(حلول أسئلة الامتحان الثاني)

(A)

Q.1 Prove that $|x+y| \le |x|+|y| \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$

Pf. $\because \; -|x| \le x \le |x| \;\&\; -|y| \le y \le |y|$

بالجمع، $\Rightarrow \; -|x|-|y| \le x+y \le |x|+|y|$

$\Rightarrow \; -(|x|+|y|) \le x+y \le |x|+|y|$

$\Rightarrow \; |x+y| \le |x|+|y|$

حسب الخاصية:

$|x| \le b \;,\; b>0 \iff -b \le x \le b$

Q.2 If $\lim_{x\to c} f(x) = L_1$, Prove that L_1 is unique.

Pf. Suppose $f(x)$ has two limits $L_1 \;\&\; L_2$

$\therefore$ if $\varepsilon>0$ (so $\frac{\varepsilon}{2}>0$) we have:

① $\because L_1 = \lim_{x\to c} f(x)$ بالفرض & given $\frac{\varepsilon}{2}>0$

$\therefore \exists\, \delta_1>0$ s.t $|f(x)-L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ if $|x-c|<\delta_1 \rightarrow (*)$

② $\because L_2 = \lim_{x\to c} f(x)$ (بالبرهان) فرض

$\therefore \exists\, \delta_2>0$ s.t $|f(x)-L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ if $|x-c|<\delta_2 \rightarrow (**)$

Now, $0 \le |L_1-L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \le |f(x)-L_1| + |f(x)-L_2| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

if $|x-c|<\delta$
where $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$

$\therefore 0 \le |L_1-L_2| < \varepsilon$

$\Rightarrow |L_1-L_2| = 0$

(حسب الخاصية: $\forall a \in \mathbb{R}^+$, if $0 \le a < \varepsilon$ then $a=0$)

$\Rightarrow L_1 - L_2 = 0$

$\Rightarrow L_1 = L_2$

Q.3 Prove that $f(x) = x^2+1$ is cont. at $x=-2$.

Pf. given $\varepsilon>0$, to find $\delta>0$ s.t

$|f(x)-f(c)| < \varepsilon$ if $|x-c|<\delta$

$\Rightarrow |x^2+1-((-2)^2+1)| < \varepsilon$ if $|x-(-2)|<\delta$

$\Rightarrow |x^2+1-5| < \varepsilon$ if $|x-(-2)|<\delta$

Now, $|f(x)-f(c)| = |x^2+1-5| = |x^2-4| = |(x-2)(x+2)|$

$= |x-2|\,|x+2| \overset{?}{<} \varepsilon$ if $|x+2|<\delta$

يجب ايجاد حد اعلى لها لاختيار #

Let $\delta = 1$

$\Rightarrow |x+2|<1$

$\Rightarrow -1 < x+2 < 1$

$\Rightarrow 1 < x < 3$

ثم نكون $x-2$ $\Rightarrow 1-2 < x-2 < 3-2$

$\Rightarrow -1 < x-2 < 1$

$\Rightarrow \boxed{|x-2|<1}$

عوضنا في # عن $|x-2|$:

$\therefore |x-2|\,|x+2| < 1\cdot|x+2|$

$\therefore |x-2|\,|x+2| < 1\cdot|x+2| \overset{?}{<} \varepsilon$

i.e $|f(x)-f(c)| = |x-2|\,|x+2| < 1\cdot|x+2| < \varepsilon$

$\Rightarrow 1\cdot|x+2| < \varepsilon$

$\Rightarrow |x+2| < \varepsilon$ ⟷ نقارن مع ما فرضنا على ان $\delta = \varepsilon$

وعليه نختار

$\boxed{\delta = \min\{1, \varepsilon\}}$

Q.3 Prove that $f(x)=x^2-5$ is cont. at $x=2$. (by ε-δ def

Pf. given $\varepsilon>0$, to find $\delta>0$ s.t

$|f(x)-f(2)|<\varepsilon$ if $|x-2|<\delta$ $\quad (c=2)$

$|f(x)-f(2)|=|x^2-5-(2^2-5)|=|x^2\cancel{-5}-4\cancel{+5}|=|x^2-4|$

$=|(x-2)(x+2)|=|x-2||x+2| \overset{?}{<} \varepsilon$ if $|x-2|<\delta$

يجب ان نجد حد اعلى لهذا المقدار؟

\#

لذا نستخدم

Let $\delta=1 \Rightarrow |x-2|<1$

$\Rightarrow -1<x-2<1$

$\Rightarrow 1<x<3$

$\therefore 3<x+2<5$

$\therefore \boxed{|x+2|<5}$

حد اعلى لـ $|x+2|$

$|f(x)-f(2)|=|x-2||x+2|<5|x-2| \overset{?}{<} \varepsilon.$

$|x-2|<\boxed{\frac{\varepsilon}{5}}$

$\therefore \delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{5}\}$

حلول أسئلة الامتحان الثاني B

Q.1 Prove that $|x|-|y|\leq|x-y|$.

Pf. $\because |x|=|x-y+y|$ (باضافة وطرح y داخل المقياس)

$\leq|x-y|+|y|$ حسب الخاصية المثلثية

$\therefore |x|-|y|\leq|x-y|$

Q.2 Let $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L_1$ & $\lim\limits_{x\to c} g(x)=L_2$, Prove that $\lim\limits_{x\to c}(f(x)-g(x))=L_1-L_2$

Pf. (given $\varepsilon>0$, we must find $\delta>0$ s.t $|(f(x)-g(x))|<\varepsilon$ if $|x-c|<\delta$) هنا المطلوب برهانه

$\because \varepsilon>0 \Rightarrow \boxed{\frac{\varepsilon}{2}>0}$ & $\because \lim\limits_{x\to c} f(x)=L_1$, $\therefore \exists\, \delta_1>0$ s.t.

$|f(x)-L_1|<\frac{\varepsilon}{2}$ if $|x-c|<\delta_1 \longrightarrow (1)$

Also, $\because \lim\limits_{x\to c} g(x)=L_2$

$\therefore \exists\, \delta_2>0$, s.t

$|g(x)-L_2|<\frac{\varepsilon}{2}$ if $|x-c|<\delta_2 \longrightarrow (2)$

Now, $|(f(x)-g(x))-(L_1-L_2)|=|f(x)-g(x)-L_1+L_2|$

$\leq|f(x)-L_1|+|g(x)-L_2|$

$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

if $|x-c|<\delta$

where $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

So we have:

given $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$ s.t $|(f(x)-g(x))-(L_1-L_2)|<\varepsilon$ if $|x-c|<\delta$

$\therefore \lim\limits_{x\to c}(f(x)-g(x))=L_1-L_2$

(حلول أسئلة الامتحان الثالث)

Q.1 Prove or disprove;

1) let f & g be cont-fuction at c, then $f\cdot g$ is cont. at c.

(العبارة صحيحة :: نبرهن)

pf. الحل: نبرهن على أن: $(f\cdot g)(c) = \lim_{x\to c}(f\cdot g)(x)$

$\because f$ cont. at c (بالفرض)

$\therefore \lim_{x\to c} f(x) = f(c) \longrightarrow (1)$

and g cont. at c بالفرض

$\therefore \lim_{x\to c} g(x) = g(c) \longrightarrow (2)$

Now, $\lim_{x\to c}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to c} f(x)\cdot \lim_{x\to c} g(x)$ (من خواص limit)

$= f(c)\cdot g(c)$ (من 1 و 2)

$= (f\cdot g)(c)$ (من تعريف ضرب الدالتين)

$\therefore f\cdot g$ is cont. at c

---

(2) $\langle \sin\frac{n\pi}{2}\rangle = \langle 1,0,-1,0,1,0,-1,0,\dots\rangle$ is conv. (1) but not bdd. (2)

العبارة غير صحيحة لأنه:

Range $\langle \sin\frac{n\pi}{2}\rangle = \{1,0,-1\}$ وهذه bdd set لأنها تحوي 3 عناصر أي finite.

$\therefore$ حسب تعريف المتتابعة المقيدة تكون $\langle \sin\frac{n\pi}{2}\rangle$ مقيدة

وكذلك المتتابعة متباعدة (not conv.) لأنه لو أخذنا متتابعتين جزئيتين منها مثل

$\langle 0,0,0,\dots\rangle \longrightarrow 0$

$\langle 1,1,1,\dots\rangle \longrightarrow 1$

من كل منها تقترب إلى نهاية مختلفة عن الأخرى $1 \neq 0$

$\therefore \langle \sin\frac{n\pi}{n}\rangle$ ليست متقاربة (not conv.)

---

(3) Every bdd seq. is conv.

العبارة ليست صحيحة $\therefore$ نعطي مثال:

لاحظ المتتابعة $\langle (-1)^n\rangle$ هذه مقيدة (bdd)

لكنها ليست متقاربة لأنه

Range $\langle (-1)^n\rangle = \{1,-1\}$ وهذه مجموعة مقيدة

$\therefore$ المتتابعة مقيدة

ولو أخذنا متتابعتين جزئيتين منها نجد أن نهايتيهما مختلفة

$\langle -1\rangle = \langle -1,-1,-1,\dots\rangle \longrightarrow -1$

$\langle 1\rangle = \langle 1,1,1,\dots\rangle \longrightarrow 1$

$\therefore \langle (-1)^n\rangle$ not conv.

Q.2 determine wether the seq. $\left\langle \ln \frac{2n}{n+1} \right\rangle_{x_n}$ is bdd, monotone, conv. or div.

Sol.

اولاً نختبر المتتابعة انه كانت Conv. ام لا
وذلك بايجاد نهاية الحد العام لها اي نحسب :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln \frac{2n}{n+1}\right) = ??$$

ملاحظة: هنا لا نستخدم التعريف فقط اوجد النهاية للحد x_n العام

$$\text{Now } \lim_{n\to\infty}\left(\ln \frac{2n}{n+1}\right)$$

$$= \ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1}\right)$$ (وهذه قاعدة لايجاد نهاية ln حيث ندخل limit على المقدار ثم ناخذ ln)

اي حالة المقدار موجب

$$= \ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\right) = \boxed{\ln 2}$$

باستخدام لوبيتال لانه بالتعويض المباشر ينتج $\frac{\infty}{\infty}$ لذا استخدمنا لوبيتال
حيث نشتق البسط ونشتق المقام (م) ثم نكمل حساب النهاية

∴ النهاية هي $\boxed{\ln 2}$

وبما ان limit موجودة وتساوي $\ln 2$ ∴ $\boxed{\text{المتتابعة Conv.}}$ ①

وحسب النظرية (كل متقاربة تكون محددة)

∴ $\left\langle \ln \frac{2n}{n+1} \right\rangle$ bdd ②

بقي ان نختبرها هل هي رتيبة monotone اي متزايدة ام متناقصة ؟
∴ نستخدم الاختبار باستخدام المشتقة :

let $f(n) = \ln \frac{2n}{n+1}$

$$\therefore f'(n) = \frac{1}{\frac{2n}{n+1}} \cdot \frac{(n+1)\cdot 2 - 2n \cdot 1}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{2n+2-2n}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{(n+1)\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}n(n+1)^2} = \frac{n+1}{n(n+1)^2} > 0$$

وهذا الكسر موجب $\forall n \in N$

∴ المشتقة موجبة ∴ الدالة $f(n)$ متزايدة

∴ المتتابعة متزايدة increasing

اي ان المتتابعة monotone ③