الفصل الأول

أنظمة الأعداد

Number Systems

الفصل الأول

أنظمة الأعداد Number Systems

1-1 مقدمة:

في هذا الفصل سنتطرق إلى **أنظمة الأعداد**؛ وتعرف بأنها طرق تمثيل الأعداد وكتابتها، وهي: النظام العشري والنظام الثنائي والنظام الثماني والنظام الست عشري، والتحويل فيما بين هذه الأنظمة، كذلك سوف نتحدث عن بعض العمليات التي تتم على الأعداد الثنائية وهي المتممة الأولى والمتممة الثنائية والجمع والطرح.

وتستخدم هذه الأنظمة في الحاسوب الآلي، وتستطيع بعضها التحكم في عمل المسجلات Registers، فهي السبيل للكتابة أو القراءة من المسجلات وخاصة النظام السادس عشر.

2-1 أساس أنظمة الأعداد:

تقوم فكرة أي نظام عد على مبدأين أساسين هما: **أساس النظام Radix** (عدد صحيح موجب يعبر عن نظام العد) **وعدد رموز** هذا النظام، فالأساس:

X= 2 في النظام الثنائي،

= 8 في النظام الثماني،

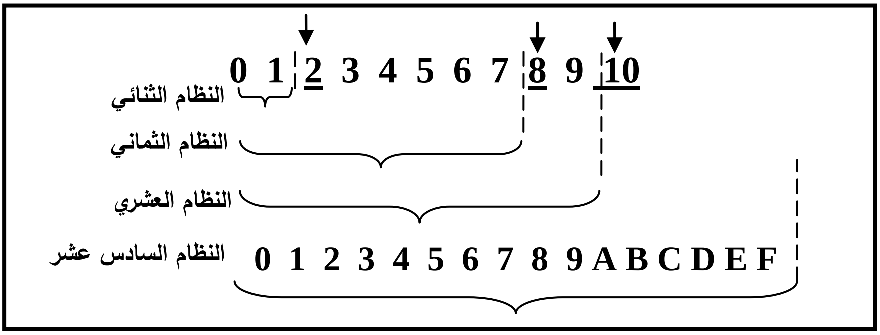
= 10 في النظام العشري،

= 16 في النظام السادس العشر.

$$(Y)_X \xleftarrow{\text{الأساس}}$$

ويأخذ Y عدد أو مجموعة من الأعداد والرموز حسب النظام، وبما ان أساس النظام الثنائي هو العدد (2)، فان هذا النظام يضم عددان فقط هما (0 و1)، وان أساس النظام الثماني هو العدد (8)، فان اكبر رقم في هذا النظام هو (7). وان أساس النظام العشري هو العدد (10)، فان اكبر رقم في هذا النظام هو (9). وان أساس النظام السادس عشر

هو العدد (16)، إذ أن هذا النظام يتكون من 15 رمز تتكون من تسعة أرقام أكبرها العدد (9) ومن ستة أحرف تكتب بصورة كبيرة هي (A→F). الشكل (1-1).



الشكل (1-1)

مثال (1): عين أنظمة الأعداد الأتية:

$(341)_{10}$: عشري (لان الأساس 10)

$(10)_2$: ثنائي (لان الأساس 2)

$(152)_8$: ثماني (لان الأساس 8).

وفيما يأتي شرح لكل نظام من أنظمة الأعداد.

3-1 **النظام العشري (Decimal System)**:

هو النظام العادي الذي نستخدمه في حياتنا اليومية وفي اغلب أمورنا، ويمثل الرقم (10) الأساس، ويتكون من الأرقام: **0 1 2 3 4 5 6 7 8 9**. وعدد مكونات النظام العشري هو عشرة أرقام، وهذا هو سبب تسميته بهذا الاسم إذ انه يكبر بعد كل عشرة أرقام(*).

(*) توضيح بسيط:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 →11

عند الانتهاء من الأرقام (أخرها الرقم 9) رجعنا للرقم الأول وهو صفر وأضفنا واحد بجواره، ولو واصلنا العد لوصلنا إلى 19 وثم نرجع الرقم 9 إلى صفر ونضيف واحد إلى الرقم 1 فيصبح الرقم 20 وهكذا.

4-1 **النظام الثنائي (Binary System):**

هو نظام يعتمد على أول رقمين في العد وهم (0 و1)، وكما ذكرنا سابقاً فان الأساس هذا النظام هو العدد (2)، ويكون العد كالآتي:

$$(0000)_2 = (0)_{10}$$
$$(0001)_2 = (1)_{10}$$
$$(0010)_2 = (2)_{10}$$
$$(0011)_2 = (3)_{10}$$

$(0101)_2 = (4)_{10}$، وهكذا ...

1-4-1 **تحويل الأعداد من النظام العشري إلى النظام الثنائي:**

نستخدم الجدول الآتي للحصول على قيمة العدد بالنظام الثنائي من النظام العشري.

n	...	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	المرتبة	
	...	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0		
	...	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1		
الأعداد بالنظام الثنائي $(Y)_2$													0	
												1	1	الأعداد بالنظام العشري
											1	0	2	
											1	1	3	
										1	0	0	4	
										1	0	1	5	
										1	1	0	6	
										1	1	1	7	
									1	0	0	0	8	
									1	0	0	1	9	
									1	0	1	0	10	
								...					...	
								1	0	1	0	1	21	
													...	
							1	0	1	1	1	1	47	
...						...							...	
					1	1	0	1	1	1	0	0	200	
...						...							...	
			1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	521	
													...	
		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1024	

وهكذا إلى n من المراتب أو لأي قيمة لـ Y.

ملاحظة: الرقم الموجود ضع عنده الرقم (1) واذا كان غير موجود ضع عنده (0).

مثال (2): حول الأعداد الأتية إلى النظام العشري: $(1001)_2$، $(1001)_2$

ملاحظة: للتحويل من النظام الثنائي إلى النظام العشري يتم كالاتي:

– ضرب كل رقم من الأرقام في الأساس 2.

– رفع العدد (2) الذي يبدأ من (n-1) إلى (0) (هنا n=4)، أي بصورة عامة:

$$101010001\ldots01 = 1\times2^{n-1} + 0\times2^{n-2} + \ldots + 0\times2^{1} + 1\times2^{0}$$

a) العدد $(1001)_2$ مكتوب بالنظام الثنائي:

$$\begin{aligned} 1001 &= 1\times2^3 + 0\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0 \\ &= 1\times8 + 0\times4 + 0\times2 + 1\times1 \\ &= 8 + 0 + 0 + 1 \\ &= 9 \end{aligned}$$

$\therefore (1001)_2 = (9)_{10}$

b) العدد $(111)_2$

$$\begin{aligned} 111 &= 1\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 \\ &= 1\times4 + 1\times2 + 1\times1 \\ &= 4 + 2 + 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

$\therefore (111)_2 = (7)_{10}$

مثال (3): حول الأعداد الأتية إلى ما يقابلها بالنظام الثنائي:

$(500)_{10}$، $(138)_{10}$، $(35)_{10}$، $(17)_{10}$

الحل:

$(17)_{10} \Rightarrow 17 = 16 + 1$

$\therefore (17)_{10} = (10001)_2$

$(35)_{10} \Rightarrow 35 = 32 + 2 + 1$

$\therefore (35)_{10} = (100011)_2$

$(138)_{10} \Rightarrow 138 = 128 + 8 + 2$

$\therefore (138)_{10} = (10001010)_2$

$(500)_{10} \Rightarrow 500 = 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 4$

$\therefore (500)_{10} = (111110100)_2$

طريقة أخرى: نقوم بقسمة العدد على 2 وتسجيل الباقي (أما 1 أو 0). ونستمر بالقسمة على 2 إلى أن يصبح الناتج 1 وهذا لا يقبل القسمة على 2 فيحول إلى جانب الباقي، كما في الأمثلة الأتية.

مثال (4): $(35.375)_{10}$, $(41)_{10}$, $(35)_{10}$, $(13)_{10}$, $(59)_{10}$.

a) $(59)_{10} = (?)_2$

2	
59	
29	1
14	1
7	0
3	1
1	1
0	1

$\therefore (59)_{10} = (111011)_2$

تم تحويل العدد 59 من النظام العشري إلى الثنائي والطريقة هي القسمة على أساس النظام المحول اليه. إذ تم قسمة العدد 59 على أساس النظام المحول اليه وهو العدد 2 وكان ناتج عملية القسمة =29.5.

وهنا المطلوب عدد صحيح بدون كسور نقوم بعد ذلك بضرب العدد الكسري الناتج من عملية القسمة وهو العدد 0.5 في أساس النظام المحول اليه وهو العدد 2 وناتج عملية الضرب هو العدد 1 سوف يكون باقي عملية القسمة ويكتب في الطرف الثاني على يمين الأعداد ثم نقوم بقسمة ناتج عملية القسمة الأول 29 على 2 وهكذا مع باقي نواتج عملية القسمة إلى ان يكون ناتج القسمة يساوي 0 والباقي يساوي 1 (باقي عمليات القسمة) والعدد (111011) يمثل العدد 59 في النظام العشري.

ملاحظات: لابد مراعاة الخطوات الأتية أثناء عملية التحويل:

1- لو كان ناتج عملية القسمة عدد صحيح بدون كسر كما في المثال السابق.

$14/2 = 7$

ولا يوجد باقي أي يساوي 0.

2- عند كتابة ناتج عملية التحويل يكتب العدد من الأسفل إلى الأعلى.

b) $\mathbf{(13)_{10} = (?)_2}$

2	13	الباقي
2	6	1
2	3	0
2	1	1
	0	1

$\therefore (13)_{10} = (1101)_2$

c) $\mathbf{\therefore (35)_{10} = (?)_2}$

2	35	الباقي
2	17	1
2	8	1
2	4	0
2	2	0
2	1	0
	0	1

$\therefore (35)_{10} = (100011)_2$ **(يطابق الحل السابق)**

d) $\mathbf{(41)_{10} = (?)_2}$

2	41	الباقي
2	20	1
2	10	0
2	5	0
2	2	1
2	1	0
	0	1

$\therefore (41)_{10} = (101001)_2$

e) $\mathbf{(35.375)_{10} = (?)_2}$

العدد مكون من جزئيين: صحيح وكسري، وعند عملية التحويل إلى الثنائي نعامل كل جزء لوحده.

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{2} \\ 35 & \\ 17 & 1 \\ 8 & 1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$$

$$0.375x2 = 0.75 \rightarrow 0$$
$$0.75x2 = 1.5 \rightarrow 1$$
$$0.5x2 = 1 \rightarrow 1$$
$$(0.011)$$

$\therefore (35.375)_{10} = (100011.011)_2$

تمرين (1): حول الأعداد الأتية إلى ما يقابلها بالنظام الثنائي:

$(117)_{10}$ ،$(335)_{10}$ ،$(1138)_{10}$ ،$(2113)_{10}$ ،$(5211)_{10}$

<u>1-4-2 العمليات الحسابية في النظام الثنائي:</u>

A) **عملية الجمع Addition:** تتم باعتماد الأسس الأتية:

$$\begin{array}{r} 0 \\ +\ 0 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ +\ 1 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ +\ 0 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ +\ 1 \\ \hline 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ +\ \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{11} \end{array}$$

ملاحظة: لاحظ ان: a) $(1 + 1 = 10)$ أي 2 بالنظام الثنائي.

b) $(1+1+1= 11)$ أي 3.

مثال (5): الأمثلة على عملية جمع العددين:

1) $\begin{array}{r} (1001)_2 \\ +\ (110)_2 \\ \hline (1111)_2 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} (10011)_2 \\ +\ (101)_2 \\ \hline (11000)_2 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} (1011)_2 \\ +\ (11)_2 \\ \hline (1110)_2 \end{array}$

4) $\begin{array}{r} (110)_2 \\ +\underline{(100)_2} \\ (1010)_2 \end{array}$ 5) $\begin{array}{r} {}^{1\ 1} \\ (111)_2 \\ \underline{(11)_2} \\ (1010)_2 \end{array}$ 6) $\begin{array}{r} (100)_2 \\ \underline{+ (10)_2} \\ (110)_2 \end{array}$ 7) $\begin{array}{r} {}^{1} \\ (11)_2 \\ \underline{+(11)_2} \\ (110)_2 \end{array}$

B) **عملية الطرح Subtraction**: تتم باعتماد الأسس الأتية:

$\begin{array}{r} 1 \\ \underline{-\ 1} \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 0 \\ \underline{-\ 0} \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \\ \underline{-\ 0} \\ 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 0 \\ \underline{-\ 1} \end{array}$ غير ممكن $\begin{array}{r} 10 \\ \underline{-\ 1} \\ 1 \end{array}$

ملاحظة: ان عملية (0-1) لا يمكن أجراؤها، لهذا نستعير 1 من الرتبة المجاورة، إذ ان المرتبة التالية هي المرتبة (الثانية) وعندما يتم نقلها للمرتبة الأولى تصبح (10) ويبقى صفر في مكانها الأصلي.

مثال (6): الأمثلة على عملية طرح العددين:

1) $\begin{array}{r} 101 \\ \underline{-\quad 11} \\ 10 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 100 \\ \underline{-\quad 1} \\ 11 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 100101 \\ \underline{-\quad 1011} \\ 11010 \end{array}$

ملاحظة: يمكن تحويل العددين إلى **النظام العشري** ثم يتم طرحهما، بعد ذلك يحول الناتج إلى النظام الثنائي. مثلاً في المثال (5) فقرة 2 نلاحظ أن العدد $(100)_2 = (4)_{10}$، والعدد $(1)_2 = (1)_{10}$. إذ 4-1 =3 بالنظام العشري أي ان الناتج بالنظام الثنائي هو (11).

مثال (7):

$\begin{array}{r} {}^{10} \\ 1\cancel{1}\cancel{0} \\ \underline{-101} \\ 001 \end{array}$ $\begin{array}{r} {}^{10} \\ 1\cancel{0}1 \\ \underline{-011} \\ 010 \end{array}$ $\begin{array}{r} 11 \\ \underline{-10} \\ 01 \end{array}$ $\begin{array}{r} 11 \\ \underline{-01} \\ 10 \end{array}$

تمرين (2): جد نواتج العمليات الأتية؟

(1) $\begin{array}{r} (1000)_2 \\ -\quad (11)_2 \\ \hline \end{array}$ (2) $\begin{array}{r} 11011 \\ 0111 \\ +\ 100 \\ \hline \end{array}$ (3) $\begin{array}{r} 11011 \\ 101 \\ -\ 11 \\ \hline \end{array}$ (4) $\begin{array}{r} 1000 \\ +\ 101 \\ -\ 1101 \\ \hline \end{array}$

C) عملية الضرب Multiplication: تتم باعتماد الأسس الأتية:

0 x 0 = 0
0 x 1 = 0
1 x 0 = 0
1 x 1 = 1

مثال (8):

1) $\begin{array}{r} 11 \\ \times\ 11 \\ \hline 11 \\ +\ 11\ \\ \hline 1001 \end{array}$ **2)** $\begin{array}{r} 111 \\ \times\ 101 \\ \hline 111 \\ +\ 000\ \\ 111\ \ \\ \hline 100011 \end{array}$

3-4-1 الكسور الثنائية (Binary Fractions):

إذا أردنا تحويل عدد كسري من النظام الثنائي للنظام العشري. بالنسبة للعدد الصحيح يعامل كما مر سابقاً، لكن الأرقام بعد الفارزة فيتم استخدام الإشارة السالبة مع الأس.

مثال (9): سيتم حل هذا المثال بعدد أساليب.

a) $(101.11)_2 = (?)_{10}$

	1	0	1	.	1	1		
…	$(2)_2$	$(1)_2$	$(0)_2$	.	$(-1)_2$	$(-2)_2$	…	الرتبة

$101.11 = 1\times2^2+0\times2^1+1\times2^1+1\times2^{-1}+1\times2^{-2}$
$= 4+0+1 \qquad + 0.5 + 0.25$
$= 5 \qquad + 0.75$
$\therefore (101.11)_2 = (5.75)_{10}$

ملاحظة: الخط (تحت الجزء الصحيح من العدد) والخط المزدوج (تحت الجزء الكسري) للتوضيح ولا يوجد ضرورة وضعه عند الحل.

b) $(11001.011)_2$

4	3	2	1	0	-1	-2	-3
1	1	0	0	1	0	1	1

$=1x2^4 + 1x2^3 + 0x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0 + 0x2^{-1} + 1x2^{-2} + 1x2^{-3}$

$= 1x16 + 1x8 + 1x1 + ¼ + 1/8 = 25.625$

$\therefore (11001.011)_2 = (25.625)_{10}$

c) $(1111.101)_2$

$\underline{1111}.\underline{\underline{101}} = \underline{1\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0} + \underline{\underline{1\times2^{-1}+0\times2^{-2}+1\times2^{-3}}}$

$= \underline{8+4+2+1} \quad + \underline{\underline{0.5 + 0.0 + 0.125}}$

$= \underline{\ 15\ } \quad + \underline{\underline{0.625}}$

$\therefore (\underline{1111}.\underline{\underline{101}})_2 = (\underline{15}.\underline{\underline{625}})_{10}$

مثال (10): حول الأعداد الكسرية العشرية الأتية إلى ما يقابلها في النظام الثنائي:

0.2 ،8.1875 ،0.25

ملاحظة: في هذه الحالة يتم ضرب الكسر العشري × الأساس الذي يراد التحويل اليه (وفي المثال الأساس 2) مع تسجيل العدد الصحيح الناتج من كل عملية إلى ان تصبح قيمة الكسر العشري **تساوي صفر**.

– كما في الحالة السابقة الجزء الصحيح (X) يقابله العدد الصحيح بعد التحويل (X')، وهكذا بالنسبة للجزء الكسري، أي: $(\underline{X}.\underline{\underline{Y}})_2 = (\underline{X'}.\underline{\underline{Y'}})_{10}$.

الحل:

1)

$$\begin{array}{r} 0.25 \\ \times\ \ 2 \\ \hline 0.5 \end{array}$$

العدد الصحيح هنا (0)

$$\begin{array}{r} 0.5 \\ \times\ \ 2 \\ \hline 1.00 \end{array}$$

⇐ العدد الصحيح 1 والكسر العشري صفر.

$\therefore (0.25)_{10} = (0.01)_2$

2) يتم أولاً تحويل الجزء الصحيح من العدد وكما مر سابقاً، أي:

$(8)_{10} = (1000)_2$

$0.1875 \times 2 = 0.3750$ العدد الصحيح هنا 0، $0.3750 \times 2 = 0.750 \Leftarrow$ العدد الصحيح 0

$0.75 \times 2 = 1.5 \Leftarrow$ العدد الصحيح (1)، $0.5 \times 2 = 1.00 \Leftarrow$ العدد الصحيح (1).

(نلاحظ انه عملية الضرب بـ2 فقط للجزء الكسري).

$\therefore (8.1875)_{10} = (1000.0011)_2$

(3

$0.2 \times 2 = 0.4$ العدد الصحيح هنا 0 $\Leftarrow$ $0.4 \times 2 = 0.8$ العدد الصحيح هنا 0

$\Leftarrow$ $0.8 \times 2 = 1.6$ العدد الصحيح هنا (1)، $\Leftarrow$ $0.6 \times 2 = 1.2$ العدد الصحيح هنا (1)

$\Leftarrow$ $0.2 \times 2 = 0.4$ نلاحظ إن الكسر أصبح دورياً، اي:

$\therefore (0.2)_{10} = (0.0011001100110011)_2$

4-4-1 العمليات على الأعداد الثنائية Operations on Binary Numbers:

1- المتممة الأولى One's Complement:

تتم هذه العملية بتغيير كل 0 إلى 1 والعكس على الرقم الثنائي بأكمله.

مثال (11): أوجد المتممة الأولى للأعداد الثنائية الأتية:

a) $(1100101001)_2$

الحل: المتممة الأولى للعدد الثنائي السابق = 0011010110

b) $(10000000000)_2$

الحل: المتممة الأولى للعدد الثنائي السابق = 01111111111

2- المتممة الثانية Two's Complement:

هذه العملية من اهم العمليات التي تتم على الأعداد الثنائية ومن خلالها نستطيع ان نقوم بعملية طرح الأعداد الثنائية وغيرها من العمليات. وتقوم المتممة الثانية بتحويل العدد السالب إلى عدد موجب والعكس وبالتالي نستطيع إجراء عملية الجمع على الأعداد الثنائية إذا قمنا بتحويلها إلى موجبة. ويتم إيجاد المتممة الثانية وذلك بأن توجد المتممة الأولى للعدد الثنائي ثم تجمع على المتممة الأولى الرقم 1.

مثال (12): أوجد المتممة الثانية للأعداد الثنائية الأتية:

a) $(1100101001)_2$

الحل: 1- توجد المتممة الأولى للعدد الثنائي السابق = 0011010110

2- نقوم بجمع الرقم 1 على المتممة الأولى للعدد الثنائي.

$$\begin{array}{r} 0011010110 \\ 1+ \\ \hline 0011010111 \end{array}$$

b) $(11110000000)_2$

الحل: المتممة الأولى = 00001111111

$$\begin{array}{r} 0000111111 \\ 1+ \\ \hline 0001000000 \end{array}$$

3- الجمع والطرح Adding & Subtraction:

تعد عملية الطرح في الأساس عملية جمع عدد موجب مع عدد سالب. في النظام الثنائي لا يمكن إجراء عملية الطرح مباشرة (كما في النظام العشري)، وإنما نقوم بتحويل عملية الطرح إلى جمع باستخدام المتممة الثانية.

مثال (13): جد ناتج عملية الطرح الأتية: 0100 – 1101

$$\begin{array}{r} 1101 \\ 0100- \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 1101 \\ 1100+ \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 1 \\ 1101 \\ 1100+ \\ \hline 11001 \end{array}$$

1101 – 0100 = + 1001

في هذا المثال تم إجراء عملية الطرح على العددين الثنائيين السابقين. العدد الأول 1101 موجب فيبقى كما هو، أما العدد الثاني 0100 سالب لذلك يتم إيجاد المتممة الثانية له = 1100 ثم بعد ذلك تجرى عملية الجمع.

ناتج عملية الجمع = 11001 ولكن يوجد به (Overflow) وذلك لان العدد الأول يمثل في 4 bit والعدد الثاني يمثل في 4 bit والناتج 5 bit ونحن نريد ان يتمثل الناتج في 4 bit لذلك نقوم بحذف أخر عدد في الناتج 1001 ونضع إشارة (+) أمام الناتج.

مثال (14): جد ناتج عملية الطرح الأتية: 1100 – 0110

$$\begin{array}{r} 0110 \\ 1100- \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 0110 \\ 0100+ \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 1 \\ 0110 \\ 0100+ \\ \hline 1010 \\ 0101 \\ 1\ + \\ \hline 0110 \end{array}$$

الناتج في هذا المثال لا يوجد به (Overflow) اي انه يتمثل في 4 bit مثل العددين لذلك نقوم بإيجاد المتممة الثانية للناتج 1010 يساوي 0110 ونضع أمام الناتج إشارة –. أي بمعنى أخر، إذا وجد في الناتج (Overflow) نحذف أخر عدد من الناتج ونضع إشارة +، إذا لم يوجد في الناتج (Overflow) نأتي بالمتممة الثانية للناتج ونضع (–).

5-1 النظام الثماني (Octal System):

أساس النظام هو (8)، ويتكون من ثمانية أعداد وهي (0-7)، وفيما يأتي جدولاً لقيمة المرتبة وقوتها في هذا النظام ومقارنتها بالنظامين العشري والثنائي:

المرتبة	1	2	3	4	5	6	7	...	n
	8^0	8^1	8^2	8^3	8^4	8^5	8^6	...	
	1	8	64	512	4096	262144	2097152	...	

الأعداد بالنظام		
العشري	الثنائي	الثماني
0	000	0
1	001	1
2	010	2
3	011	3
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7
8	1000	10
9	1001	11
10	1010	12

1-5-1 تحويل الأعداد من النظام الثماني إلى النظام العشري:

مثال (15):

a) $(120)_8 = (?)_{10}$

$$\begin{aligned} 120 &= 1\times8^2 + 2\times8^1 + 0\times8^0 \\ &= 1\times64 + 2\times8 + 0\times1 \\ &= 64 + 16 + 0 \\ &= 80 \end{aligned}$$

$\therefore (120)_8 = (80)_{10}$

b) $(1000)_8 = (512)_{10}$

$$\begin{aligned} 1000 &= 1\times8^3 + 0\times8^2 + 0\times8^1 + 0\times8^0 \\ &= 1\times512 + 0\times64 + 0\times8 + 0\times1 \\ &= 512 + 0 + 0 + 0 \\ &= 512 \end{aligned}$$

$\therefore (1000)_8 = (512)_{10}$

➢ تحويل الأعداد من النظام العشري إلى الثماني:

- نقسم العدد العشري على (8) ونسجل الباقي.
- نستمر بالقسمة على (8) إلى ان يصل الناتج إلى اقل من (8).

مثال (16):

a) $\mathbf{(153.6875)_{10}} = (?)_8$

8	
153	
19	1
2	3
0	2
(231)	

$0.6875 \times 8 = 5.5 \rightarrow 5$

$0.5 \times 8 = 4 \rightarrow 4$

(0.54)

$(153.6875)_{10} = (231.54)_8$

عند قسمة العدد (153) على 8 ينتج من عملية القسمة العدد (19.125) نأخذ الجزء الكسري من الناتج (0.125) ونضربه في أساس النظام المحول اليه 8 ينتج من عملية

الضرب 1 ويكون هذا العدد باقي أول عملية قسمة ثم نأخذ الجزء الصحيح وهو العدد (19) ونكرر معه الخطوات السابقة وتنتهي عملية التحويل عندما يكون ناتج القسمة هو 0 والباقي يساوي عدد صحيح.

b) $(1967)_{10} = =(?)_8$

8	1967	
8	245	7
8	30	5
8	3	6
	0	3

$(1967)_{10} = (3657)_8$

وللتأكد من ذلك:

$$3657 = 3\times8^3 + 6\times8^2 + 5\times8^1 + 7\times8^0$$
$$= 3\times512+6\times64 + 5\times8 + 7\times1$$
$$= 1536 + 384 + 40 + 7 = 1967$$

1-5-2 تحويل النظام الثنائي إلى الثماني:

– نجزئ العدد الثنائي (من جهة اليمين) إلى مجاميع كل مجموعة تحوي على ثلاثة أرقام، وكتابة ما يقابلها بالنظام الثماني.

مثال (17): حول $(1101011100011111)_2$ إلى النظام الثماني:

1101011100011111										
			001	101	011	100	011	111	⇐	ثنائي
			1	5	3	4	3	7		ثماني

$\therefore (1101011100011111)_2 = (153437)_8$

ملاحظة: نلاحظ تم أضافة 00 في الخلية الأخيرة فقط لجعل أرقام الخلية ثلاثة، وليس لها أي تأثير على الحل.

➢ **تحويل النظام الثماني إلى النظام الثنائي:**

– يتم عكس العملية السابقة، إذ نجزئ العدد الثماني (من جهة اليمين) إلى مجاميع كل مجموعة تحتوي على رقم واحد، وكتابة ما يقابلها بالنظام الثنائي وعلى هيئة ثلاث أرقام.

مثال (18): حول العدد $(14732)_8$ إلى النظام الثنائي:

14732									
		1	4	7	3	2			ثماني
		001	100	111	011	010	⇐		ثنائي

$\therefore (14732)_8 = (1100111011010)_2$

6-1 النظام السادس عشر (Hexadecimal System):

بعد الرقم 9 يأتي الرقم 10 هو رقم مركب من 0 و1 وهذا تكرار، لذا استخدمت الحروف فقط في النظام السادس لأن الأرقام لا تتكرر في الأنظمة الأخرى، إذ في النظام الثنائي 0 و1 الثماني 0، 1...7 والعشري 0، 1،...، 9 أما السادس عشر فلا يوجد أكثر من عشرة رموز مستقلة ومختلفة هي 0 - 9 فجاءت الحاجة إلى الأحرف الستة الباقية (A-F) للوصول إلى 16 رمز مختلف وتوسيع قاعدة العد. والأرقام الأحرف هي:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F

تكتب الأحرف Capital فقط وتقابل:

A = 10, B = 11, C = 12, D = 13,   E = 14, F = 15

n	...	7	6	5	4	3	2	1	المرتبة
	...	16^6	16^5	16^4	16^3	16^2	16^1	16^0	
		16777216	1048576	65536	4096	256	16	1	

الاعداد بالنظام			
السادس عشر	الثماني	الثنائي	العشري
0	0	0000	0
1	1	0001	1
2	2	0010	2
3	3	0011	3
4	4	0100	4
5	5	0101	5
6	6	0110	6
7	7	0111	7
8	10	1000	8
9	11	1001	9
A	12	1010	10
B	13	1011	11
C	14	1100	12
D	15	1101	13
E	16	1110	14
F	17	1111	15

1-6-1 تحويل النظام الثنائي إلى النظام السادس عشر وبالعكس:

مثال (19): لتحويل $(1101100111110101)_2$ إلى ما يقابله في النظام السادس عشر نقوم بتجزئته إلى مجاميع تحتوي كل منها **أربعة** مراتب، كما يأتي:

1101100111110101					
1101	1001	1111	0101	$\Leftarrow$	ثنائي
D	9	F	5	السادس عشري	

$\therefore (1101100111110101)_2 = (D9F5)_{16}$

ونفس الملاحظة السابقة إذا لم تكتمل الخلية الأخيرة بأربعة رموز نكملها بالأصفار.

وبالعكس، لتحويل $(3DA7)_{16}$ إلى النظام الثنائي:

3DA7					
3	D	A	7	السادس عشري	
0011	1101	1010	0111	$\Leftarrow$	ثنائي

و(00) الأخيرة لا يتم وضعها بالمقدار في الجواب الأخير وكالاتي:

$\therefore (3DA7)_{16} = (11110110100111)_2$

2-6-1 تحويل النظام السادس عشر إلى النظام الثماني وبالعكس:

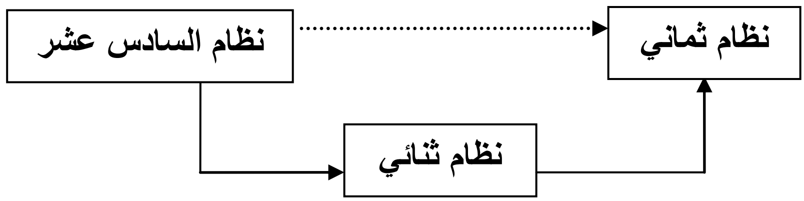
مثال (20): لتحويل $(5B)_{16}$ إلى ما يقابله في النظام الثماني.

– يحول أولاً إلى النظام الثنائي من ثم يحول إلى ما يقابله إلى النظام الثماني، كما في الخطوات الأتية:

5B				
	5	B		1- السادس عشري
	101	1011		2- ثنائي
1011011				الناتج
1	011	011		3- ثنائي
1	3	3		4- ثماني

$\therefore (5B)_{16} = (133)_8$

أي نلاحظ ان عملية التحويل: $(133)_8 \Rightarrow (1011011)_2 \Rightarrow (5B)_{16}$ أو بالعكس.



– بنفس الطريقة يحول النظام الثماني إلى النظام السادس عشر، أي:

$$(?)_8 \Rightarrow (?)_2 \Rightarrow (?)_{16}$$

3-6-1 تحويل النظام السادس عشر إلى النظام العشري وبالعكس:

مثال (21): $(A2D)_{16} \Rightarrow (?)_{10}$

$$\begin{aligned} A2D &= 10\times16^2 + 2\times16^1 + 13\times16^0 \\ &= 2560 + 32 + 13 \\ &= 2605 \end{aligned}$$

نلاحظ ان قيمة A=10 وD=13 عند تحويلها إلى نظام أخر، وهكذا مع بقية الأحرف.

$\therefore (A2D)_{16} = (2605)_{10}$

وللتحويل من **النظام العشري** إلى ما يقابله في **النظام السادس عشر** نتبع نفس الخطوات في حالة النظامين الثنائي والثماني لكن نقسم على (16).

مثال (22): حول العدد $(90)_{10}$ إلى نظيره بالنظام السادس عشر.

الحل:

القسمة $\frac{90}{16}$ تعطي 5 والباقي A يمين

القسمة $\frac{5}{16}$ تعطي 0 والباقي 5 يسار

$\therefore (90)_{10} = (5A)_{16}$

ملاحظة: يمكن ان نحول من النظام السادس عشر إلى النظام الثنائي من ثم إلى النظام العشري. والعكس صحيح (بالضبط مثل الطريقة المتبعة في تحويل النظام السادس عشر إلى النظام الثماني).

س: ما أهمية النظام الست عشري؟

يسهل التعامل مع الأعداد الكبيرة التي يصعب تمثيلها بالنظام الثنائي من قبل مستخدمي الحاسوب والمبرمجين.

مثال (23): تحويل من نظام (ثنائي، ثماني وسادس عشري) إلى نظام عشري:

1. $(11010.101)_2 = 1(2)^4+1(2)^3+ 0(2)^2+ 1(2)^1+ 0(2)^0+ 1(2)^{-1} + 0(2)^{-2}+ 1(2)^{-3} = 16+8+2+0.5+0.125 = (26.625)_{10}$

2. $(613.24)_8 = 6(8)^2 +1(8)^1+3(8)^0+2(8)^{-1} + 4(8)^{-2} = 384 + 8 + 3 + 0.25 + 0.0625 = (395.3125)_{10}$

3. $(5A.E)_{16} =5(16)^1+ A(16)^0+ E(16)^{-1} = 5(16)+10(16)+ 14(16)^{-1} = 80+10+0.875 = (90.875)_{10}$

مثال (24): تحويل من نظام عشري إلى نظام ثنائي:

1. $(353)_{10} = (?)_2$

		الباقي	
353	2	1	← يمين **LSB**
176	2	0	
88	2	0	
44	2	0	
22	2	0	
11	2	1	
5	2	1	
2	2	0	
1	2	1	← يسار **MSB**
0			

$(353)_{10} = (101100001)_2$

2. $(0.65625)_{10} = (?)_2$

$$
\begin{array}{rcl}
 & & 0.65625 \\
 & & \underline{\quad 2\ x} \\
\boxed{1} & \leftarrow & 1.31250
\end{array}
$$

أول مرتبه بعد الفارزة.

$$
\begin{array}{rcl}
 & & 0.31250 \\
 & & \underline{\quad 2\ x} \\
\boxed{0} & \leftarrow & 0.62500 \\
 & & \underline{\quad 2\ x} \\
\boxed{1} & \leftarrow & 1.250 \\
 & & \underline{\quad 2\ x} \\
\boxed{0} & \leftarrow & 0.50 \\
 & & \underline{\quad 2\ x} \\
\boxed{1} & \leftarrow & 1.0
\end{array}
$$

$(0.65625)_{10} = (0.10101)_2$

3. $(254.75)_{10} = (?)_8$

$$
\begin{array}{r|lcl}
 & & \text{الباقي} & \\
254 & 8 & 6 \rightarrow & \textbf{LSB} \\
31 & 8 & 7 & \\
3 & 8 & 3 & \\
0 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
 & & 0.75 \\
 & & \underline{\quad 8\ x} \\
\boxed{6} & \leftarrow & 6.00
\end{array}
$$

$(254.75)_{10} = (376.6)_8$

4. $(567.1875)_{10} = (?)_{16}$

$$
\begin{array}{r|lll}
567 & 16 & 7 \leftarrow & \textbf{LSB} \\
35 & 16 & 3 & \\
2 & 16 & 2 & \\
0 & & &
\end{array}
$$

0.1875

$$\begin{array}{r} 16\ x \\ \hline \boxed{3} \leftarrow \ 3.0000 \end{array}$$

$$(567.1875)_{10} = (237.3)_{16}$$

مثال (25): التحويل بين النظام الثنائي، والثماني والسادس عشري (طريقة سريعة):

1.

1	2	7	5	4	3	Octal
1 0 1 0 1 1 1 1 0 1 1 0 0 0 1 1						Binary
A	F	6	3			Hexadecimal

$= (44899)_{decimal}$

2.

2	1	4	4	3	5	Octal
1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1						Binary
1	1	9	1	D		Hexadecimal

مثال (26): الجمع في النظام السادس عشر Hexadecimal Addition

$$\begin{array}{r} 23 \\ +16 \\ \hline 39_H \end{array} \qquad \begin{array}{r} 58 \\ +22 \\ \hline 7A_H \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2B \\ +84 \\ \hline AF_H \end{array}$$

مثال (27):

$$\begin{array}{r} {}^{1}\ \ \ \\ D\ F \\ +A\ C \\ \hline 18\ B \end{array}$$

$F \rightarrow 15_D + 12_D = 27_D \rightarrow 27_D - 16_D = 11_D = B_H$ with 1 carry

$1 + 13_D + 10_D = 24_D \rightarrow 24_D - 16_D = 8_D = 8_H$ with 1 carry

مثال (28): الجمع في النظام الثماني Octal Addition.

1-
$$\begin{array}{r} 14 \\ +23 \\ \hline 37_8 \end{array}$$

2-
```
  3 7
  5 3
 11 2
```
$7_O + 3_O = 10_D - 8_D = 2_D = 2_O$ + 1   carry

$1 + 3_O + 5_O = 9_D - 8_D = 1_D = 1_O$ + 1 carry

مثال (29): المتممة في النظام الثماني: 7777_8-2415_8

ملاحظة:

7´s = 7 – each digit
8´s = 7´s + 1

الحل:

```
  7777
- 2415
  5362     متممة الـ7
    +1
  5363     متممة الـ8
```

مثال (30): جد ناتج 3142_8- 7526_8 باستخدام متممة النظام الثماني.

```
 7777
-3142
```

4635 + 1=4636

```
  1  1
  7526
+ 4636
```
12 – 8 = 4

11 - 8 = 3

12 - 8 = 4

= 14364

4-6-1 المتممة Complements في النظام السادس عشر

مثال (31): جد متممة 15 و16 لـ$(1FAD)_{16}$.

15	15	15	15	
- 1	F	A	D	
E	0	5	2	← 15´s comp.
			1 +	
E	0	5	3	← 16´s comp.

مثال (32): جد الناتج باستخدام متممة النظام السادس عشر.

a) ABED – 1FAD

$$
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1\ 1\ \ } \\
A\ B\ E\ D \\
+\ E\ 0\ 5\ 3 \\
\hline
1\ \ 8\ C\ 4\ 0
\end{array}
$$

$16 - 16 = 0$

$20 - 16 = 4$

$24 - 16 = 8$

الجواب: 1 8C40

b) $FEED_{16} - DAF3_{16} = ?$

الجواب: $23FA_{16}$

أمثلة متنوعة (33):

1- $(1011)_2 = 1x\ 2^0 + 1x\ 2^1 + 0x\ 2^2 + 1x\ 2^3$
$= 1 + 2 + 0 + 8$
$= (11)_{10}$

2- $(110.1)_2 = 0x\ 2^0 + 1x\ 2^1 + 1x\ 2^2 + 1x\ 2^{-1}$
$= 0 + 2 + 4 + 0.5$
$= (6.5)_{10}$

3- $(1100.101)_2 = 0\times2^0 + 0x2^1 + 1x2^2 + 1x2^3 + 1x2^{-1} + 0x2^{-2} + 1x2^{-3}$
$= 0 + 0 + 4 + 8 + 0.5 + 0 + 0.125$
$= (12.625)_{10}$

4- $(752)_8 = 7x\ 8^0 + 5x\ 8^1 + 2x\ 8^2$
$= 7 + 40 + 448$
$= (490)_{10}$

5- $(ABC)_{16} = 12x\ 16^0 + 11x\ 16^1 + 10x\ 16^2$
$= 12 + 176 + 2560$
$= (2748)_{10}$

6- $(2F.8)_{16} = 15x\ 16^{0} + 2x\ 16^{1} + 8x\ 16^{-1}$
$= 15 + 32 + 0.5$
$= (47.5)_{10}$

7- $(62.7)_8 = (110010.111)_2$

8- $(35.41)_8 = (011101.100001)_2$

9- $(00101110.1010)_2 = (2E.A)_{16}$

10- $(1111100.01011011)_2 = (FC.5B)_{16}$

11 - $(AB.6D)_{16} = (10101011.01101101)_2$

12- $(9C.8F3)_{16} = (10011100.100011110011)_2$

مثال (34): حول العدد العشري $(125.34375)_{10}$ إلى النظام الست عشري.

16	
125	
7	13
0	7
(7D)	

$0.34375 \times 16 = 5.5 \rightarrow 5$
$0.5 \times 16 = 8 \rightarrow 8$
(0.58)

$\therefore (125.34375)_{10} = (7D.58)_{16}$

مثال (35): حول العدد الثنائي إلى النظام الثماني:

1) $(10011101110)_2$

010	011	101	110
2	3	5	6

$\therefore (10011101110)_2 = (2356)_8$

2) $(0101111)_2$

010	111	100
2	3	4

$\therefore (0101111)_2 = (234)_8$

3) $(11001.01)_2$

011	001	010
3	1	2

$\therefore (11001.01)_2 = (31.2)$

تمارين الفصل الأول

1) حول الاتي:

a) $(43)_{10} \rightarrow (\ \ )_2$

b) $(0.375)_{10} \rightarrow (\ \ )_2$

c) $(2048.0625)_{10} \rightarrow (\ \ )_2$

d) $(0.0011011)_2 \rightarrow (\ \ )_{10}$

e) $(75102.72)_8 \rightarrow (\ \ )_{10}$

f) $(1101010.011)_{10} \rightarrow (\ \ )_{16}$

g) $(5FF3.A1)_{16} \rightarrow (\ \ )_8$

2) باستخدام متممة النظام الثماني، جد:

$(545)_8 - (14)_8 = ?$

$(6776)_8 - (4337)_8 = ?$

3) باستخدام متممة النظام السادس عشر، جد:

$(98A\ E)_{16} - (1FEE)_{16} = ?$

4) جد نواتج:

a) $(7152)_8 - (1010)_2 = (\ \ )_{10}$

b) $(1039)_{10} - (3E4B)_{16} = (\ \ )_8$

c) $(6022)_{10} - (4352)_{10} = (\ \ )_2$

الفصل الثاني

الجبر البوليني

Boolean Algebra

الفصل الثاني

الجبر البوليبيني Boolean Algebra

2-1 مقدمة:

سمي **الجبر البوليبيني** (Boolean Algebra)، نسبة إلى الإنجليزي جورج بوليين (1815–1864م) وهو عالم منطق ورياضيات، وهي طريقة رياضيّة تُستعمل لحلِّ مسائل المنطق والاحتمالات الهندسية، ويعتبر الجبر البوليبيني أحد المرتكزات الأساسية المستخدمة في تصميم وتركيب الحاسوب. ويعود الفضل في وضع الأسس النظرية للجبر البوليبيني، والذي يسمى أيضاً بالجبر المنطقي للعالم بوليين. وقد نشر هذا العالم نظرياته في منتصف القرن التاسع عشر لتصبح فيما بعد الأساس في تصميم الدوائر المنطقية التي يتكون منها الحاسوب. وقام بوليين بنشر كتابة "استقراء قوانين التفكير" في 1854 الذي وضع فيه وفي أعماله اللاحقة أسس الجبر المنطقي الذي يعد لبنة هامة في تصميم العمليات المنطقية للحاسوب الحديث.

وقد طوّر بول طريقة لتكوين العبارات المنطقيّة بالرموز. ويمكن كتابة هذه العبارات وإثباتها بطريقة مماثلة للطريقة المستعملة في الجبر العادي. ويستعمل الجبر المنطقي أيضاً في المسائل الهندسية مثل تصميم دوائر المفاتيح الكهربائية، وبخاصة الدوائر التي تؤدي عمليات حسابية في الآلات الحاسبة والحواسيب. ويتناول الجبر البوليني العلاقات بين المجموعات (مجموعات الأفكار أو الأشياء). مثال مجموعات الأرقام الأقل من مائة؛ فاكهة حمراء اللون؛ ... . وفي الجبر البوليني يتم التمثيل لهذه المجموعات بالحروف a, b c وهكذا. وتتبع ثلاث من العمليات البولينية قوانين مشابهة لقوانين الجبر العادية. ورموز هذه العمليات هي ∩ ,∪ (تقاطع أو اتحاد). فمثلاً العملية a∪b تمثل مجموعة العناصر الموجودة في كلتا المجموعتين a وb.

2-2 العمليات البولينية الأساسية:

1. عملية "**و**" (**AND** Operation).
2. عملية "**أو**" (**OR** Operation).
3. عملية "**لا**" (**NOT** Operation).

تسمى العمليتان الأولى والثانية **عمليتان ثنائيتان (Binary Operations)** لأن كلاً منها تحتاج إلى متغيرين على الأقل، بينما تسمى عملية "لا" NOT **عملية أحادية** لأن لها متغيراً واحداً أو مدخلاً واحداً فقط، ويمكن استخدام الإشارات الجبرية التالية لتمثيل العمليات الأساسية. مع الافتراض أن المتغيرات هي X ،Y.

هذا ويمكن وصف العمليتين "و"، "أو" بأكثر من متغيرين ولكننا في معظم الحالات سنتكلم عنهما مستخدمين فقط متغيرين للتسهيل ليس إلا. وبالتعبير عن هذه العمليات بالنظام الثنائي باعتبار أن الرقم "1" يمثل الحالة الصحيحة والرقم "0" يمثل الحالة الخاطئة فيمكن تعريف هذه العمليات كما يأتي:

عملية AND	$X \cdot Y = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$	إذا كان كل من X و Y يساوي 1 إذا كان كل من X و / أو Y يساوي 0
عملية OR	$X + Y = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$	إذا كان كل من X و Y يساوي 1 إذا كان كل من X و / أو Y يساوي 0
عملية NOT	$\overline{X} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$	إذا كان X=0 إذا كان X=1

تستخدم عادة جداول لوصف العمليات المنطقية تسمى **جداول الحقيقة أو الصواب Truth Tables**، إذ تحتوي على كل الحالات التي تقع فيها المتغيرات وعلى ناتج العملية لكل حالة. من السهل ملاحظة أنه إذا كان عدد المتغيرات يساوي n فإن عدد الحالات الممكنة هي 2^n. وجدول العملية "و" ذات المتغيرين موضحة في الجدول (1−2).

الجدول (2-1) جدول الحقيقة لعملية "و" AND

X	Y	F = X.Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

أي أن تكون في الحالة الصحيحة فقط إذا كانت جميع المتغيرات في الحالة الصحيحة.

الجدول (2-2) يبين عملية "أو" ذات المتغيرين.

الجدول (2-2) جدول الحقيقة لعملية "أو" OR

X	Y	F = X+Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

أي أن عملية "أو" OR تكون في الحالة الصحيحة إذا كان أي من متغيراتها في الحالة الصحيحة وتكون في الحالة الخاطئة إذا كانت كل متغيراتها في الحالة الخاطئة. الجدول (2-3) يبين عملية "لا" NOT.

الجدول (2-3) جدول الحقيقة لعملية "لا" NOT

X	$F = \overline{X}$
0	1
1	0

2-3 البوابات المنطقية (Logic Gates):

هي دائرة إلكترونية بسيطة تقوم بعملية منطقية على مدخل واحد أو أكثر وتنتج مخرجاً منطقياً واحداً، وتستخدم في بناء معالجات الأجهزة الالكترونية والحواسيب. لأن مخرج البوابة الرقمية هو أيضاً قيمة منطقية، فإنه يمكن استخدام مخرج أحد البوابات المنطقية كمدخل لبوابة أخرى. المنطق المستخدم غالباً هو المنطق البوليني (Boolean logic)، وهو المنطق الذي يعمل في الدوائر الرقمية. يتم صناعة الدائرة الالكترونية للبوابة الرقمية

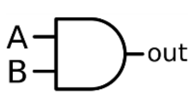
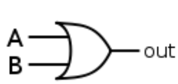
باستخدام دايودات وترانزستور، ولكن يمكن أيضاً بناؤها من مبدّلات إلكترونية، إشارات ضوئية، جزيئات، وحتى من أجزاء ميكانيكية.

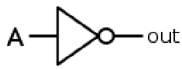
الدوائر المنطقية عبارة عن هياكل مصممة من عدد من الدوائر الأولية تسمى **بوابات منطقية**، وكل واحد من هذه الدوائر المنطقية يمكن النظر إليها كماكينة L تحتوي على جهاز أو أكثر للإدخال وجهاز إخراج واحد فقط، وفي أي لحظة يستطيع كل جهاز إدخال في L استيعاب وحدة أساسية واحدة من المعلومات هي 0 أو 1 ثم تعالج هذه البيانات بالدائرة لإعطاء ناتج هو 0 أو 1 على جهاز الإخراج، وبالتالي يمكن تخصيص سلسلة من الأصفار 0 أو الوحدات 1، إذ تعالج L وحدة أساسية في كل مرة.

2-4 أنواع البوابات المنطقية:

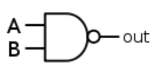
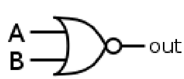
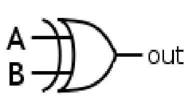
الجدول (2-4) يبين أنواع البوابات المنطقية والرموز القياسية المعبرة عنها:

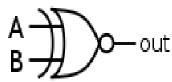
الجدول (2-4)

<table>
<tr><th>نوع</th><th>شكل مميز</th><th>الجبر البوليني بين B, A</th><th>جدول</th></tr>
<tr><td>AND</td><td></td><td>A.B</td><td><table><tr><th colspan="2">مدخل</th><th>مخرج</th></tr><tr><td>A</td><td>B</td><td>A AND B</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>OR</td><td></td><td>A+B</td><td><table><tr><th colspan="2">مدخل</th><th>مخرج</th></tr><tr><td>A</td><td>B</td><td>A OR B</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td><table><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>NOT</td><td></td><td>$\overline{A}$</td><td><table><tr><td>مدخل</td><td>مخرج</td></tr><tr><td>A</td><td>NOT A</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
</table>

في الإلكترونيات، غالباً ما تسمى بوابة NOT بالعاكس (Inverter). الدائرة المرسومة أمام البوابة تدعى الفقاعة (Bubble). وترسم الفقاعة أحياناً أمام أي دائرة منطقية لبيان أنّها معكوسة.

<table>
<tr><td>NAND</td><td></td><td>$\overline{A.B}$</td><td><table><tr><th colspan="2">INPUT</th><th>OUTPUT</th></tr><tr><td>A</td><td>B</td><td>A NAND B</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>NOR</td><td></td><td>$\overline{A+B}$</td><td><table><tr><th colspan="2">INPUT</th><th>OUTPUT</th></tr><tr><td>A</td><td>B</td><td>A NOR B</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>XOR</td><td></td><td>$A \oplus B$</td><td><table><tr><th colspan="2">INPUT</th><th>OUTPUT</th></tr><tr><td>A</td><td>B</td><td>A XOR B</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
</table>

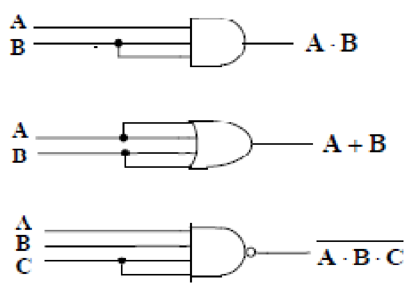
<table>
<tr>
<td>XNOR</td>
<td>
</td>
<td>$\overline{A \oplus B}$</td>
<td>
<table>
<tr><th colspan="2">INPUT</th><th>OUTPUT</th></tr>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>A XNOR B</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

2-4-1 تغير عدد اطراف الدخل (Fan-In) للبوابة المنطقية:

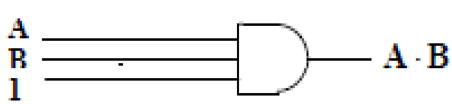
في كثير من الاحيان قد يتوفر بوابات منطقية بعدد من اطراف الدخل (Fan-In) اكبر أو اقل مما يحتاج اليه. وفي هذه الفقرة سنبين الاساليب المختلفة التي يمكن اتباعها لتغيير عدد اطراف الدخل للبوابة المنطقية بالزيادة أو بالنقصان.

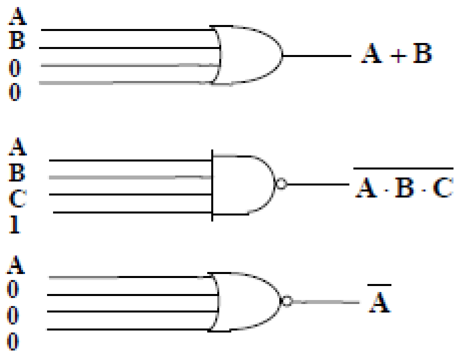
- تقليل عدد اطراف الدخل:

يتم ذلك بربط طرف الدخل الزائد بأحد اطراف الدخل المستخدمة، مثلاً:



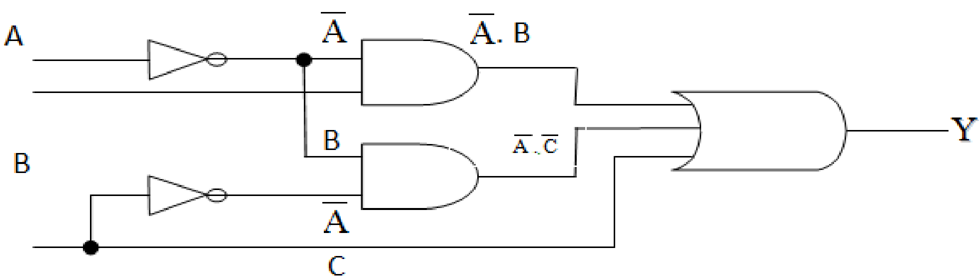
في الحالة الأولى أُستخدم بوابة AND بثلاثة مداخل كبوابة AND بمدخلين، وذلك بالتخلص من طرف الدخل الثالث غير المرغوب فيه بربطه باحد اطراف الدخل. وفي الحالة الثانية استخدم بوابة OR بأربعة مداخل كبوابة OR بمدخلين. كما يمكن التخلص من طرف الدخل الزائد بوضع القيمة المنطقية 1 في طرف الدخل الزائد في بوابات AND وNAND، ووضع القيمة المنطقية 0 في طرف الدخل الزائد في بوابات OR وNOR، مثلاً:





2-4-2 الدوائر المنطقية المركبة البسيطة:

مثال (1): للدائرة الموضحة في الشكل الاتي، أوجد التعبير البوليبني وجدول الحقيقة لها:



الخرج عند:

$$Y = (\overline{A}\,.\,B) + (\overline{A}\,.\overline{C}\,) + C$$

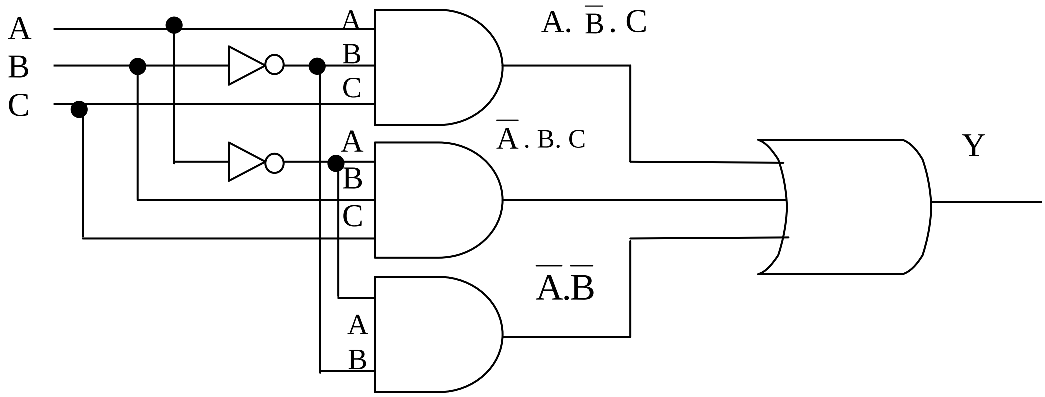
وجدول الحقيقة:

A	B	C	$\overline{A}$. B	$\overline{A}$. $\overline{C}$	Y
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1

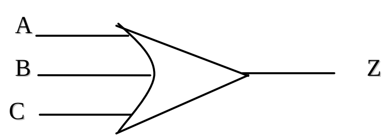
مثال (2): ارسم الدائرة التي تنفذ الصيغة البولينية الأتية:

$$Y = (A.\overline{B}.C) + (\overline{A}.B.C) + (\overline{A}.\overline{B})$$

الحل:

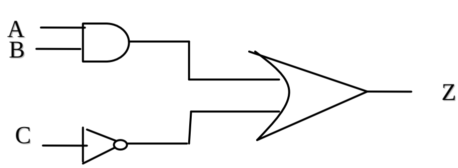


مثال (3): صف جدول الحقيقة لبوابة OR ذات ثلاثة مدخلات:



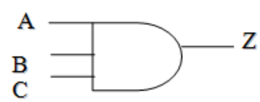
ABC	Z
000	0
001	1
010	1
011	1
100	1
101	1
110	1
111	1

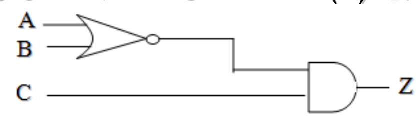
مثال (4): صف جدول الحقيقة للدائرة المنطقية الأتية:

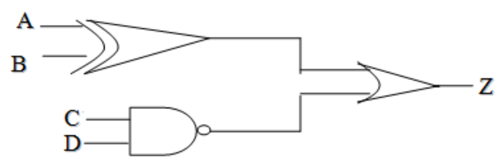


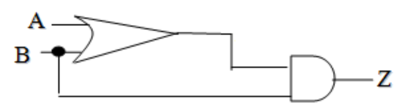
ABC	Z
000	1
001	0
010	1
011	0
100	1
101	0
110	1
111	1

تمرين (1): صف جدول الحقيقة للدوائر المنطقية الأتية:

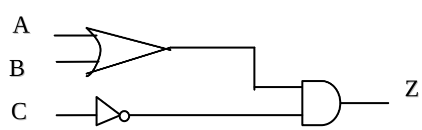






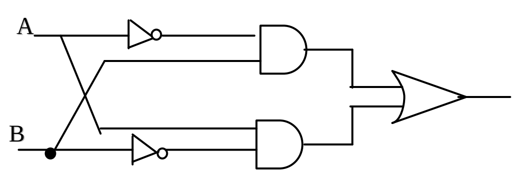


مثال (5): اكتب الصيغة البولينية للدائرة المنطقية الأتية:



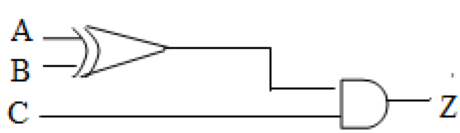
$$Z = (A + B).\overline{C}$$

مثال (6): اكتب الصيغة البوليينية للدائرة المنطقية الأتية:



$$Z = \overline{A}B + A\overline{B} = A \oplus B$$

مثال (7): اكتب الصيغة البوليينية للدائرة المنطقية الأتية:

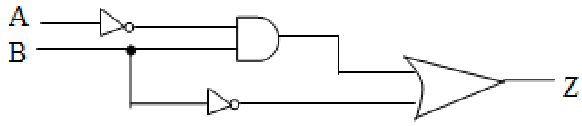


$$Z = (A \oplus B).C$$

مثال (8): كون دائرة منطقية للصيغة البوليينية الأتية:

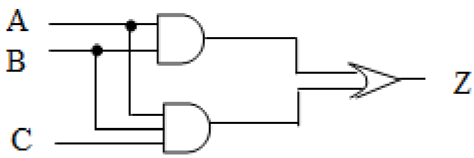
$$Z = \overline{A}.B + \overline{B}$$

نحتاج إلى بوابة AND عدد 2، وبوابة OR عدد 2، و2 عاكس (2-inverters).



مثال (9): كون الدائرة المنطقية واكتب جدول الحقيقة للصيغة الأتية:

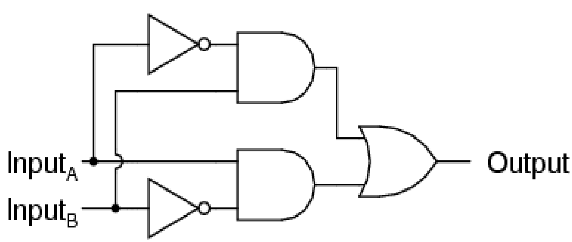
$Z = AB+ABC$



ABC	Z
000	0
001	0
010	0
011	0
100	0
101	1
110	0
111	1

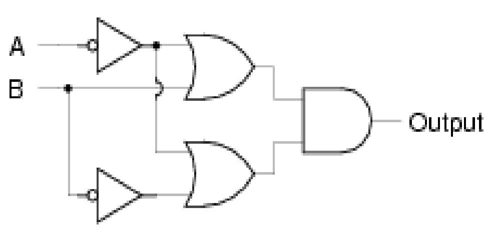
مثال (10): اكتب جدول الحقيقة للدوائر المنطقية الاتية:

a)



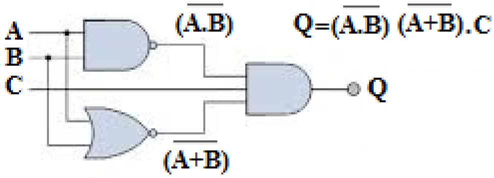
A	B	Output
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

b)



A	B	Output
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

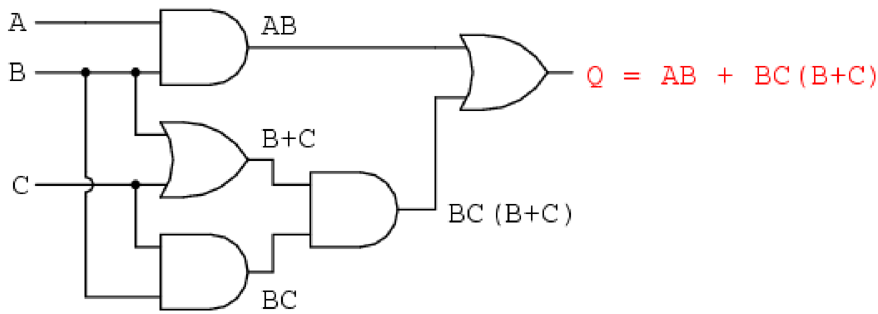
c)



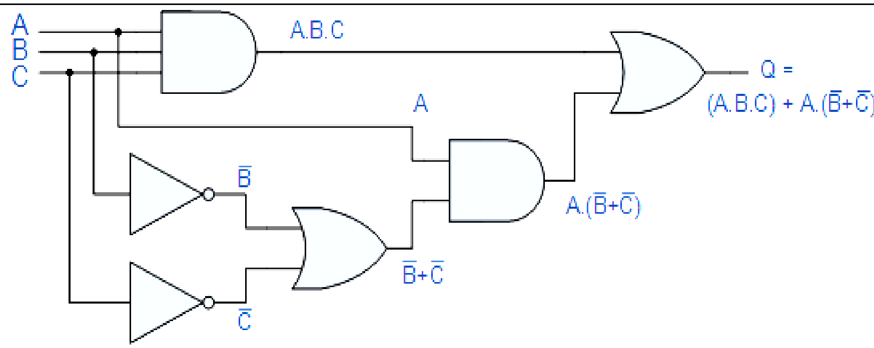
C	B	A	Q
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
			0

مثال (11): اكتب الصيغة المنطقية للدوائر المنطقية الاتية:

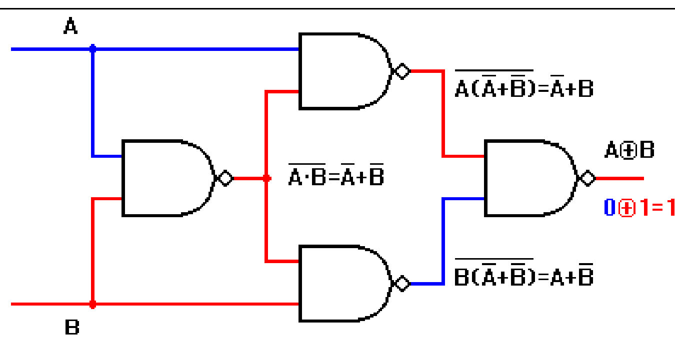
a)

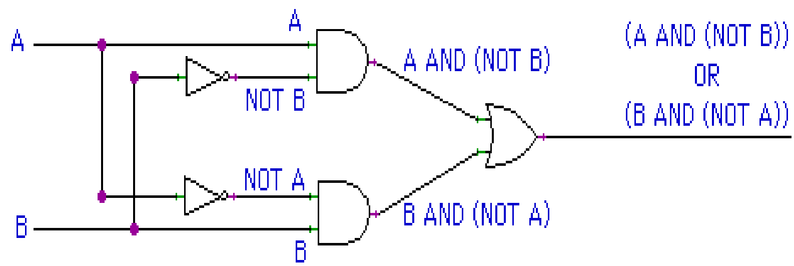


b)



c)



d)	

5-2 قوانين الجبر البوليني:

اشتقت من العمليات الأساسية الثلاثة مجموعة قوانين هامة جداً في عمل الدوائر المنطقية، وفيما يأتي ملخص لهذه القوانين:

(1) قانون الانفراد (Uniqueness) للمتغير البوليني:

– إذا كانت $X= 1$ فان $X\neq 0$

– إذا كانت $X= 0$ فان $X \neq 1$

(2) قانون عمليات "الصفر":

$X + 0 =X$

$X . 0 =0$

– إثبات القانون:

بما أن X متغير ثنائي فإن له حالتين إما الصفر أو الواحد.

ففي حالة كون $X= 0$ فأن:

0 = 0 OR 0

0 = 0 AND 0

وفي حالة $X=1$ فأن:

1= 0 OR 1

1 = 1 AND 1

يبين الجدول (2–5) أثبات قانون (2).

الجدول (2–5)

X	X+0	X.1
0	0	0
1	1	1

(3) قانون عمليات "الواحد":

- $X + 1 = 1$
- $X . 1 = X$

(4) قانون عمليات النفي (Complementation):

- $x + \overline{x} = 1$
- $x.\overline{x} = 0$

جدول (2–6) يوضح إثبات هذا القانون.

الجدول (2–6)

X	$\overline{X}$	$X + \overline{X}$	$X.\overline{X}$
0	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**0**

(5) قانون النفي المزدوج (Double Negation)

$\overline{\overline{X}} = X$

(6) قانون التشابه (Similarity):

- $X + X = X$
- $X . X = X$

(7) قانون الاختزال (Absorption Law):

- $X + XY = X$
- $X (X + Y) = X$
- $X + \overline{X} Y = X + Y$
- $X .(\overline{X} + Y) = XY$

الجدول (2–7) يوضح إثبات هذا القانون بشقيه.

الجدول (2-7) جدول الحقيقة لقانون الاختزال

X	Y	X.Y	X+XY	X+Y	X. (X+Y)
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

(8) قانون التبديل (Commutative Law):

- $X + Y = Y + X$
- $X . Y = Y . X$

(9) قانون الاقتران (Associative Law):

- $X + Y + Z = X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$
- $X . Y . Z = X . (Y . Z) = (X . Y) . Z$

(10) قانون التوزيع (Distributive Law):

- $X (Y + Z) = XY + XZ$
- $X + YZ= (X + Y) (X + Z)$

الجدول (2-8) يوضح إثبات القوانين السابقة:

الجدول (2-8)

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{X}$ Y	X+ $\overline{X}$ Y	X+Y	XY	$\overline{X}$ +Y	X($\overline{X}$ +Y)
0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1	1

2-5-1 قانونا دي مورجان (De Morgan Laws)

ساهم دي مورجان (عالم رياضيات ومنطق) فضلاً عن بول في وضع القوانين المنطقية وخاصة القانونين الآتيين:

1) $\overline{(X_1 + X_2 + X_3 \ldots + X_n)} = \overline{X_1}.\overline{X_2}.\overline{X_3}\ldots\overline{X_n}$

أي أن مكمل المجموع (لمتغيرات منطقية) يساوي حاصل ضرب مكملات المتغيرات.

2) $\overline{(X_1.X_2.X_3\ldots X_n)} = \overline{X_1} + \overline{X_2} + \overline{X_3}\ldots + \overline{X_n}$

أي أن مكمل حاصل الضرب يساوي مجموع مكملات المتغيرات (المقصود المجموع المنطقي وحاصل الضرب المنطقي).

الجدول (2−9) يثبت قانون دي مورجان الأول لثلاث متغيرات $\overline{X+Y+Z} = \overline{X}.\overline{Y}.\overline{Z}$.

الجدول (2−9)

X	Y	Z	X+Y+Z	$\overline{X+Y+Z}$	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{Z}$	$\overline{X}.\overline{Y}.\overline{Z}$
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0

الجدول (2−10) يثبت قانون دي مورجان الثاني لثلاث متغيرات: $\overline{X.Y.Z} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$.

الجدول (2−10)

X	Y	Z	X.Y.Z	$\overline{X.Y.Z}$	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{Z}$	$\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0	0

تستخدم هذه القوانين لتبسيط التعابير البولييينية للحصول على أبسط صيغة ممكنه حتى يتم بناؤها كدوائر الكترونية بأقل تكلفة.

مثال (12): اثبت ان: $\overline{\overline{A}.B} = A + \overline{B}$

$$\overline{\overline{A}.B} = \overline{\overline{A}} + \overline{B} = A + \overline{B}$$

مثال (13): بسط: Z=A(A+B).

Z = AA+AB = A+AB = A

مثال (14): استخدم نظريات الجبر البوليني في تبسيط التعبير المنطقي:

$$Y = \overline{\overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B}$$

ثم ارسم الدائرة المنطقية قبل التبسيط وبعده.

الحل:

$$Y = \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,C + \overline{A}B}$$

$Y = (\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} + \overline{C}).(\overline{\overline{A}} + \overline{B})$ دي مورجان

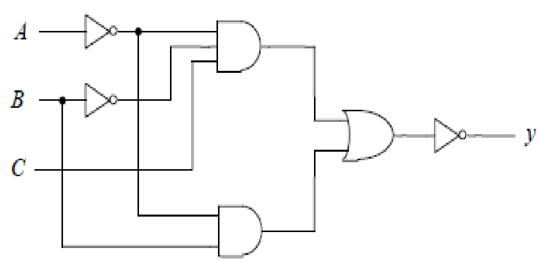
$Y = (A + B + \overline{C}).(A + \overline{B})$ عكس العكس

$Y = AA + A\overline{B} + BA + B\overline{B} + \overline{C}A + C\overline{B}$ التوزيعية

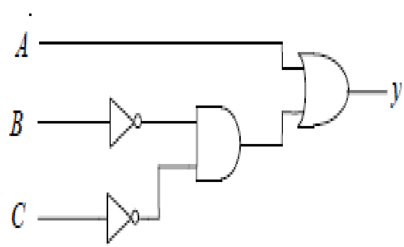
$Y = A(1 + \overline{B} + B + \overline{C}) + \overline{C}\,\overline{B}$ اختزال

$Y = A + \overline{C}\,\overline{B}$ اختزال

الدائرة قبل التبسيط:



الدائرة بعد التبسيط:



نلاحظ ان الدائرة قبل التسبيط مكونة من 6 بوابات واصبحت مكونة من 4 فقط بعد التبسيط.

مثال (15): استخدم الجبر البوليني في تبسيط التعبير المنطقي:

$$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC$$

الحل: لتبسيط هذا النوع من التعبيرات نبحث عن التشابهات ما بين الحدود. والحدان المتشابهان هما حدين يتفقان في كل شي عدا متغير واحد يظهر في احدهما معكوساً وفي الأخر بدون عكس. مثلاً، في التعبير اعلاه الحد الأول $\overline{ABC}$ يشبه الحد الثاني يشبه الحد الثاني $\overline{AB}C$، إذ يتفق الحدان في كل شي عدا المتغير C الذي يظهر في الحد الأول معكوساً وفي الحد الثاني بدون عكس. وبنفس الطريقة يتشابه الحدان الثالث $\bar{A}BC$ والرابع ABC، إذ يتفقان في كل شي عدا المتغير A الذي يظهر في الحد الثالث معكوساً وفي الحد الرابع بدون عكس. مع ملاحظة ان الاختلاف ما بين الحدين المتشابهين يجب ان يكون في متغير واحد فقط.

$$y = \underbrace{\underbrace{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} + \underbrace{\bar{A}\bar{B}C}} + \underbrace{\underbrace{\bar{A}BC} + \underbrace{ABC}}$$

بعد ايجاد التشابهات ما بين الحدود نقوم بجمع كل حدين متشابهين في حد واحد هو عبارة عن العامل المشترك ما بين الحدين، اما المتغير المختلف فيتم اختصاره.

$$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC$$

$Y = \bar{A}\bar{B}(\bar{C} + C) + BC(\bar{A} + A)$ بإخراج العامل المشترك في كل حدين متشابهين

$Y = \bar{A}\bar{B}(1) + BC(1)$ بجمع المتغير مع عكسه

$Y = \bar{A}\bar{B} + BC$ بالعمليات مع 1

نلاحظ في المثال وجود تشابه اضافي بين الحدود، إذ ان الحد الثاني $\overline{ABC}$ يشبه الحد الثالث $\bar{A}BC$، ولكن لم تكن في حاجة لاستخدام هذا التشابه في عملية التبسيط.

مثال (16): استخدم نظريات الجبر البوليني في تبسيط التعبير المنطقي:

$$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$$

الحل: نبحث عن التشابهات ما بين الحدود. الحد الأول يشبه الحد الثاني، والحد الرابع يشبه الحد الخامس، والحد الثالث يشبه الحد الأول.

$$y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$$

نلاحظ هنا وجود مشكلة تتمثل في ان الحد الأول يتشابه في نفس الوقت مع كل من الحدين الثاني والثالث. في مثل هذه الحالات نقوم بتكرار الحد الأول (مستخدمين نظرية المتغير مع نفسه) إذ يتم جمعه مع كلا الحدين الثاني والثالث.

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$$

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$$ بتكرار الحد الأول

$Y = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C} + A\overline{B}$ بجمع كل حدين متشابهين

$Y = \overline{A}\,\overline{B} + A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C}$ بالنظرية الإبدالية

$Y = \overline{B} + \overline{A}\,\overline{C}$ بجمع الحدين المتشابهين

مثال (17): استخدم نظريات الجبر البوليني في تبسيط التعبير المنطقي:

$$Y = \overline{\overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}}$$

الحل: نبحث عن التشابهات ما بين الحدود.

$$Y = \overline{\underline{\overline{A}B\overline{C}} + A\underline{\overline{B}\,\overline{C}} + \underline{A\overline{B}C} + \underline{AB\overline{C}}}$$

$Y = \overline{B\overline{C} + A\overline{B}}$ مجموع كل حدين متشابهين

$Y = \overline{(B\overline{C})}\,.\,\overline{(A\overline{B})}$ من نظرية مورغان

$Y = (\overline{B} + C).\,(\overline{A} + B)$ من نظرية مورغان

مثال (18): استخدم نظريات الجبر البوليني في تبسيط التعبير المنطقي:

$$Y = \overline{\overline{A}BC + AB\overline{C} + ABC}$$

الحل: نبحث عن التشابهات بين الحدود.

$$y = \overline{\overline{A}BC + AB\overline{C} + ABC}$$

$$Y = \overline{\bar{A}BC + AB\bar{C} + ABC}$$

$$Y = \overline{(\bar{A}BC + ABC) + (AB\bar{C} + ABC)}$$ بتكرار الحد الثالث

$$Y = \overline{BC + AB}$$ نجمع كل حدين متشابهين

$$Y = \bar{B} + \overline{(C+A)}$$ من نظرية مورغان

مثال (19): بسط الدالة البوليينية الأتية: $F = \bar{X} + \bar{X}\bar{Y}Z + \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} + \bar{Y}\bar{Z} + \bar{Y}$.

الحل:

$$F = \bar{X} + \bar{X}\bar{Y}Z + \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} + \bar{Y}\bar{Z} + \bar{Y}$$

$$F = \bar{X}(1+\bar{Y}Z) + \bar{Y}\bar{Z}(\bar{X}+1) + \bar{Y} \qquad \{X+1=1\}$$

$$F = \bar{X}.1 + \bar{Y}\bar{Z}.1 + \bar{Y} \qquad \{X.1=1\}$$

$$F = \bar{X} + \bar{Y}\bar{Z} + \bar{Y}$$

$$F = \bar{X} + \bar{Y}(\bar{Z}+1)$$

$$F = \bar{X} + \bar{Y}$$

مثال (20): اختصر الدالة البولينية الأتية لأبسط صيغة ممكنه:

$$F = \overline{\overline{(\bar{Y}+\bar{Z})}.\overline{(X+\bar{Y}+Z)}}$$

الحل:

$$F = \overline{\overline{(\bar{Y}+\bar{Z})}.\overline{(X+\bar{Y}+Z)}}$$

$$F = \overline{\overline{(\bar{Y}+\bar{Z})}} + \overline{\overline{(X+\bar{Y}+Z)}} \qquad \{\bar{\bar{X}} = X\}$$

$$F = (\bar{Y}+\bar{Z}) + (X+\bar{Y}+Z)$$

$$F = \bar{Y}+\bar{Z}+X+\bar{Y}+Z$$

$$F = X+\bar{Y}+\bar{Y}+Z+\bar{Z} \qquad \{\bar{Y}+\bar{Y}=\bar{Y},\ Z+\bar{Z}=1\}$$

$$F = X+\bar{Y}+1$$

$$F = 1$$

مثال (21): بسط الصيغة الأتية:

$$A = \bar{X}.\bar{Z} + X.\bar{Z}$$

$$= \bar{Z}(\bar{X}+X) = \bar{Z}$$

مثال (22): بسط الصيغة الأتية:

$$
\begin{aligned}
Z &= AB + A(B+C) + B(B+C)\\
&= AB + AB + AC + BB + BC\\
&= AB + AC + B + BC\\
&= AB + AC + B\\
&= B \quad + AC
\end{aligned}
$$

مثال (23): بسط الصيغة الأتية:

$$
\begin{aligned}
Z &= A\overline{B}C + \underline{\overline{A}BC} + \underline{\overline{A}\,\overline{B}C}\\
&= A\overline{B}C + \overline{A}C[B + \overline{B}]\\
&= A\overline{B}C + \overline{A}C\\
&= C[A\overline{B} + \overline{A}]\\
&= C[\overline{A} + \overline{B}]\\
&= C\overline{A} + C\overline{B}
\end{aligned}
$$

مثال (24): بسط الصيغة الأتية:

$$
\begin{aligned}
F &= A\{ BC(A+B+C+D)\}\\
&= ABC(A+B+C+D)\\
&= ABCA + ABCB + ABCC + ABCD\\
&= ABC+ABC+ABC+ABCD\\
&= ABC+ABCD\\
&= ABC(1+D)\\
&= ABC
\end{aligned}
$$

مثال (25): بسط الصيغة الأتية:

$$
\begin{aligned}
F &= \underline{A\overline{C}} + \underline{ABC} + AC\overline{D} + CD\\
&= A(\overline{C} + BC) + C(A\overline{D} + D)\\
&= A(\overline{C} + B) + C(A+D)\\
&= A\overline{C} + AB + CA + CD\\
&= A(\overline{C} + C) + AB + CD\\
&= A + AB + CD\\
&= A(1+B) + CD\\
&= A + CD
\end{aligned}
$$

مثال (26): اثبت الأتي:

$$F = ABC + A\overline{B}C + AB\overline{C} = A(B+C)$$
$$= AC(B+\overline{B}) + AB\overline{C}$$
$$= AC + AB\overline{C}$$
$$= A(C+B\overline{C})$$
$$= A(C+B)$$

مثال (27): بسط الصيغة الأتية:

$$X = AB + ABC + \overline{A}B + A\overline{B}C$$
$$= AB(1+C) + \overline{A}B + A\overline{B}C$$
$$= AB + \overline{A}B + A\overline{B}C$$
$$= B + A\overline{B}C$$
$$= B + \overline{B}AC$$
$$= B + AC$$

مثال (28): ثلاثة مدخلات **لدائرة منطقية**. والناتج هو (1) عندما تكون الأغلبية من المدخلات هو (1)، وما عدا ذلك صفر، فان جدول الحقيقة هو:

ABC	Z
000	0
001	0
010	0
011	1
100	0
101	1
110	1
111	1

6-2 صورة مجموع الحدود الصغرى (Sum of Minterms):

الحد الاصغر (minterm) هو عبارة عن حد تظهر فيه جميع متغيرات الدخل مربوطة مع بعضها البعض بعمليات AND، وقد يظهر متغير معين في الحد الاصغر معكوسا أو بدون عكس. يوجد عدد من الحدود الصغرى يساوي عدد احتمالات الدخل، اي عدد اسطر جدول الحقيقة. لأيجاد الحد الاصغر المقابل لسطر معين من اسطر جدول

الحقيقة ننظر إلى قيم متغيرات الدخل في ذلك السطر، فاذا كانت قيمة المتغير هي 0 يظهر ذلك المتغير في الحد الاصغر معكوسا، اما إذا كانت قيمة المتغير هي 1 يظهر ذلك المتغير في الحد الاصغر بدون عكس. كما في الجدول (2−11) الذي يوضح جميع الحدود الصغرى لثلاثة متغيرات دخل A وB وC.

الجدول (2−11)

A	B	C	Minterm
0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$
0	0	1	$\overline{A}\,\overline{B}C$
0	1	0	$\overline{A}B\overline{C}$
0	1	1	$\overline{A}BC$
1	0	0	$A\overline{B}\,\overline{C}$
1	0	1	$A\overline{B}C$
1	1	0	$AB\overline{C}$
1	1	1	ABC

نلاحظ ان اي حد اصغر يساوي 1 فقط لاحتمال الدخل المقابل له في جدول الحقيقة، ويساوي 0 خلاف ذلك، اي يساوي 0 لجميع احتمالات الدخل الأخرى في جدول الحقيقة. لكتابة التعبير المنطقي لمتغير معين من متغيرات الخرج في صورة مجموع الحدود الصغرى ننظر إلى قيم ذلك المتغير في جدول الحقيقة ونبحث عن الـ1‘s، ثم نقوم بأخذ الحدود الصغرى المقابلة لهذه الـ1‘s ونقوم بجمعها، اي نربط بينها بعمليات OR.

مثال (29): اكتب التعبيرين المنطقين لمتغيري الخرج Y وX في جدول الحقيقة الاتي في صورة مجموع الحدود الصغرى.

A	B	C	x	y
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

الحل:

$$X = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$$

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$$

ويمكن بسهولة التحقق من ان التعبير المنطقي المكتوب في صورة مجموع الحدود الصغرى يعطي فعلاً قيم الخرج المطلوبة الموضحة في جدول الحقيقة عند تعويض احتمالات الدخل فيه. إذ تم اختيار الحدود الصغرى المقابلة لـ1‘s فقط في جدول الحقيقة وربطها بعمليات OR، إذ ان الحد الاصغر يساوي 1 فقط لاحتمال الدخل المقابل له في جدول الحقيقة ويساوي 0 خلاف ذلك، فأنه عند تعويض اي احتمال من احتمالات الدخل المقابلة للـ1‘s في التعبير المنطقي فأن الحد الاصغر المقابل لذلك الاحتمال يساوي 1، وبالتالي فان التعبير باكمله يساوي 1 أيضاً. اي ان كل حد من الحدود الصغرى المضمنة في التعبير المنطقي يضمن ظهور الـ1 المقابل له في جدول الحقيقة. اما عند تعويض احد احتمالات الدخل المقابلة للـ0‘s في التعبير المنطقي فان اي من الحدود الصغرى المضمنة في التعبير المنطقي لن يكون مساويا 1 بل ستكون جميعا مساوية للـ0 وبالتالي فان التعبير المنطقي باكمله يساوي 0.

لتسهيل كتابة التعبيرات المنطقية في صورة مجموع الحدود الصغرى يتم ترقيم اسطر جدول الحقيقة (ابتداءا بالقيمة 0)، واستخدام الرمز m_k للحد الاصغر المقابل للسطر k من جدول الحقيقة. كما في الجدول الاتي:

#	A	B	C	Minterm	
0	0	0	0	$\overline{ABC}$	m_0
1	0	0	1	$\overline{A}\overline{B}C$	m_1
2	0	1	0	$\overline{A}B\overline{C}$	m_2
3	0	1	1	$\overline{A}BC$	m_3
4	1	0	0	$A\overline{BC}$	m_4
5	1	0	1	$A\overline{B}C$	m_5
6	1	1	0	$AB\overline{C}$	m_6
7	1	1	1	ABC	m_7

وعليه يمكن كتابة التعبيريين المنطقين لمتغيري الخرج x و y في المثال السابق بصورة مختصرة، باستخدام رموز الحدود الصغرى، كالاتي:

$X = m_o + m_1 + m_3 + m_7$
$Y = m_o + m_1 + m_2 + m_4 + m_5$

كما يمكن تسهيل كتابة التعبير باستخدام رمز المجموع ∑، كالاتي:

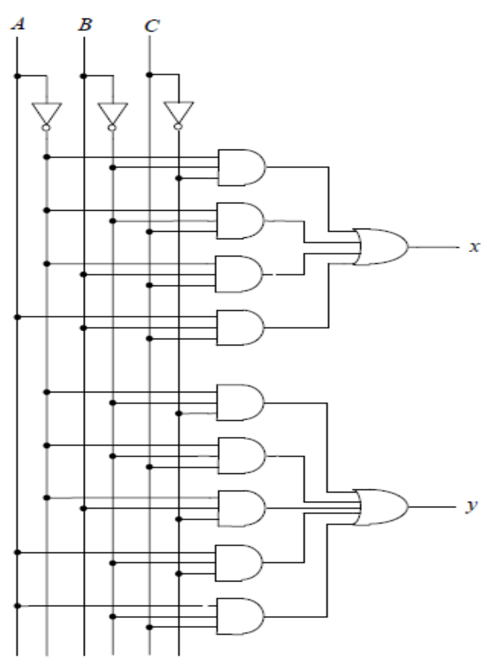
$X = \sum m\,(0,1,3,7)$
$Y = \sum m\,(0, 1,2,4,5)$

اي ان التعبير المنطقي في صورة مجموع الحدود الصغرى يمكن ان يكتب كاملاً، أو مختصرا باستخدام رموز الحدود الصغرى، أو مختصراً باستخدام رمز المجموع $\sum$ وارقام الحدود الصغرى (اي ارقام اسطر جدول الحقيقة الحاوية على القيمة 1 للمتغير الذي يتم كتابة التعبير له). وبناء عليه فانه في المثال السابق:

$$X = \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC$$
$$= m_0 + m_1 + m_3 + m_7$$
$$= \sum m\,(0,1,3,7)\ \ldots\ (1)$$
$$Y = \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\,\bar{C} + A\bar{B}C$$
$$= m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5$$
$$= \sum m\,(0,1,2,4,5)\ \ldots\ (2)$$

نلاحظ هنا اهمية مراعاة استخدام الحرف m الصغير (Small Letter) للرمز للحدود الصغرى (Minterms)، حتى لا يحدث خلط بينها وبين الحدود الكبرى (Maxterms)، إذ تم استخدام الحرف M الكبير (Capital Letter) للرمز للحدود الكبرى.

إذا تم رسم الدائرة المنطقية للتعبيريين (x، y) المكتوبين في صورة مجموع الحدود الصغرى نحصل على:



7-2 صورة مضروب الحدود الكبرى (Product of Maxterms):

الحد الاكبر (maxterm) هو عبارة عن حد تظهر فيه جميع متغيرات الدخل مربوطة مع بعضها البعض بعمليات OR، وقد يظهر متغير معين في الحد الاكبر معكوسا أو بدون عكس. يوجد عدد من الحدود الكبرى يساوي عدد احتمالات الدخل، اي عدد اسطر جدول الحقيقة، إذ يكون هناك حد اكبر مقابل كل سطر من اسطر جدول الحقيقة. لأيجاد الحد الاكبر المقابل لسطر معين من اسطر جدول الحقيقة ننظر إلى قيم متغيرات الدخل في ذلك السطر، فاذا كانت قيمة المتغير هي 0 يظهر ذلك المتغير في الحد الاكبر بدون عكس، اما إذا كانت قيمة المتغير هي 1 يظهر ذلك المتغير في الحد الاكبر معكوسا. كما موضح في الجدول الاتي، الذي يوضح جميع الحدود الكبرى لثلاثة متغيرات دخل A و B و C.

A	B	C	Maxterm
0	0	0	$A+B+C$
0	0	1	$A+B+\overline{C}$
0	1	0	$A+\overline{B}+C$
0	1	1	$A+\overline{B}+\overline{C}$
1	0	0	$\overline{A}+B+C$
1	0	1	$\overline{A}+B+\overline{C}$
1	1	0	$\overline{A}+\overline{B}+C$
1	1	1	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

نلاحظ ان اي حد اكبر يساوي 0 فقط لاحتمال الدخل المقابل له في جدول الحقيقة، ويساوي 1 خلاف ذلك، اي يساوي 1 لجميع احتمالات الدخل في جدول الحقيقة.

لكتابة التعبير المنطقي لمتغير معين من متغيرات الخرج في صورة مضروب الحدود الكبرى ننظر إلى قيم ذلك المتغير في جدول الحقيقة ونبحث عن الـ0's، ثم نقوم بأخذ الحدود الكبرى المقابلة لهذه الـ0's ونقوم بضربها، اي نربط بينها بعمليات AND.

مثال (30): اكتب التعبيريين المنطقين لمتغيري الخرج X و Y بصيغة مضروب الحدود الكبرى في جدول الحقيقة الاتي:

A	B	C	x	y
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

$$X = (A + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + C)(\overline{A} + B + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C)$$

$$Y = (A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C)(\overline{A} + \overline{B} + C)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$

ويمكن التحقق من ان التعبير المنطقي المكتوب في صورة مضروب الحدود الكبرى يعطي قيم الخرج المطلوبة الموضحة في جدول الحقيقة عند تعويض احتمالات الدخل فيه. إذ تم اختيار الحدود الكبرى المقابلة للـ0‘s فقط في جدول الحقيقة وربطها بعمليات AND، إذ ان الحد الاكبر يساوي 0 فقط لاحتمال الدخل المقابل له في جدول الحقيقة ويساوي 1 خلاف ذلك، فعند تعويض أي احتمال من احتمالات الدخل المقابلة للـ0‘s في التعبير المنطقي فان الحد الاكبر المقابل لذلك الاحتمال يساوي 0، وبالتالي فان التعبير باكمله يساوي 0 أيضاً. اي ان كل حد من الحدود الكبرى المضمنة في التعبير المنطقي يضمن لنا ظهور الـ0 المقابل له في جدول الحقيقة. اما عند تعويض احد احتمالات الدخل المقابلة للـ1‘s في التعبير المنطقي فان اي من الحدود الكبرى المضمنة في التعبير المنطقي لن يكون مساوياً 0 بل ستكون جميعا مساوية للـ1 وبالتالي فان التعبير المنطقي باكمله يساوي 1.

لتسهيل كتابة التعبيرات المنطقية في صورة مضروب الحدود الكبرى يتم ترقيم اسطر جدول الحقيقة (ابتداءاً بالقيمة 0)، واستخدام الرمز M_K للحد الاكبر المقابل للسطر K من جدول الحقيقة. كما في الجدول الاتي:

#	A	B	C	Maxterm	
0	0	0	0	$A+B+C$	M_0
1	0	0	1	$A+B+\overline{C}$	M_1
2	0	1	0	$A+\overline{B}+C$	M_2
3	0	1	1	$A+\overline{B}+\overline{C}$	M_3
4	1	0	0	$\overline{A}+B+C$	M_4
5	1	0	1	$\overline{A}+B+\overline{C}$	M_5
6	1	1	0	$\overline{A}+\overline{B}+C$	M_6
7	1	1	1	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	M_7

وعليه يمكن كتابة التعبيريين المنطقين لمتغيري الخرج X وY في المثال السابق بصورة مختصرة، باستخدام رموز الحدود الكبرى كالاتي:

$X = M_2 . M_4 . M_5 . M_6$

$Y = M_3 . M_6 . M_7$

كما يمكن تسهيل كتابة التعبيرات اكثر من ذلك باستخدام رمز المضروب $\prod$، وذلك كالاتي:

$X = \prod M(2,4,5,6)$

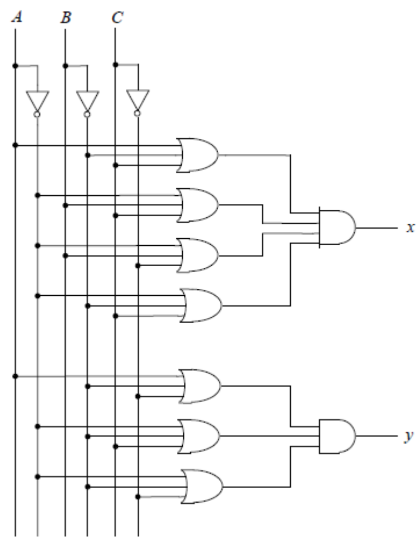
$Y = \prod M(3,6,7)$

اي ان التعبير المنطقي في صورة مضروب الحدود الكبرى يمكن ان يكتب كاملا، أو مختصرا باستخدام رموز الحدود الكبرى، أو مختصرا باستخدام رمز المضروب $\prod$ وارقام الحدود الكبرى (اي ارقام اسطر جدول الحقيقة الحاوية على القيمة 0 للمتغير الذي يتم كتابة التعبير له). وبناء عليه فانه في المثال السابق:

$$
\begin{aligned}
X &= (A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C) \\
&= M2.M4.M5.M6 \\
&= \prod M(2,4,5,6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y &= (A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}) \\
&= M3.M6.M7 \\
&= \prod M(3,6,7)
\end{aligned}
$$

واذا تم رسم الدائرة المنطقية للتعبيريين أعلاه المكتوبين في صورة مضروب الحدود الكبرى نحصل على:



مثال (31): اكتب الصيغة المنطقية باستخدام طريقة جمع الضرب (sum of product) لجدول الحقيقة الأتية؟

AB	Z	P terms	Z
00	1	$\bar{A}\,\bar{B}$	
01	0	$\bar{A}\,\bar{B}$	$Z = \bar{A}\,\bar{B} + AB$
10	0	$A\bar{B}$	
11	1	AB	

مثال (32): اكتب الصيغة المنطقية باستخدام طريقة جمع الضرب (sum of product) لجدول الحقيقة الأتية؟ مع تبسيط المقدار.

ABC	Z	→	P terms	min terms
000	0		$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$	m_0
001	0		$\bar{A}\,\bar{B}\,C$	m_1
010	0		$\bar{A}\,B\,\bar{C}$	m_2
011	1		$\bar{A}\,B\,C$	m_3
100	0		$A\,\bar{B}\,\bar{C}$	m_4
101	1		$A\,\bar{B}\,C$	m_5
110	1		$A\,B\bar{C}$	m_6
111	1		$AB\,C$	m_7

$$Z = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$
$$= \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$
$$= BC(\overline{A} + A) + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$
$$= BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$
$$= C(B+\overline{B}A) + AB\overline{C} = C(B+A) + AB\overline{C}$$
$$= CB + CA + AB\overline{C} = CB + A(C+B\overline{C})$$
$$= CB + A(C+B)$$
$$= CB + AC + AB$$

مثال (33): اكتب الصيغة المنطقية باستخدام طريقة ضرب الجمع (product of sum) لجدول الحقيقة الآتي؟

Z	S. treams $\Longrightarrow$	Max terms	AB
00	1	$(A+B)$	M_0
01	0	$(A+\overline{B})$	$\leftarrow M_1$
10	0	$(\overline{A}+B)$	$\leftarrow M_2$
11	0	$(\overline{A}+\overline{B})$	$\leftarrow M_3$

$$Z = M_1 \,.\, M_2 \,.\, M_3$$
$$= (A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})$$

مثال (34): بسط الصيغة الأتية باستخدام طريقة جمع الضرب (sum of product) وضرب الجمع (product of sum):

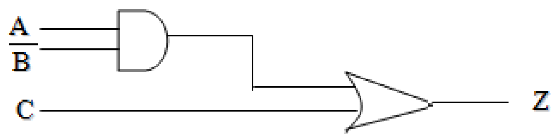
$$F(A,B,C) = \pi(M_2, M_3, M_6)$$

الحل:

ABC	Z	
000	1	m_0
001	1	m_1
010	0	m_2
011	0	m_3
100	1	m_4
101	1	m_5
110	0	m_6
111	1	m_7

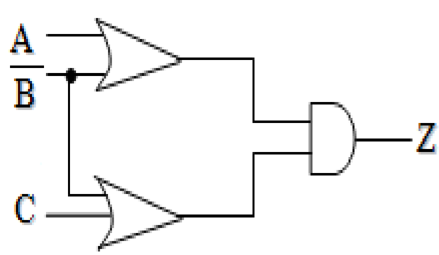
1. بطريقة جمع الضرب:

$$Z = m_0 + m_1 + m_4 + m_5 + m_7$$
$$= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + ABC$$
$$= \overline{A}\,\overline{B}\,(C+\overline{C}) + A\overline{B}\,(C+\overline{C}) + ABC$$
$$= \overline{A}\,\overline{B} + A\overline{B} + ABC$$
$$= \overline{B}\,(\overline{A}+A) + ABC = \overline{B} + BAC = \overline{B} + AC$$



2. بطريقة ضرب الجمع:

$$Z = M_2 .\ M_3 .\ M_6$$
$$=(A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)$$
$$=(A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+C)$$
$$=(AA+\overline{B}A+CA+A\overline{B}+\overline{B}\,\overline{B}+C\overline{B}+A\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C}+C\overline{C})$$
$$=(A+\overline{B}A+CA+A\overline{B}+\overline{B}+C\overline{B}+A\overline{C}+\overline{B}\overline{C})$$
$$=(A(1+\overline{B}+C+\overline{B}+\overline{C})+\overline{B}(1+\overline{C}+C))$$
$$=(A+\overline{B})(\overline{A}A+\overline{B}A+CA+\overline{A}\,\overline{B}+\overline{B}\,\overline{B}+C\overline{B}+\overline{A}C+\overline{B}C+CC)$$
$$=(A+\overline{B})(\overline{B}A+CA+\overline{A}\,\overline{B}+\overline{B}+C\overline{B}+\overline{A}C+\overline{B}C+C)$$
$$=(A+\overline{B})(\overline{B}(A+\overline{A}+1+C+C)+C(A+\overline{A}+1))$$
$$=(A+\overline{B})(\overline{B}+C)$$



يتطلب طريقة **ضرب الجمع بوابة** واحدة أكثر مقارنة بـ **جمع الضرب**.

تمارين الفصل الثاني

1) اكتب جدول الحقيقة للصيغ الأتية، مع رسم الدائرة المنطقية لكل منها.

a) $XYZ + \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$

b) $A(B\overline{C} + \overline{B}C)$

c) $A[(\overline{B} + \overline{C}) + C)$

d) $(A + B)(A + C)(\overline{A} + \overline{B})$

2) طبق قانون دي مورجان للصيغ الأتية:

a) $\overline{A(B + C)}$

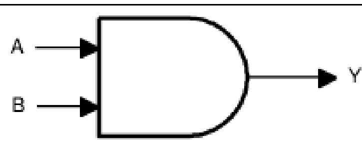
b) $\overline{A\overline{B}(C + \overline{D})}$

c) $\overline{(A + \overline{B} + C + \overline{D})} + \overline{AB}$

d) $A + B[AC + \overline{(A + \overline{C})})$

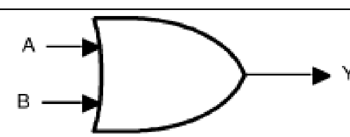
3) اكتب جدول الحقيقة للدوائر المنطقية الاتية:

1



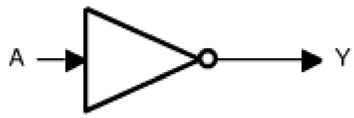
A	B	Y

3



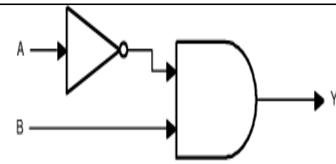
A	B	Y

2

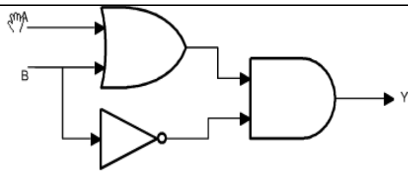


A	Y

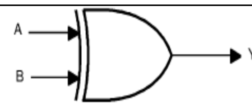
4



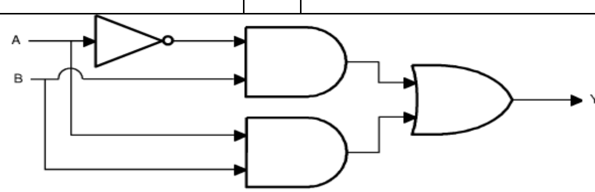
5



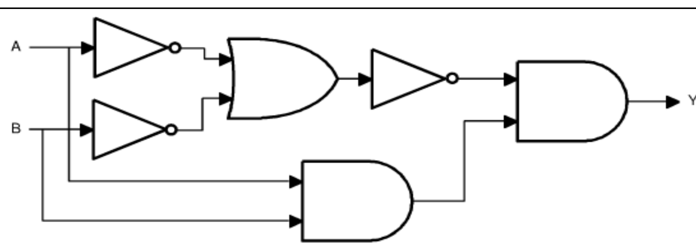
6



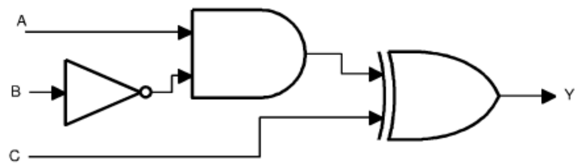
7



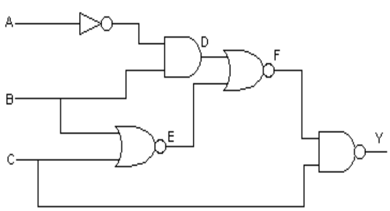
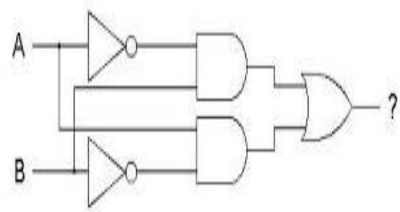
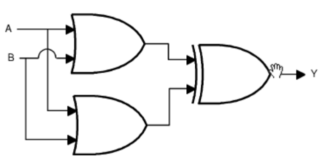
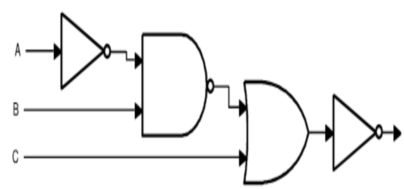
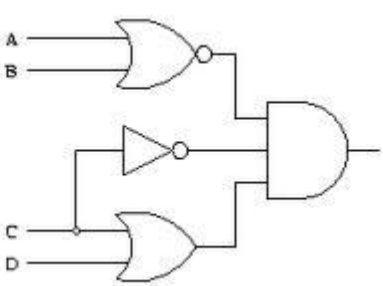
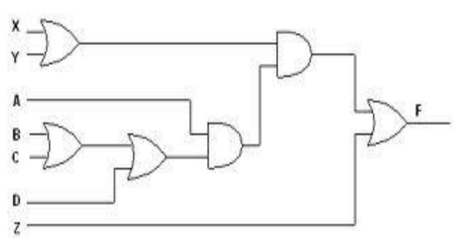
8

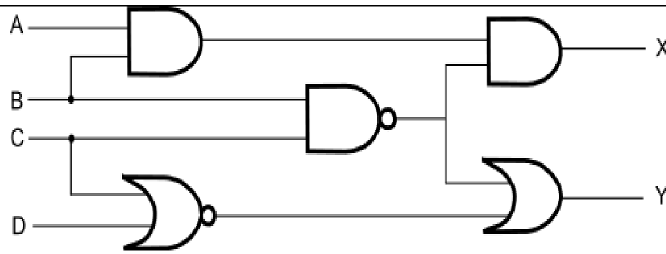


9



4) اكتب جدول الحقيقة للدوائر المنطقية الاتية:

<table>
<tr><td>1.</td><td>
</td><td>4.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>
</td><td>5.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>
</td><td>6.</td><td>
</td></tr>
</table>

7.	

5) حول الصيغ الأتية إلى جمع الضرب:

a) (A+B) (C+D)
b) (A+C) (ABC+ACD)
c) A+B [AC+ (B+$\overline{C}$)D)

6) ارسم الدائرة المنطقية للصيغ البوليينية الأتية:

a) $F = \overline{A}B(C + \overline{D})$

b) $F = A + B[C + D(B + \overline{C})$

c) $X = A[BC(A + B + C + D)$

d) $X = \overline{ABC} + B(EF + \overline{G})$

e) $X = B(C\overline{D}E + \overline{E}FG)(AB + C)$

7) بسط الصيغ البوليينية الأتية:

a) $ABCD + AB(\overline{CD}) + \overline{AB}CD$

b) $XY(\overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}\overline{Z} + \overline{X}\overline{Y}\overline{Z})$

8) اكتب الصيغة البوليينية للعبارات الأتية:

a) X is 1 only if A is 1 and B is 1 or if A=0 and B=0.
b) X =0 if any three variables A, B, C are 1’s.

9) بسط الصيغ البوليينية الأتية:

a) F(x,y,z) = Σ(2,3,6,7)
b) F(A,B,C,D,E) = Σ(4,15,20,23,31)
c) F(A,B,C) = ∏(1,4,5,7)
d) F(A,B,C,D) = Σ(0,2,5,7,8,10,13,15)
e) F(A,B,C) = ∏(1,4,7)