نظريه الاحتمال:

تهتم نظريه الاحتمال بدراسه مجموعه طرق التحليل الشائعه في دراسه الظواهر الطبيعيه والعشوائيه ويقصد بالظاهره العشوائيه هي ظاهره طبيعيه تجريبيه مميزه بخاصيه هي مشاهداتها تحت مجموعه من ظروف لا تؤدي دائما الى نتيجه نفس المشاهده انما الى مشاهده مختلفه بموجب نظام احتمالي

التجربه العشوائيه: "Random Experient"

هي التجربه التي لا يمكن معرفه نتائجها مسبقا لخضوعها الى قوانين الاحتمال مثلا

١-رمي قطعه نقود معدنيه عدد من المرات

فضاء العينه: "Sample space"

هو مجموعه جميع النتائج الممكنه للتجربه العشوائيه ويرمز لها بالرمز S1 وقد يكون محدود او غير محدود وذلك حسب النتائج التجربه العشوائيه

١-رمي قطعه نفود معدنيه مرتين S1={HH,HT,TH,TT}

الحدث: "Event"

هو مجموعه جزئيه من فضاء العينه ويرمز له بالرمز E اي ان cs بمعنى اخر هو جزء من النتائج الممكنه للتجربه العشوائيه وهناك عده انواع من الاحداث

١-الحدث البسيط(Simple): هو الحدث الذي يشتمل على نتيجه واحده فقط للتجربه

(وهو الحدث المكون من عنصر واحد مثل{ 1}في تجربة القاء حجر النرد

الحدث المركب: " Compound Event"

هو الحدث الذي يحوي على اكثر من نتيجه واحده من نتائج التجربه

مثال: ظهور اعداد فرديه عند رمي النرد مره واحده

اي ان E={1,3,5} هي احداث مركبه

او عدد النقاط من مضاعفات العدد ٣ فأن E={3,6} هي احداث مركبه

مثال: رمي قطعه نقود مرتين فأن فضاء العينه يكون S= {HH,HT,TH,TT

الحدث المستحيل:يكون الحدث الذي لايحوي اي عنصر اي يشمل المجموعة الخالية (empty)

مثال : رقم ٩ عند رمي الزار مره واحده فأن $E=\{\}=\phi$

الحدث المؤكد:هو الحدث الذي يضم كافة عناصر الفضاء بمعنى E=S

الاحداث المتنافيه وغير مستقله: "Dissjoint Events"

يقال للحدثين E1,E2 بأنهما متنافيان (منفصلان) اذا لم يكن بينهما اي عنصر مشترك اي لا يمكن وقوعها معا في وقت واحد بمعنى $E1\cap E2=$ خاليه

مثلا :ظهور صوره وكتابه عند القاء قطعه نقود او ان يكون مصباح كهربائي صالح غير صالح في ان واحد

الاحداث المستقله: "In dependent Events"هي الاحداث التي لا يؤثر بعضها على بعض اي حدوث احدهما لا يؤثر على حدوث الاخر

مثلا:القاء قطعه نقود وحجر نرد معا فكل منهما نتائجها مستقله عن الاخرى

الاحداث المتكامله : "complementary Events"

الحادثه المكمله لحادثه A ضمن فضاء عينه هي الحادثه التي تشمل على كافه العناصر العائده لفضاء العينه التي لا تعود للحادثه A(اي الحدثان اللذان اتحادهم يساوي فضاء العينة اي $\bar{A}\cup A$ ويرمز للمكملة بالرمز$\bar{A}$ =

مثال:اوجد مكمله $\bar{A}$ اذا علمت ان الحادثه A تمثل ظهور رقم اكبر من 3 عند رمي نرد مره واحده S={1,2,3,4,5,6}

$A=\{4,5,6\}$, $\bar{A}=\{1,2,3\}$

الاحداث المعتمده: "Dependent Events"

وتسمى احيانا الغير مستقلة(المشروطة) :وهي الحوادث التي اذا وقع احدهما يؤثر في وقوع الاحداث الاخرى مثلال اذا وجد صندوق فيه كرات بيضاء وسوداء فعند

سحب الكرة بدون ارجاع يؤثر على سحب الكرة الجديدة تنقص الفرصة بنقص عدد الكرات.

<u>مجموعه الخاليه:"Empty sets"</u>

هي المجموعه التي لا تتضمن اي عنصر ويرمز لها بالرمز $\varnothing$ خاليه

<u>اتحاد حادثين:"Union of events"</u>

اتحاد حادثتين A,B يمثل كافه العناصر العائده للحادثه A والعناصر العائده للحادثه B بضمنها العناصر المشتركه ان وجدت ويرمز لها بالرمز (AUB)او(A or B)

<u>تقاطع الحادثتين :"In tersection of event"</u>

تقاطع حادثين A,B هو كافه العناصر المشتركه بين الحادثين A,B ويرمز له بالرمز $(A \cap B)$او (AB)

<u>طرق العد:"Counting methods"</u>

<u>1- طريقه الضرب:</u> " طريقه الاساسيه للعد" يستخدم:اذا كانت الحوادث مستقلة فمثلا عدد الطرق لانجاز تجربه تتضمن 3 مراحل هو n1 للمرحله الاولى و n2 للمرحله الثانيه وn3 للمرحله الثالثه فأن عدد الطرق الكليه لانجاز التجربه هو :

n1 x n2 x n3

وبالتالي فأن اذا كانت التجربه تتضمن k من المراحل بحيث ان عدد الطرق او النتائج للمرحله الاولى n1 وعدد الطرق او النتائج للمرحله k هو nk فان عدد النتائج الكليه للتجربه هو : n1 x n2 x.........x nk

مثال: رميت قطعه نقود ٣ مرات ما هوالعدد النتائج الكليه للتجربه؟

S0L: 2x2x2=8

2- طريقه الجمع: اذا كانت تجربتان متنافيتان اي ان $A \cap B = \emptyset$ وكانت الاولى تحدث في N من المرات وكانت التجربه الثانيه تحدث في M من المرات فان عدد الطرق يكون n+m

ويمكن تقييم هذه الظاهره الى kمن التجارب فان حدوث واحده منها يكون

من الطرق n+m+.......+k

ملاحظة:الفرق بين طريقة الجمع والضرب:عندما نريد عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادثتين الاولى والثانية نستخدم قاعدة الضرب ولكن لكي نجد عدد الطرق الممكنه لوقوع الحادثة الاولى او الثانية نستخدم قاعدة الجمع

مثال:اراد طالب ان يسجل في مقرر واحد فقط من فصل ما فاذا كان متاح امامه في ذلك الفصل اربعه مقررات في الرياضيات وثلاثه في الفيزياء واثنان في الكيمياء فما عدد الاختيارات التي لديه

SOL: 2+3+4=9

المفكوك: "Factorial"

المفكوك لاي عدد n يرمز له بالرمز!n حيث ان

$$n!=n(n-1)(n-2) \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

١=!0 بالتعريف

مثال:اوجد مفكوك الاعداد الاتيه: 4,5,6

SOL: $4!=4 \times 3 \times 2 \times 1=24$

$5!=5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1=120$

$6!=6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1=720$

التبادل :"Permutation"

تعني عدد الطرق التي يمكن بها اختيار من العناصر منn من العناصر مع مراعاه الترتيب في الاختيار ويرمز لها بالرمز p_r^n

بحيث ان r<n وتحسب التباديل على النحو التالي:

$$p^{n}_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال:بكم طريقه يمكن ترتيب حرفين اخذ من الحروف a ,b , c, d ,e

Sol: r=2 n=5

$$\boldsymbol{p^{n}_{r}} = \frac{\mathbf{5!}}{\mathbf{(5-2)!}}$$

$= 20$

<u>التوافيق: "combinotion"</u>

هي عدد الطرق للاختيار عندما لا يكون الترتيب مهما

ان عدد الطرق لاختيار r من الاشياء من بين n من الاشياء هو:

$$C^{n}_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ملاحظه:ان عدد طرق التوافيق هو اقل من عدد طرق التبادل وذلك لوجود مضروب (r).

مثال: ما هو عدد الطرق لاختيار (3) اشخاص من مجموعه مكونه من (5).

Sol. : n=5 r=3

$$C_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

ملاحظة:اذا كان لدينا n من الاشياء وm منها متشابهة فان عدد الطرق يساوي

$$\frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{m}!}$$

<u>تمارين:</u>

١-ماهو مفكوك 5,0,1

٢-برهن $\frac{n!}{n}$=(n-1)!

٣-اذا كان لدينا اربعة احرف A,B,C,Dواختير منها حرفان فما هي الطرق التي يمكن بها اختيار هذين الحرفين

٤- ماهي عدد الطرق المختلفة التي يمكن ترتيب حروف كلمة باب

الاحتماليه : " probabitity "

هي قيمه عدديه تمثل نسبه عدد المرات التي تحدث فيها الحدث عند تكرار التجربه تحت نفس الشروط ويرمز له بالرمز p

$$P(\;)=\frac{\text{عدد مرات التكرار}}{S}$$

طرق حساب الاحتماليه: ان الاحتمال يقيس ارجحيه حدوث حادثه وان احتمال حادثه بسيطه يرمز لها بالرمز P(E) واحتمال حادثه مركبه Aويرمز لها بالرمزP(A) وهناك عده طرق لحساب الاحتمال منها:

١- **الطريقه الكلاسيكيه: "classic method"**

عندما تكون النتائج التجربه متساويه الفرصه في الحدوث فان احتمال حدوث حادثه بسيطه (Ei) من بين (n) من الحوادث الكليه للتجربه او النتائج الكليه للتجربه هو

$$p(Ei)=\frac{1}{n}$$

وان احتمال حدوث الحادثه المركبه A والتي تتضمن r من الحوادث البسيطه هو:

$$P(A)=\frac{r}{n}$$

حيث ان n هي عدد النتائج الكليه للتجربة

r هي عدد النتائج العائده للحادثه المركبه A

مثال: رميت قطعه نقود متوازيه مره واحده . ما احتمال

١-ظهور صوره ٢-ظهور كتابه

SOL: S={H,T}

P(H)= $\frac{1}{2}$, P(T)= $\frac{1}{2}$

٢- طريقة التكرار النسبي "Relative Frequeneg"

اذا تضمنت التجربة تكرار وان حادثة معينة A تحدث بعدد F من المرات من بين n من المرات المذكورة وان احتمال الحادثة a هو f(a)

$$f(A)=\frac{f}{n}$$

F : عدد التكرارات

N:عدد التكرارات الكلية للتجربة

قواعد الاحتمالات: "Ralesef probility"

١-ان درجة احتمالية اي حادثة تتراوح بين الصفر والواحد

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

٢-حيث انه الواحد يمثل احتمال حادثه مؤكده اي ان P(S)=1

٣-الصفر يمثل احتمال الحادثه المستحيلة (غير ممكنه) خاليه اي ان خاليه= P(ϕ)

٤-مجموع الاحتمالات المكونه لفضاء العينه A1,A2........An يساوي واحد

اي انه : P(A1)+P(A2)+...........P(An)

٥-احتمال المكمله لحادثه معينه A ضمن فضاء العينه هو

P($\bar{A}$)= 1-P(A)

Proof:s={AU$\bar{A}$}

$S=A+\bar{A}$

$P(S)=P(A)+P(\bar{A})$

$1=P(A)+P(\bar{A})$

$P(\bar{A})=1-P(A)$

مثال:اوجد احتمال عدم ظهور الوجه (S) عند رمي حجر نرد مره واحده ؟

SOL: $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

$A=\{5\}$

$P(\bar{A})=1-P(A)$

$P(A)=\frac{1}{6}$

$P(\bar{A})=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

<u>قانون الجمع: هناك حالتان:</u>

ا-اذا كانت الحدثان متنافيان اي ان $A\cap B=\emptyset$ فأن احتمال حدوث A او B

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

مثال:عند رمي حجر نرد في الهواء ما هو احتمال ظهور الرقم (6) او ظهور عدد من النقاط اقل من (4)

S0L: $S=\{1,2.......6\}$

$A=\{6\}$

$B=\{1,2,3\}$

$A\cap B=\emptyset$

٢-اذا كان الحدثان غير متنافين اي انهما من الممكن ان يحدثا مما اي ان ($A \cap B \neq \emptyset$) فأن احتمال حدوث A او B او كلاهما معا يحسب عن طريق القانون التالي: $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

مثال:اذا تم رمي حجر نرد في الهواء فما احتمال الحصول على مجموع للنقاط على الوجهين العلويين يكون عدد زوجي او اكبر من (4)

SOL: $A=\{2,4,6\} \quad =P(A)=\frac{3}{6}$

$$B=\{5,6\}=P(B)=\frac{2}{6}$$

$$A \cap B=\{6\}=P(A \cap B)=\frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$$

$$\frac{2}{6}+\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

ملاحظة:

$$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B)-P(A \cap C)-P(B \cap C)+P(A \cap B \cap C)$$

الاحتمال الشرطي:"Conditional probabitily"

افرض ان فضاء العينه يتضمن حادثين غير متنافيتين غير مستقلين A,B فأن احتمال حدوث الحادثه A بعد حدوث الحادثه B اي ان(الحدث B قد حدث قبله) اي ان (الحدث A يعتمد في حدوثه على الحدث B) يرمز له بالرمز$P(A/B)$ وبعض

بالصيغه التاليه: $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ، $P(B)\neq 0$

ما اذا كان العكس اي ان الحدث B هو الذي يعتمد في حدوثه على الحدث A فأن الاحتمال الشرطي يصبح $P(A/B)$ ويعرف كالاتي :

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad ، \quad P(A)\neq 0$$

في حاله احتمال حدوث الحدثين معا في الوقت نفسه فأن الاحتمال ويحسب كالاتي

$$P(A\cap B)=P(B)\ P(A/B)$$

هذا في حاله الحدث A هو الذي يعتمد على الحدث B

في حاله الحدث B هو الذي يعتمد على الحدث A فأن القانون يصبح كالاتي:

$$P(A\cap B)=P(A)\ P(B/A)$$

ملاحظه: في جميع الحالات اعلاه تدعى الحادثتان B,A معتمدتان

مثال: صندوق به ثلاث كرات بيضاء و(٥) كرات حمراء و(٢) زرقاء سحب من هذا صندوق كرتان بدون ار جاع (سحب الكره الاولى وتركت خارج الصندوق ثم سحب الكره الثانيه اوجد

١-احتمال ان تكون الكره الثانيه حمراء اذا كانت الكره الاولى بيضاء

٢-احتمال ان تكون الكره الثانيه بيضاء اذا كانت الكره الاولى بيضاء

٣-احتمال ان تكون كلتا الكرتان زرقاء

Sol: white=(w)

Red=(R)

Blue=(B)

1- $P(R2/W1)= \frac{5}{9}$

2- $P(W2/W1)= \frac{2}{9}$

3- $P(B1\cap B2)=P(B1)\ P(B2/B1)= \frac{1}{45}$

الاحداث المستقله: " Indebpendent Event"

في حاله الحادثان B,A مستقلتان فأن احتمال حدوثهما معا يحسب من القانون التالي
$P(A\cap B)=P(A).P(B)$

وبشكل عام اذا كانت لدينا الحوادث المستقله (A1,A2,.....An) ضمن فضاء عينه فان احتمال حدوثها معا هو

$$P(A1\cap A\cap .....\cap An)=p(A1).P(A2)......P(An)$$

مثال: سحب كرتان بالارجاع من صندوق يحتوي على 20 كره متشابهه منها 8 حمراء فما احتمال ان كلتا الكرتان حمراء؟

بما ان الكره الاولى تم ارجاعها قبل سحب الكره الثانيه

الحدثان مستقلان عن بعضهما البعض

$$1-P(R1)=8/20 \quad , \quad P(R2)=8/20$$

$$2-P(R1\cap R1)=8/20 \ . \ 8/20=2/5 \ . \ 2/5=4/25$$

مثال: اذا كانت $S=\{1,2,3,4\}$ وكانت $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{1,2,4\}$ فهل الحدثين B,A مستقلان؟

SOL: $A\cap B=\{1,2\}\rightarrow P(A\cap B)=2/4=1/2$

But $P(A)=3/4$

$P(B)=3/4$

$$P(A).P(B)=3/4 \ . \ 3/4=9/16\neq P(A\cap B)$$

اذن الحادثان غير مستقلان

قانون الضرب : "Multipliplication law"

١-اذا كانت الاحداث مستقلة

P(AB)=P(A).P(B)

٢-اذا كانت الاحداث غير مستقلة

P(AB)=P(A)P(B/A)

مثال

لنفرض لدينا ثلاثه اكياس متشابهه يحتوي كل منهما على مجموعه يحتوي كل منهما على مجموعه من الكرات الملونه اذا كان الكيس الا ول يحوي (3) كرات خضراء و(4) حمراء (5) صفراء

والكيس الثاني يحوي (5)كرات خضراء و (10) كرات حمراء و(5)كرات صفراء

الكيس الثالث يحوي على (3) كرات خضراء و (2) حمر اء و واحدة صفراءسحبنا بطريقه عشوائيه كيس من هذه الاكياس ثم سحبنا كره واحده ما هي احتماليه ان الكره المسحوبه خضراء ؟

Sol: $p(G|k1)=\frac{5}{12}$

$P(G|k2)=\frac{5}{20}$

$P(G|k3)=\frac{3}{6}$

سحبنا كيس واحد بطريقه عشوائيه

P(k1)=p(k2)=p(k3)

P(G)=p(Glk)=p(k1)+p(GLK2).(k2)+p(Glk3).p(k3)

$$\frac{3}{12}\,\frac{1}{3}+\frac{5}{20}\,\frac{1}{3}+\frac{3}{\mathbf{6}}\,\frac{1}{3}$$

<u>قاعدة بيز:</u> "Bayes Rule" (مهم جدا)اذا كان A1,A2,...Anتمثل حوادث متنافية(منفصلة)و$p(B)\neq 0$

$$p(Ai\backslash B) = \frac{P(Ai)P(B/Ai}{P(A1)P(\,B\backslash A1)+P(A2)P\,(B\backslash A2)+\cdots+P(An)P(B\backslash An)}$$

وتستخدم لايجاد الاحتمالات الشرطيه بدلاله الاحتمالات الاوليه بأستخدام قاعده في شسالضرب والجمع

لنفرض ان لدينا حدثتان متنافيتان A,A1 ضمن فضاء العينه عينه مع حادثه مشتركه B فان احتمال حدوث الحادثه A1 بوجود الحادثه B علما ان B وقع فعلا

مثال: ثلاث ماكنات M,M2,M3 تنتج على التوالي 20%,50%,30% وجد الانتاج الكلي للمصنع عشوائيا اوجد احتمال

١-ان تكون الوحده تالفه

٢-ةاذا كانت الوحده تالفه اوجد احتمال ان تكون من الماكنه الاولى

٣-اذا كانت الوحده تالفه اوجد احتمال انها ليست من الماكنه الاولى

SOL: P(M1)=0.30,P(M2)=O,5O,P(M3)=0.20

P(DLM1)=O.80,P(DLM2)=0.10,P(DLM3)=0.40

1-P(D)=P(M1)P(D\M1)+P(M2)P(D\M2)+P(M3)P(D\M3)

=(0.30)(0.08)+(0.50)(0.10)+(0.20)(0.04)=0.082

2-P(M1\D)=P(M1)P(D/M1)/0.082 =0.293

3-P($M1^C$\D)=P($M2^C$\D)or P(M3\D

=1-p(M1\D) =1-0.293=0.707

تمارين

١-صندوق يحتوي(١٤)كرة منها (٨)حمراء و(٦)زرقاء سحبت كرتان عشوائيا من الصندوق الواحدة وراء الاخرى دون ارجاع(او سحبتا معا)احسب احتمال ان تكون الكرتان حمراء وزرقاء(الاولى زرقاء والثانية حمراء)

٢-اذا القي (زار)مرة واحدة فما هو احتمال ظهور عدد يكون فردي او يقبل السمة على ٣

٣- اذا كان احتمال ان الطالب A يستطيع حل مسالة ما هو $\frac{4}{5}$ وان احتمال الطالب B يستطيع حل نفس المسالة هو $\frac{2}{3}$ واحتمال ان الطالب C يستطيع حلها $\frac{3}{7}$ فاذا ثلاثتهم حاولو حل المسالة فما هو احتمال ان المسالة تحل

٤- مصنع به ثلاثة اقسام A1,A2,A3 ينتج A1 (50%) من الانتاج الكلي من المصابيح ومتوسط نسبة المعيب له (3%) وينتج القسم الثاني A2 (30%) من الانتاج الكلي ونسبة المعيب 4% بينما القسم الثالث A3 فينتج 20% من الانتاج الكلي ونسبة المعيب 5% فاذا اخذنا مصباح عشوائيا اوجد احتمال ان هذا المصباح المعاب هو من انتاج A1