(Problems on Continiuty)

(1) Prove that $f(x)=x^2$ is cont. $\forall\, x\in \mathbb{R}$.

pf. let $c\in\mathbb{R}$, (T.p. that f is cont. at c)

let $\varepsilon>0$, to find $\delta>0$ s.t.

$|f(x)-f(c)|<\varepsilon$ if $|x-c|<\delta$

Now, $|f(x)-f(c)| = |x^2-c^2| = |(x-c)(x+c)|$

$\leq |x-c||x+c|$

Suppos $\boxed{\delta^*=1}$, then $|x-c|<1 \Rightarrow -1<x-c<1$

$\Rightarrow c-1<x<c+1$

$\Rightarrow c-1<x+c<2c+1$ (بإضافة c)

$\Rightarrow |x+c|<|2c+1|$

$\Rightarrow |x+c|<2|c|+1$

$\therefore |f(x)-f(c)| \leq |x-c||x+c| < |x-c|(2|c|+1)$

$< \delta\,(2|c|+1)$

ولكي يكون $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$ يجب ان يكون :

$\delta(2|c|+1)<\varepsilon \Rightarrow \boxed{\delta \leq \dfrac{\varepsilon}{2|c|+1}}$

choose $\delta=\min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{2|c|+1}\right\}$

$\therefore f$ cont. at c.

$\therefore f$ is Cont. on $\mathbb{R}$.

(2) Prove that $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ s.t $f(x)=x^2$ is Cont. at $x=5$

pf. (بنفس الحل بالمثال السابق
ضع $c=5$)

والناتج هو :

$$\delta=\min\left\{1, \frac{\varepsilon}{11}\right\}$$

(3) Prove that $f(x)=\sqrt{x}$ is Cont. at $x=4$. ②

Pf. given $\varepsilon>0$, to find $\delta>0$ s.t

$|f(x)-f(4)|<\varepsilon$ ~~when~~ if $|x-4|<\delta$

Now, $|f(x)-f(4)| = |\sqrt{x}-\sqrt{4}| = |\sqrt{x}-2| \overset{?}{<} \varepsilon$

$\because |x-4|<\delta \Rightarrow |\sqrt{x}-2||\sqrt{x}+2|<\delta$

$\Rightarrow |\sqrt{x}-2| < \dfrac{\delta}{\sqrt{x}+2}$

لاحظ في المقام متغير x ، لذا يجب التخلص منه .

$\therefore$ نأخذ جوار لل 4 بنصف قطر $\boxed{\delta^*=1}$ أي أن

$|x-4|<\delta^* \Rightarrow |x-4|<1$

$\Rightarrow -1<x-4<1$

$\Rightarrow 3<x<5$

$\Rightarrow \sqrt{3}<\sqrt{x}<\sqrt{5}$

$\Rightarrow \sqrt{3}+2<\sqrt{x}+2<\sqrt{5}+2$

$\Rightarrow |\sqrt{3}+2|<|\sqrt{x}+2|$

نحتاج هذا الجزء لأن $\sqrt{x}+2$ في المقام

$\therefore |f(x)-f(4)| = |\sqrt{x}-2| < \dfrac{\delta}{|\sqrt{x}+2|} \le \dfrac{\delta}{\sqrt{3}+2} \overset{?}{\le} \varepsilon$

لأن المقام $\sqrt{3}+2$ اصغر من المقام $\sqrt{x}+2$

$\therefore \boxed{\delta \le (\sqrt{3}+2)\varepsilon}$

Choose $\delta=\min\{1, (\sqrt{3}+2)\varepsilon\}$

$\therefore$ given $\varepsilon>0$, take $\delta=\min\{1, (\sqrt{3}+2)\varepsilon\}$, s.t

$|f(x)-f(4)| = |\sqrt{x}-2| < \dfrac{\delta}{|\sqrt{x}+2|} \le \dfrac{\delta}{\sqrt{3}+2} \le \dfrac{\cancel{(\sqrt{3}+2)}\varepsilon}{\cancel{(\sqrt{3}+2)}} = \varepsilon$

$\therefore f$ Cont. at $x=4$.

(4) Find the numbers a and b such that the following function is continuous everywhere.

$$f(x)=\begin{cases} ax & \text{if } x\leq 1 \\ x^2+a-b & \text{if } -1\leq x<1 \\ bx & \text{if } 1<x \end{cases}$$

(الجواب: $a=\frac{-1}{3}$, $b=\frac{1}{3}$)

(5) Show whether f is cont. at $x=1$ where

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\leq x<1 \\ x+1 & 1\leq x\leq 2 \end{cases}$$

(6) Prove that $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$

is Cont. on $\mathbb{R}$.

(7) Find the point of discontinuity of the function $f(x)=\frac{|2x+5|}{2x+5}$ if they exist.
اذا كانت موجودة

(Hint: اوجد اصفار المقام اولاً ثم اوجد القيمة المطلقة ...)

8) Find the point of discontinuity for the function

$$f(x)=x^2+1+|2x-1|$$

sol. اولاً : نجد النقاط التي تجعل المطلق = صفر

i.e $|2x-1|=0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

ثانياً : نكتب الدالة كالاتي :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1+(2x-1) & \text{if } x\geq\frac{1}{2} \\ x^2+1-(2x-1) & \text{if } x<\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x^2+2x & \text{if } x\geq\frac{1}{2} \\ x^2-2x+2 & \text{if } x<\frac{1}{2} \end{cases}$$

ونكمل الحل ...