^2)]^4\cdot 2\sec(x^3+y^2)\cdot\sec(x^3+y^2)\tan(x^3+y^2)\cdot 3x^2$$

"الدوال الزائدية"

~~The derivative of~~ Hyperabolic functions

اذا كانت u عدداً حقيقياً بحيث $u=u(x)$ فإن:

1. $\sinh u = \dfrac{e^{u} - e^{-u}}{2}$

2. $\cosh u = \dfrac{e^{u} + e^{-u}}{2}$

3. $\tanh u = \dfrac{e^{u} - e^{-u}}{e^{u} + e^{-u}}$

4. $\coth u = \dfrac{1}{\tanh u} = \dfrac{e^{u} + e^{-u}}{e^{u} - e^{-u}}$ $(u \neq 0)$

5. $\operatorname{sech} u = \dfrac{1}{\cosh u} = \dfrac{2}{e^{u} + e^{-u}}$

6. $\operatorname{csch} u = \dfrac{1}{\sinh u} = \dfrac{2}{e^{u} - e^{-u}}$ $(u \neq 0)$

"بعض المتطابقات للدوال الزائدية"

1. $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ $\quad \div \cosh^2 u \;,\; \div \sinh^2 u$

2. $1 - \tanh^2 u = \operatorname{sech}^2 u$
   $\coth^2 u - 1 = \operatorname{csch}^2 u$

3. $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$
   $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

4. $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
   $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

5. $\cosh^2 u = \dfrac{\cosh 2u + 1}{2}$ & $\sinh^2 u = \dfrac{\cosh 2u - 1}{2}$

يتبع ←

"اشتقاق الدوال الزائدية"

The Derivative of Hyperbolic Functions

لتكن $u=f(x)$ دالة قابلة للتفاضل فأننا يمكن بالاستناد

الى تعاريف الدوال الزائدية وقوانين التفاضل ايجاد
مشتقات الدوال الزائدية بسهولة وكالاتي :

1. $\frac{\partial}{\partial x}(\sinh u) = \cosh u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$

Proof

$\because \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{u}-e^{-u}}{2}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{u}-e^{-u}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}e^{u} - \frac{\partial}{\partial x}e^{-u}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[e^{u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} - e^{-u}\cdot\left(\frac{-\partial u}{\partial x}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[e^{u}+e^{-u}\right]\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \boxed{\cosh u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}}$

2. $\frac{\partial}{\partial x}(\cosh u) = \sinh u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$

Proof

$\because \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{u}+e^{-u}}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{u}+e^{-u}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{u}+\frac{\partial}{\partial x}e^{-u}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + e^{-u}\cdot -\frac{\partial u}{\partial x}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(e^{u}-e^{-u}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$

$= \boxed{\sinh u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}}$

3. $\frac{\partial}{\partial x}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$

Proof

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sinh u}{\cosh u}\right] = \frac{\cosh u \cdot \cosh u \frac{\partial u}{\partial x} - \sinh u \cdot \sinh u \frac{\partial u}{\partial x}}{\cosh^2 u}$$

$$= \frac{\cosh^2 u \frac{\partial u}{\partial x} - \sinh^2 u \frac{\partial u}{\partial x}}{\cosh^2 u}$$

$$= \frac{(\cosh^2 u - \sinh^2 u)\frac{\partial u}{\partial x}}{\cosh^2 u} = \frac{1}{\cosh^2 u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= \operatorname{sech}^2 u \frac{\partial u}{\partial x}$$

4. $\frac{\partial}{\partial x}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$ (بنفس الإثبات السابق)

(لأنها مقلوب الـ tanh $\coth = \frac{1}{\tanh}$)

5. $\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$

Proof

$\operatorname{sech} = \frac{1}{\cosh}$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{sech} u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\cosh u}\right)$$

$$= \frac{0 - 1 \cdot \sinh u \frac{\partial u}{\partial x}}{\cosh^2 u} = -\frac{\sinh u \frac{\partial u}{\partial x}}{\cosh^2 u}$$

$$= -\frac{1}{\cosh u} \cdot \frac{\sinh u \frac{\partial u}{\partial x}}{\cosh u}$$

$$= -\operatorname{sech} u \cdot \tanh u \frac{\partial u}{\partial x}$$

6. $\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{\partial u}{\partial x}$

(بنفس الإثبات السابق)

أمثلة

س: أوجد $\frac{\partial y}{\partial x}$ للدوال التالية

1. $y = \coth \frac{1}{x}$

Sol. $y' = -\operatorname{csch}^2 \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$= \frac{1}{x^2} \operatorname{csch}^2 \frac{1}{x}$

2. $y = \tanh(1+x^2)$

Sol. $y' = \frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{sech}^2(1+x^2) \cdot 2x$

$= 2x \operatorname{sech}^2(1+x^2)$

3. $y = x \operatorname{sech} x^2$

Sol. $\frac{\partial y}{\partial x} = x \cdot (-\operatorname{sech} x^2 \tanh x^2) \cdot 2x + \operatorname{sech} x^2 \cdot 1$

$= -2x^2 \operatorname{sech} x^2 \tanh x^2 + \operatorname{sech} x^2$

4. $y = \operatorname{csch}^2(x^2+1)$

Sol. $\frac{\partial y}{\partial x} = y' = 2 \operatorname{csch}(x^2+1) \cdot [-\operatorname{csch}(x^2+1) \coth(x^2+1) \cdot 2x]$

$= -4x \operatorname{csch}^2(x^2+1) \coth(x^2+1)$

5. $y = \frac{1}{4} \sinh(2x) - \frac{1}{2} x$

Sol. $y' = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\cancel{4}\,2} \cosh 2x \cdot \cancel{2}\,1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cosh(2x) - 1)$

$= \sinh^2 x$

يتبع ←