الجامعة المستنصرية / كلية التربية الاساسية

قسم الرياضيات

الفصل الدراسي الثاني

عدد الوحدات والساعات (3)

محاضرات

نظرية الاعداد (Numbers Theory)

اعداد مدرسة المادة : أ.م . تحرير عبد الحسين خزعل

للعام الدراسي (2023 – 2024)

مفردات مادة :

نظرية الاعداد (Numbers Theory)

عدد الوحدات والساعات (3)

- **<u>الانظمة العددية :</u>**

1- بعض من الانظمة العددية القديمة , 2- التمييز بين الاساس والأس, 3- نظام العد العشري , 4- انظمة عددية لأساس يختلف عن العشرة : (نظام العد الثنائي , نظام العد للاساس 3 , 5 , 8 , 11 , - - - 16) .

- **<u>مجموعة الأعداد الطبيعية N :</u>**

1- مسلمات بيانو , 2- علاقة المساوات على N(الاعداد الطبيعية) , 3- تعريف (الجمع ,الضرب ,الطرح , القسمة) على N) , 4- خواص العمليات الحسابية الاربع على N(الجمع , الطرح , الضرب , القسمة) .

- **<u>مجموعة الاعداد الصحيحة I :</u>**

1- مفهومها , 2- انشائها , 3- تعريف (الجمع ,الضرب ,الطرح , القسمة) على I) , 4- خواص العمليات الحسابية الاربع على I (الجمع , الطرح , الضرب , القسمة) , 5- قوانين ضرب الاشارات .

- **<u>القاسم المشترك الاعظم (G.C.D)</u>**

بعض خوارزميات قابلية القسمة (خوارزمية اقليدس)

- **<u>المضاعف المشترك الاصغر (L. C. M)</u>**

التحليل الى العوامل الاولية .

- **<u>الاعداد الاولية</u>**
- **<u>بعض الاعداد الخاصة (الفيثاغورية , الزائدة , الناقصة , التامة , المتحابة)</u>**

المصادر :

1- **اساسيات الرياضيات الحديثة (د. رمضان مسعد بدوي , ط1 .دار الفكر , 2004), عمان , الاردن .**

2- **الاعداد وتطبيقاتها الرياضية والحياتية** (أ.د. فريد ابو زينة , د سمية الصباغ , د. خالد الخطيب)دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة .

3- **نظرية الاعداد (د. دعد الحسيني , د محمد بشير قابيل)جامعة دمشق , منشورات** جامعة دمشق / كلية العلوم , 2007

<u>مدرسة المادة :</u>

أ.م . تحرير عبد الحسين خزعل (2023 – 2024)

الانظمة العددية :

-1 بعض من الانظمة العددية القديمة

نظام العد البابلي (الستيني)

اهم خصائص نظام العد البابلي :

الخاصية الاولى : يوجد رمزان فقط للتعبير عن الاعداد هما :

اولاً // يرمز للعدد 10 في النظام العشرة

ثانيا // يرمز للواحد والستين وجميع الاعداد المرفوعة للأساس 60

مثال//

$60^0 = 1$ والرمز لهذا العدد هو

$60^1 = 60$ والرمز لهذا العدد هو

$60^2 = 3600$ والرمز لهذا العدد هو

.

.

وهكذا لبقية الاعداد المرفوعة للاساس 60

س// كيف نفرق بين 1 , 60 , 3600 , 261000,------- الخ

ج// اما بوضع مسافة او رمز اكبر حجماً كما في المثال التالي :

$61 = 1 + 60$ وبالاعداد البابلية وضع مسافة للدلالة على ان رمز الواحد في خانتين عدديتين مختلفة هما خانة 1 وخانة ال 60

او هنا تم وضع رمز 60 اكبر من رمز 1

حالة ان يأتي رمز الواحد وحده فهنا يجب ان نميز هل هو 1 او 60 او 3600 او ----------الخ

فهنا يجب ان نميز بينهم من خلال وضع رمز لمثلثين صغار فوق بعض وهو يعني صفر , في حالة ان كان هناك خانة عددية قيمتها تساوي صفر, كما في الامثلة التالية :

- ❖ هنا لم نضع وهذا يعني ان = 1
- ❖ هنا قيمة الرمز ي 60 لان قيمة الخانة الاولى 60^0 في العدد تساوي صفر , فيكون العدد = 60 في النظام العشري .
- ❖ مة العدد البابلي في النظام العشري تساوي 3600 أي ان
  3600 =3600 +0 + 0
- ❖ هنا قيمة العدد البابلي في النظام العشري تساوي 3601 أي ان

$3601 = 3600 + 0 + 1$

❖ قيمة العدد البابلي في النظام العشري تساوي 261060 أي ان

$261060 = 261000 + 0 + 60 + 0$

بعض الامثلة لاعداد في نظام العد البابلي (الستيني) :

-1 2

-2 3

-3 12

-4 30

-5 62

الخاصية الثانية : كل الاعداد يعبر عنها بدلالة القوى للعدد 60

$60^0 \quad 60^1 \quad 60^2 \quad 60^3 \quad 60^4$ . . . . . الخ

$1=60^0 \quad 60=60^1 \quad 3600=60^2 \quad 216000=60^3$ - - - - - - - - - - -

ملاحظة/ النظام العشري الحالي اساسه العدد 10

$10^0 \quad 10^1 \quad 10^2 \quad 10^3 \quad 10^4$ - - - - - - - - - -

الخاصية الثالثة : استخدم البابليون مبدأ التكرار في الرموز مثل

الخاصية الرابعة : استخدم البابليون مبدأ تجميع الموز مثل

الخاصية الخامسة : استخدم البابليون خاصية القيمة المكانية للعدد(الخانة)

<u>بعض الامثلة عن كيفية تحويل عدد من نظام العد البابلي الى نظام العد العشرى وبالعكس :</u>

س // حول الاعداد التالية من نظام العد العشري الى نظام العد البابلي :

71 , 132 , 65 , 505

الحل:

ملاحظة 1// عند تحويل عدد من نظام العد العشري الى نظام العد البابلي نستخدم عملية القسمة .

ملاحظة 2// عند تحويل عدد من نظام العد بابلي الى نظام العد العشري نستخدم عملية الضرب .

في السؤال السابق سوف نستخدم الملاحظة الاول .

71÷ 60 = 1 والباقي 11

11 ÷ 1 = 11 والباقي 0

نكتب نواتج القسمة ونبدأ بها من الاسفل للاعلى

11 = في الخانة الاولى 60^0

1 = 60 × 1 = 60 = في الخانة الثانية 60^1

<u>اذن العدد البابلي هو</u>

132 ÷ 60 = 2 والباقي 12

12 ÷ 1 = 12 والباقي 0

12 =

2 =

<u>اذن العدد البابلي هو</u>

65 ÷ 60 = 1 والباقي 5

5 ÷ 1 = 5 والباقي 0

5 =

1 =

<u>اذن العدد البابلي هو</u>

505 ÷ 60 = 8 والباقي 25

25 ÷ 1 = 25 والباقي 0

<u>اذن العدد البابلي هو</u>

وبالعكس عند تحويل العدد البابلي الى عدد بالنظام العشري نستخدم عملية الضرب (الملاحظة الثانية)

505 = 480 + 25 = (60 × 8) + (1 × 25)

<u>تمارين</u>

س // حول الاعداد التالية من نظام العد العشري الى نظام العد البابلي :

725 , 2517 , 375 , 590 , 308 , 6061

س // حول الاعداد التالية من نظام العد البابلي الى نظام العد العشري :

-1

-2

-3

المحاضرة الاولى

التمييز بين الاساس والأس

X^n نسمي (x) الاساس و n الأس او القوى

وتنطق :

x أسّ n

او x مرفوعة للقوى n

مثال /

2^3 2 هي الاساس , 3 هي الأس او القوى 3

3^2 3 هي الاساس , 2 هي الأس او القوى 2

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$3^2 = 3 \times 3 = 9$

$(3^2 \times 4) = (3 \times 3) \times (2 \times 2)$

$= 9 \times 4$

$= 36$

$10^3 \times 5^2 = (10 \times 10 \times 10) \times (5 \times 5)$

$= 1000 \times 25$

$= 25000$

واجب // أوجد قيمة كل مما يأتي :

1- 6^3
2- 2^7
3- $2^5 \times 5$
4- $10^2 \times 9$
5- $10^2 \times 2^3$
6- $3^3 \times 5^3$
7- $125^1 \times 2^0$

ملاحظة : اي عدد (ماعدا الصفر) مرفوع للقوى صفر يساوي 1

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

ملاحظة : يسمى $\frac{1}{x^n}$ كسر اعتيادي

مثال //

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 10^{-1}$$

$$\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

$$2 \times 3^{-4} = 2 \times \frac{1}{3^4}$$

$$= 2 \times \frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

$$= 2 \times \frac{1}{81}$$

$$= \frac{2}{81}$$

واجب 2 //

-1 $9^0 \times 5^{-2}$

-2 $10^{-1} \times 5^{-2} \times 3^0$

-3 $4 \times 2^0 \times 7^{-2}$

الكسر العشري

اذا كان X اي عدد فأن $X^{-n} = \frac{1}{X^n}$ هو كسر اعتيادي

مثال // $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = 0.1$ يسمى كسر عشري

حول الاعداد التالية الى كسور عشرية

1- $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{10\times10} = \frac{1}{100} = 0.01$

2- $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5\times5} = \frac{1}{25} = 0.04$

3- $4 \times 10^{-2} = 4 \times \frac{1}{10^2} = 4 \times \frac{1}{100} = \frac{4}{100} = 0.04$

امثلة // أوجد ما يأتي بصيغة كسر عشري وقرب العدد لاقرب مرتبتين عشريتين :

1- $7 \times 10^{-1} = 7 \times \frac{1}{10^1} = \frac{7}{10} \approx 0.70$

2- $6 \times 6^{-2} = 6 \times \frac{1}{6^2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0.16$

3- $\frac{1}{5} \times 6^{-2} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{6^2} = \frac{1}{5\times36} = \frac{1}{180} \approx 0.01$

واجب // أوجد ما يأتي بصيغة كسر عشري وقرب العدد لاقرب مرتبتين عشريتين :

1- $\frac{2}{3} \times 3^{-2}$

2- $2^4 \times \frac{8}{3^{-1}}$

3- 45×5^{-3}

المحاضرة
الثانية

الانظمة العددية المختلفة

اهداف الفصل :

اولاً //

1- تميز نظام العد العشري عن الانظمة الاخرى.
2- تذكر خواص نظام العد للأساس عشرة .
3- ترسم رموزه العددية .
4- تميز القيمة المكانية للأعداد بهذا النظام .
5- كتابة الاعداد وقراءتها .

ثانياً //

1- تتعرف على الانظمة العددية الغير عشرية .
2- نظام العد الثنائي وخواصه .
3- نظام العد للأساسات (3,5,7,8,11.........16) .
4- التحويل من نظام العد للاساس عشرة الى انظمة عددية اخرى .

اولاً // نظام العد العشري: (System Decimal Numeral)

هو نظام عد له رقم اساس 10 وهو من أكثر أنظمة العد استخداماً وسمي بهذا الاسم لأنه يستخدم الرقم (10) اساساً له أو لانه يملك عشرة أرقام يمثل به الأعداد مهما كبرت ويعد أحد أنظمة العد الموضعية، قيمة الرقم تختلف بأختلاف موقعة داخل العدد.

الخصائص التالية توضح رموز العد الأساسية المستخدمة في النظام العشري والخواص المختلفة له :

١- الرموز العددية (0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6, 7 , 8 , 9) هذه الرموز العشرة يمكن أستخدامها وفق تجميعات لتمثل عدد.

٢- المبدا الاساسي لنظام العد العشري يعتمد على تجميع مجموعات من العشرات ربما يرجع لوجود عشر أرقام في ايدينا الاثنين، فـ "الوحدات العشر" يمكن التعبير عنها "بعشرة" واحدة " والعشرات العشر " يمكن التعبير عنها " بمائة واحدة " والمئات العشر نعبر عنها "بألف" واحد .... وهكذا.

٣- القيمة المكانية place value كل مكان يشغله الرقم في العدد له قيمة تتوقف على مكان هذا الرقم في العدد.

مثال العدد 6523 كل رقم فيه تتوقف قيمته على مكانه في هذا العدد.

3 وحدات ، 2 عشرات ، 5 مئات ، 6 الألف

٤- الأضافة والتضعيف العدد يتكون من مجموعة أرقام وكل رقم في هذا العد تحدد قيمته بضرب هذا الرقم في القيمة المكانية التي يقع فيها هذا العدد.

مثال :

القيمة المكانية	احاد	عشرات	مئات	أحاد الالوف	
الأرقام في العدد	3	2	5	6	
قيمة الرقم في العدد	1×3	10×2	100×5	1000×6	

والتعبير عن العدد كمجموع حواصل ضرب كل رقم في هذا العدد بقيمة الموضع الذي يشغله هذا الرقم تسمى (الصيغة الممتدة)

مثال: الصيغة الممتدة للعدد 83507 هي:

$$10000\times 8 + 1000\times 3 + 100\times 5 + 10\times 0 + 1\times 7$$

٥- الاعداد من 100الى 900 أسماؤها مركبة من ثلاثة مقاطع (المقطعان الأولان للأحاد والعشرات والمقطع الأخير للمئات) وتنطق بدأ من المئات فالاحاد فالعشرات .

نظام العد الثنائي

- يلعب نظام العد الثنائي دوراً رئيساً في الحاسبات الألكترونية والأجهزة الرقمية المختلفة , فهي تستخدم لارقام (1 , 0) فقط
  - يمثل ال 0 حالة غياب الأشارة الكهربائية في الدوائر المستخدمة .
  - يمثل ال 1 حالة الحضور لتلك الاشارة الكهربائية.

اهم خصائص نظام العد الثنائي :

1- رموزه (1 , 0) فقط
2- يعتمد على مبدأ التكرار والتجميع .
3- تعتمد قيمة الرمز على القيمة المكانية له .
4- اساس هذا النظام هو 2 .
5- تختلف قيمة الرمز او العدد باختلاف موقعه في الخانة او المرتبة العددية .

جدول القيمة المكانية لنظام العد الثنائي

القيمة المكانية	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	الخ ....
قيمة العدد	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	....

مثال / العدد $(1111)_2$ في نظام العد الثنائي يساوي :

$$(1111)_2 = (2^0 \times 1) + (2^1 \times 1) + (2^2 \times 1) + (2^3 \times 1)$$

$$= (1 \times 1) + (2 \times 1) + (4 \times 1) + (8 \times 1)$$

$$= 1 + 2 + 4 + 8$$

$= (15)_{10}$ في نظام العد العشري

تحويل العدد من نظام العد الثنائي الى نظام العد العشري , وبالعكس :

ملاحظة 1 // عند تحويل العدد من نظام العد العشري الى نظام عدد يختلف باساسه عن نظام العد العشري , نستخدم **عملية القسمة** على قوى ذلك النظام المختلف باساسه عن نظام العد العشري .

ملاحظة 2 // عند تحويل العدد من نظام عدد يختلف باساسه عن نظام العد العشري , الى نظام العد العشري , نستخدم **عملية الضرب** في قوى ذلك النظام المختلف باساسه عن نظام العد العشري .

ملاحظة 3 // الملاحظة 1 والملاحظة2 , تطبق على جميع الانظمة العددية والتي تستخدم القيمة المكانية في العدد والتي لها اساس معين .

ملاحظة 4 // عند تحويل العدد من نظام عدد يختلف باساسه عن نظام العد العشري الى اخرنظام عد اخرغير النظام العشري ايضاً, يكون الحل بخطوتين :

الخطوة الاولى : يحول الى نظام العد العشري .

الخطوة الثانية : يحول العدد العشري الى نظام العد المطلوب بالسؤال.

مثل // حول العدد $(1111)_2$ الى نظام العد البابلي .

او حول العدد $(1241)_5$ الى نظام العد للأساس 8 .

مثال 1 // حول الاعداد التالية من نظام العد الثنائي الى نظام العد العشري .

طرقة الحل // اي ملاحظة نستخدم ؟

ج) نستخدم ملاحظة2

جدول القيمة المكانية لنظام العد الثنائي

القيمة المكانية	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	.... الخ
قيمة العدد	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	....

1) $(1001)_2 = [(1 \times 1) + (0 \times 2) + (0 \times 4) + (1 \times 8)]$

$= 1 + 0 + 0 + 8$

$= \ 9$ في نظام العد العشري

أنظمة عد اخرى لأساسات مختلفة

المحاضرة
الثالثة+الرابعة

1- نظام العد للأساس 3 // عدد رموزه 3 , اساسه 3
2- نظام العد للأساس 5 // عدد رموزه 5 , اساسه 5
3- نظام العد للأساس 7// عدد رموزه 7 , اساسه 7
4- نظام العد للأساس 8 // عدد رموزه 8 , اساسه 8
5- نظام العد للأساس 12// عدد رموزه 12 , اساسه 12
6- نظام العد للأساس 16// عدد رموزه 16 , اساسه 16

نظام العد للأساس 3

اهم خصائصه:

6- رموزه (0 , 1 , 2) فقط
7- يعتمد على مبدأ التكرار والتجميع .
8- تعتمد قيمة الرمز على القيمة المكانية له .
9- اساس هذا النظام هو 3 .
10- تختلف قيمة الرمز او العدد باختلاف موقعه في الخانة او المرتبة العددية .

ويقرأ العد للاساس 3 من اليسار الى اليمين كما في المثال التالي :

20201 اساس 3 , او $(20201)_3$

جدول القيمة المكانية لنظام العد للاساس 3
عدد رموزه 3 (0 , 1 , 2)

القيمة المكانية	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	.... الخ
قيمة العدد	1	3	9	27	81	243	729	2187	....

مثال 1 // حول الاعداد التالية من نظام العد للاساس 3 الى نظام العد العشري .

طريقة الحل // اي ملاحظة نستخدم ؟

ج) نستخدم ملاحظة 2

1- $(2100)_3 = (0*1)+(0*3)+(1*9)+(2*27)$

$= 0+0+9+54$

$= 63$

1- $(11010)_3 = (0*1)+(1*3)+(0*9)+(1*27)+(1*81)$

$= 0+3+0+27+81$

$= 111$

2- $(122)_3=(2*1)+(2*3)+(1*9)$

$= 2+6+9$

$=17$

مثال /2 حول العدد 33 من نظام العد العشري الى العدد للاساس 3 :

طريقة الحل // اي ملاحظة نستخدم ؟

ج) نستخدم ملاحظة 1

القيمة المكانية	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	.... الخ
قيمة العدد	1	3	9	27	81	243	729	2187	....

الطريقة الاولى : باستخدام القسمة على اكبر القوى للاساس 3 تقبل القسمة على العدد المعطى

$33 \div 27 = 1$ الباقي 6
$6 \div 9 = 0$ الباقي 6

$6 \div 3 = 2$ الباقي 0

$0 \div 1 = 0$ الباقي 0

$= (1020)_3$

الطريقة الثانية : باستخدام القسمة المتكررة على اساس العدد

$33 \div 3 = 11$ الباقي 0
$11 \div 3 = 3$ الباقي 2

$3 \div 3 = 1$ الباقي 0

$1 \div 3 = 0$ الباقي 1

ويكتب العدد $= (1020)_3$

<u>مثال 3 // حول العدد 17 الى نظام العد للاساس 3</u>

الطريقة الاولى : باستخدام القسمة على اكبر القوى للاساس 3 تقبل القسمة على العدد المعطى

17/9 =1 --------8

8/3 =2 --------2

2/1 = 2 -------0

$=(122)_3$

الطريقة الثانية : باستخدام القسمة المتكررة على اساس العدد

17/3 = 5-----------------2

5/3 = 1------------2

1/3 =0 ------1

$=(1\ 2\ 2)_3$

<u>نظام العد للأساس 5</u>

<u>اهم خصائصه:</u>

2- رموزه (0 , 1 , 2 , 3 , 4) فقط
3- يعتمد على مبدأ التكرار والتجميع .
4- تعتمد قيمة الرمز على القيمة المكانية له .
5- اساس هذا النظام هو 5 .
6- تختلف قيمة الرمز او العدد باختلاف موقعه في الخانة او المرتبة العددية .

ويقرأ العد للاساس 5 من اليسار الى اليمين كما في المثال التالي :

13201 اساس 5 , او $(13201)_5$

جدول القيمة المكانية لنظام العد للأساس 5

عدد رموزه 5 (0 , 1 , 2 , 3 , 4)

القيمة المكانية	5^0	5^1	5^2	5^3	5^4	5^5	5^6	∞
قيمة العدد	1	5	25	125	625	3125	15625	

مثال 1 : حول العدد 230 من نظام العد العشري الى نظام العد للاساس 5

الطريقة الاولى : باستخدام القسمة على اكبر القوى للاساس 5 تقبل القسمة على العدد المعطى

230/125 =1 -------------105

105/25 =4 --------------5

5/5 =1 --------------0

0/1 =0 ---------------0

$=(1410)_5$

الطريقة الثانية : باستخدام القسمة المتكررة على اساس العدد

230/5 =46----------------0

46/5 =9------------1

9/5 =1--------4

1/5 =0------1

$(1410)_5$

نظام العد للأساس 12

اهم خصائصه:

1- رموزه (0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , A, B)
2- يعتمد على مبدأ التكرار والتجميع .
3- تعتمد قيمة الرمز على القيمة المكانية له .
4- اساس هذا النظام هو 12 .
5- تختلف قيمة الرمز او العدد باختلاف موقعه في الخانة او المرتبة العددية .

ويقرأ العدد للاساس 12 من اليسار الى اليمين كما في المثال التالي :

$(29031)_{12}$ او , 12 اساس 29031

جدول القيمة المكانية لنظام العد للاساس 12

عدد رموزه 12 (0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , A , B)

القيمة المكانية	12^0	12^1	12^2	12^3	∞
قيمة العدد	1	12	144	1728	....

1- $(1B1)_{12} = (1*1) + (B*12) + (1*144)$ B=11

$= 1 + 12B + 144$

$= 1 + 132 + 144$

$= 277$

$2 - (11A)_{12} = (A \times 1) + (1 \times 12) + (1 \times 144)$ **A=10**

= 10+12+144

=166

للتحقق نجري عملية القسمة على العدد العشري 166 الى نظام العد للاساس 12

<u>الطريقة الاولى :</u> القسمة على اكبر قوى

$166 \div 144 = 1$ ---------22

$22 \div 12 = 1 - - - - - - 10$

$10 \div 1 = 10 - - - - - - - 0$

$(11(10))_{12}$ --------------- وبالتالي ______ $(11A)_{12}$

<u>الطريقة الثانية : القسمة المتكررة</u>

166 ÷ 12 = 13 ---------- 10

13 ÷ 12 = 1 ----------- 1

1 ÷ 12 = 0 ---------- 1

$= (11A)_{12}$

<u>اجب ب صح او خطأ , وصحح الخطأ ان وجد :</u>

1- هل العدد $(1111)_{10}$ ج) نعم

2- هل العدد $(4C0A)_{12}$ صحيح ؟ ج) خطأ لأن C ليس من رموز نظام العد اساس 12

3- هل العدد $(100210)_2$ ؟ ج) خطأ لأن 2 ليس من رموز نظام العد اساس 2

4- هل $(1110)_{12} = (11A)_{12}$ ج) خطأ لان لايجب كتابة رمز العشرة كا 10 بل نعطي رمز واحد هو A

بعض الامثلة المتفرقة عن الانظمة العددية المختلفة الاساسات //

12^3	12^2	12^1	12^0
1728	144	12	1

1- $(101A)_{12} = (A*1)+(1*12)+(0*144)+(1*1728)$

$= A+12+0+1728$

$=10+12+0+1728$

$=1750$

2- $(1B1)_{12} = (1*1)+(B*12)+(1*144)$

$= 1 + 12B + 144$

$= 1+132+144$

$= 1595$

3- $(29B01)_{12} = (1*1)+(0*12)+(11*144)+(9*1728)+(2*20736)$

$=1+0+1584+15552+41472$

=

3^4	3^3	3^2	3^1	3^0
81	**27**	**9**	**3**	**1**

4- $(1200)_3 = (0*1)+(0*3)+(2*9)+(1*27)$

$= 0+0+18+27$

$= 45$

الطريقة الاولى / القسمة على اكبر قوى

45/27=1--------18

18/9=2---------0

0/3=0--------0

0/1=0------0

$(1200)_3$

الطريقة الثانية : القسمة المتتالية

45/3=15------------0

15/3=5----------0

5/3=1--------2

1/3=0-----1

5- $(10A)_{12} =(A*1)+(0*12)+(1*144)$

$= A+0+144$

$=10+144$

$=154$

6- $(B3)_{12} =(3*1)+(11*12)$

$=3+132$

$=135$

12^2	12^1	12^0
144	12	1

7- $(9B0)_{12}=(0*1)+(B*12)+(9*144)$

$= 0+(11*12)+(9*144)$

= 132+1296

=1428

8- $(1C)_{16}$ = (C*1)+(1*16)

=12+16

=28

9- $(101)_2$=(1*1)+(0*2)+(1*4)

= 1+0+4

=5

16^2	16^1	16^0
256	16	1

10- $(2CA)_{16}$=(10*1)+(12*16)+(2*256)

=10+192+512

=714

س1/ حول العدد العشري 95 الى نظام العد للاساس 7

حل س1 //

جدول القيمة المكانية لنظام العد للاساس 7

عدد رموزه 7 (0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6)

∞	7^4	7^3	7^2	7^1	7^0	القيمـــــــة المكانية
………	2401	343	49	7	1	قيمة العدد

95 / 49 = 1 ---------46

46 / 7 = 6 --------- 4

4 / 1 = 4-----------0

$(164)_7$

س2 / حول العد $(10110)_7$) الى نظام العد الثنائي

حل س 2 // الخطوة الاولى : نحول العدد $(10110)_7$

$$(10110)_7=(0*1)+(1*7)+(1*49)+(0*343)+(1*2401)$$

$$= 0+7+49+0+2401$$

$$= 2457$$

الخطوة الثانية : نحول العدد العشري 2457 الى عدد بنظام الثنائي

جدول القيمة المكانية لنظام العد الثنائي

عدد رموزه 2 (0, 1)

2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	**القيمـــــــة المكانية**
2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1	قيمة العدد

باستخدام الطريقة الاولى القسمة على اكبر قوى للنظام الثنائي يقبل القسمة على العدد

2457 /2048= 1 ----------- 409

409 / 1024 **= 0---------409**

409 / 512 = 0 -------409

409 / 256 = 1 ----- 153

153 / 128 = 1----------25

25 / 64 = 0 --------25

25/ 32 = 0 ------25

25 / 16 = 1 -------9

9 / 8 = 1 ---------1

1/ 4 = 0 ---------1

1 / 2 = 0 ---------1

1 / 1 = 1 --------0

$(100110011001)_2$

س3/ حول العدد 120 من نظام العد العشري الى نظام العد للاساس 8

الحل س3 // الطريقة الثانية : القسمة المتتالية على 8

120 / 8 = 15 --------0

15 / 8 = 1 --------7

1/8=0----------1

= $(170)_8$

جدول القيمة المكانية لنظام العد للاساس 8

عدد رموزه 8 (0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7)

القيمة المكانية	8^0	8^1	8^2	8^3	8^4	∞
قيمة العدد	1	8	64	512	4096	....

120/64=1-------56

56/8=7--------0

0/1=0-------0

= $(170)_8$

واجب //

س1//حول العدد 2(101) الى عدد للاساس 8

س2//حول العدد 7(124) الى عدد للاساس 12

س3 // حول العدد 524 من نظام العد العشري الى نظام العد للاساس 16

س4// حول العدد البابلي  الى عدد في نظام العد للاساس 3

س5/ حول العدد $(107)_8$ الى نظام العد العشري

س6/ حول العدد $(10A5)_{12}$ الى نظام العد للاساس 16

س7/ حول العدد $(5DA1)_{16}$ الى نظام العد للاساس 12

س8/ حول العدد $(1220)_3$ الى نظام العد للاساس 5

س9/ حول العدد $(164)_7$ الى نظام العد العشري

جدول القيمة المكانية لنظام العد الستيني

عدد رموزه 2 ()

∞	60^4	60^3	60^2	60^1	60^0	القيمة المكانية
....	12960000	216000	3600	60	1	قيمة العدد

جدول القيمة المكانية لنظام العد العشري

عدد رموزه 10 (0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9)

∞	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	القيمة المكانية
....	100000	10000	1000	100	10	1	قيمة العدد

جدول القيمة المكانية لنظام العد الثنائي

عدد رموزه 2 (0, 1)

∞	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	القيمة المكانية
....	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1	قيمة العدد

جدول القيمة المكانية لنظام العد للاساس 3

عدد رموزه 3 (0 , 1 , 2)

.... الخ	3^7	3^6	3^5	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0	لقيمة المكانية
....	2187	729	243	81	27	9	3	1	قيمة العدد

جدول القيمة المكانية لنظام العد للاساس 5

عدد رموزه 5 (0 , 1 , 2 , 3 , 4)

∞	5^6	5^5	5^4	5^3	5^2	5^1	5^0	القيمة المكانية
	15625	3125	625	125	25	5	1	قيمة العدد

جدول القيمة المكانية لنظام العد للاساس 7

عدد رموزه 7 (0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6)

القيمة المكانية	7^0	7^1	7^2	7^3	7^4	∞
قيمة العدد	1	7	49	343	2401	....

جدول القيمة المكانية لنظام العد للاساس 8

عدد رموزه 8 (0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7)

القيمة المكانية	8^0	8^1	8^2	8^3	8^4	∞
قيمة العدد	1	8	64	512	4096	....

جدول القيمة المكانية لنظام العد للاساس 12

عدد رموزه 12 (0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , A , B)

القيمة المكانية	12^0	12^1	12^2	12^3	∞
قيمة العدد	1	12	144	1728	....

جدول القيمة المكانية لنظام العد للاساس 16

عدد رموزه 16 (0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , A , B , C , D , E , F)

القيمة المكانية	16^0	16^1	16^2	16^3	16^4	∞
قيمة العدد	1	16	256	4096	65536	....

حل س9/ حول العدد $(164)_7$ الى نظام العد العشري

جدول القيمة المكانية لنظام العد للاساس 7

عدد رموزه 7 (0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6)

قيمة العدد	1	7	49	343	2401	....
القيمة المكانية	7^0	7^1	7^2	7^3	7^4	∞

$(164)_7=(4*1)+(6*7)+(1*49)$

$= 4+42+49$

$= 95$

حل س5/ حول العدد $(107)_8$ الى نظام العد العشري

جدول القيمة المكانية لنظام العد للاساس 8

عدد رموزه 8 (0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7)

القيمة المكانية	8^0	8^1	8^2	8^3	8^4	∞
قيمة العدد	1	8	64	512	4096	....

$(107)_8= (7*1)+(0*8)+(1*64)$

$= 7+0+64$

$=71$

حل س6/ حول العدد $(10A5)_{12}$ الى نظام العد للاساس 16

الملاحظة 4/ يكون الحل بخطوتين:

الخطوة الاولى / نحول العدد من اساس 12 الى عدد عشري

الحل //

جدول القيمة المكانية لنظام العد للاساس 12

عدد رموزه 12 (0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , A , B)

القيمة المكانية	12^0	12^1	12^2	12^3	∞
قيمة العدد	1	12	144	1728	....

A= 10 B= 11

$(10A5)_{12} = (5*1)+(A*12)+(0*144)+(1*1728)$

= 5+120+0+1728

= 1853

الخطوة الثانية / نحول العدد العشري 1853 الى عدد اساسه 16

جدول القيمة المكانية لنظام العد للاساس 16

عدد رموزه 16 (0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , A , B , C , D , E , F)

القيمة المكانية	16^0	16^1	16^2	16^3	16^4	∞
قيمة العدد	1	16	256	4096	65536	....

A = 10 B = 11 C = 12 D = 13 E = 14 F = 15

1- طريقة اكبر القوى

1853/256 = 7 ---------61
61/16=3---------13
13/1= 13--------0

$= (73D)_{16}$

مجموعة الاعداد الطبيعية ج1

المحاضرة الخامسة

مجموعة الاعداد الطبيعية :

في هذه المحاضرة سوف نتعرف على :

1- تعريف مجموعة الاعداد الطبيعية N

2- نشأت مجموعة الاعداد الطبيعية N

3- التعرف على مسلمات بيانو للأعداد الطبيعية

4- علاقة المساواة على N

5- تعريف عملية الجمع على N

6- تعريف عملية الضرب على N

6- **كيفية ايجاد العدد 0**

الأعداد الطبيعية:

العدد الطبيعي هو كل عدد صحيح موجب {١، ٢، ٣، ...} ويرمز له برمز (N^*) وهي مجموعة اعداد غير منتهية ويمثل (١) اصغرها وهي لا تتضمن (الصفر) وان اضافة الصفر و وجودة في المجموعة الاعداد الطبيعية قضية مستحدثة حيث كانت الاعداد الطبيعية تخلو من (الصفر) أي ان

$$N^* = N - (0)$$

إمـا

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

وهي مجموعة الأعداد الطبيعية وهي مجموعة غير منتهية ويمثل (الصفر) اصغر الاعداد في N

ومن المعروف ان البناء الرياضي يقوم على مفردات غير معرفة ومفردات معرفة ثم على مسلمات غير مبرهنة وقد عرف الانسان مجموعة الاعداد الطبيعية من خلال (مسلمات بيانو) عن الاعداد الطبيعية.

' مسلمات بيانو ' بديهيات بيانو

هي مجموعة من البديهيات المتعلقة بالأعداد الطبيعية اوجدها في القرن التاسع عشر عالم الرياضيات الايطالي (جيوسيبي بيانو) استخدمت هذه البديهيات كما هي وبدون تعديلات.

مسلمات بيانو:

١ – الواحد موجود في الاعداد الطبيعية ويرمز له بالرمز (١).

٢ – اذا كان(a) عدد طبيعي في N فأن العدد الذي يليه ايضاً في N ويرمز له (a^*)أي ان $a^* = a + 1$ ويسمى a مقدماً اما a^* ***** التالي.

٣ – ليس للعدد (١) مقدم أي هو العدد الطبيعي الوحيد الذي ليس له مقدم ولا يلي أي عدد طبيعي.

٤ – اذا كان تاليا عددين متساوين فأن مقدميها متساويان أي اذا كان

$$a^* = b^* \rightarrow a = b$$

٥ – اذا وجدت مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الطبيعية N^* بحيث تحتوي هذه المجموعة على العدد (١) وفيها لكل عنصر تالي فأن هذه المجموعة الجزئية تساوي مجموعة الاعداد الطبيعية أي اذا ان:

$$c \subset N^*, 1 \epsilon c \, \forall . a \epsilon c \, \sqsubseteq \, a^* \epsilon c$$

فأن

$$N^* = c$$

ملاحظة//

تسمى المسلمة الخامسة (مبدأ الأستقراء الرياضي) حيث من المسلمة الاولى نتعرف ع العدد (١). و من المسلمة الثانية نتعرف على العدد التابع ويرمز له *a ،

<u>كيفية تكوين مجموعة الاعداد الطبيعية من خلال مسلمات بيانو :</u>

المسلمة الاولى ---------------- 1

المسلمة الثانية -------- $a^*=a+1$

$1^* = 1+1$ ---------2

$2^* = (1+1)+1 = 2+1$ ----------3

$3^* =((1+1)+1)+ 1 = 3+1$--------4

-

-

-

<u>علاقة المساواة على N^* الاعداد الطبيعية</u>

- اذا كان $x, y \in N^*$ فتكتب $x = y$

هذا يدل على ان x, y رمزين لنفس العدد الطبيعي

- اما اذا كان $x \neq y$ ، $x, y \in N^*$

هذا يدل على ان x, y هما رمزان لعددين مختلفين.

- ان علاقة المساواة على N^* هي علاقة (تكافؤ) أي تحقق الخواص التالية:

١ – علاقة انعكاسية حيث

$x = x$ لكل $x \in N^*$

٢ – علاقة متناظرة حيث

$y = x$ تتضمن $x = y$

٣ – علاقة متعدية لأنه اذا كانت

$X = y, \quad y = z$ فأن $\rightarrow \quad x = z$

لكل $x, y, z \in N^*$

<u>تعريف الجمع على N^*</u>

من خلال المسلمة الثانية من مسلمات بيانو نتعرف على عملية الجمع (+)

$$\forall \ x \epsilon N^*$$

$$\forall \ x \epsilon N^* \ \exists \ x^* \epsilon N^* : x^* = 1 + x$$

حيث أن

$$x + 1 = x^*$$

$$x + \ y^* = (x + y)^*$$

مثـال١ :

$$5 = 4^* = \qquad 4 + 1 = 5$$

مثـال٢ : اذا كانت $x = \ 3 \ \ , \ \ y^* = 5$

$$x + y^* = (x + y)^*$$

$$3 + \ 5^* = (3 + 5)^*$$

$$3 + (5 + 1) = (3 + 5)^*$$

$$3 + (6) = \ (8)^*$$

$$9 = 8 + 1$$

$$9 = 9$$

تعريف الضرب على N^*

$$x.1 = x$$

مثال ١:

$$3.1 = 3$$

$$x.y^* = xy + x \rightarrow x(y+1) = xy + x$$

$$y^*.x = (y+1)x \rightarrow y.x + x$$

مثال ٢:

$$5.6^*$$

$$= 5.(6+1) = 5.6 + 5$$

$$= 5.(7) = 30 + 5$$

$$= 35 = 35$$

مثال٣:

$$3^*.2 \qquad y.x + x$$

$$= (3+1).2 = 3.2 + 2$$

$$= (4).2 = 6 + 2$$

$$= 8 = 8$$

خواص الاعداد الطبيعية:

١- خواص عملية الجمع على N

١. الانغلاق: تعني انه عند جمع أي عددين طبيعي فأن ناتج جمعها يكون عدداً طبيعياً أي أن

$$x, y \epsilon N \rightarrow x + y = Z \epsilon N$$

مثال

$$4, 6 \epsilon N \rightarrow 4 + 6 = 10 \epsilon N$$

٢. خاصية الابدال: أي ان ناتج جمع العددين الطبيعيين يبقى ثابتاً اذا بدلنا موقع العدد الاول مكان الثاني والعدد الثاني مكان العدد الاول أي ان

$$x + y = y + x$$

٢. خاصية الابدال: أي ان ناتج جمع العددين الطبيعيين يبقى ثابتاً اذا بدلنا موقع العدد الاول مكان الثاني والعدد الثاني مكان العدد الاول أي ان

$$x + y = y + x$$

مثال: اذا كان $x = 2\ ,\ \ y = 3$

$$2 + 3 = 3 + 2$$

$$5 = 5$$

٣. خاصية التجميع:

٤. اذا كان $x, y, z \in N^*$ فأن

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

مثال

$$(5 + 2) + 3 = 5 + (2 + 3)$$

$$7 + 3 = 5 + 5$$

$$10 = 10$$

٥. خاصية الاختزال:

$$x, y, z \in N^*$$

$$x + y = z + y \quad \rightarrow x = z$$

مثال//

$$x = 1, \qquad y = 2$$

$$x + y = z + y$$

$$1 + 2 = z + 2$$

$$3 = z + 2$$

$$-2 + 3 = z \quad \rightarrow z = 1$$

$$x = z \leftrightarrow z = x$$

٦. خاصية التوزيع: أي توزيع عملية الضرب على عملية الجمع

$$x\,(y+z) = x\,.\,y + x\,.\,z$$

$$x = 2, \qquad y = 5, \qquad z = 3$$

$$x\,(y+z) = x\,.\,y + x\,.\,z$$

$$2\,(5+3) = 2\,.\,5 + 2\,.\,3$$

$$2.\,(8) = 10 + 6$$

$$16 = 16$$

٧. خاصية الترتيب

$$n < m \leftrightarrow n + k < m + k$$

بإضافة (k) للطرفين

مثال:

$$2 < 3 \leftrightarrow 2 + 1 < 3 + 1$$

اضافة (١) الى الطرفين $k = 1$

ملاحظة: صادقة $0 \leq 0$

كاذبة $0 < 0$

٨. خاصية الصفر:

$$a + b = 0 \leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$$

فقط اذا كان العددين صفر

(وبالأعداد الصحيحة) $a \neq b \quad -2 + 2 = 0$

ملاحظة: لم يكن هنا عنصر محايد لعملية الجمع على الاعداد الطبيعية نفرض ان العنصر المحايد هو العنصر (c) الذي يحقق الخاصية التالية لأي عدد طبيعي مثل (x) حيث ان $x \epsilon N^*$ فأن الخاصية الابدالية

$$x+c = c+x = x$$

أي اذا كان c عنصر محايد و $x = 1$ فأن $x+1 = 1$

وبما ان الاعداد الطبيعية لا تحتوي على عنصر محايد فأقتضت الحاجة لتوسيع المجموعة الطبيعية بإضافة (الصفر) لها بعد تعريفة $0 + 0=0$

$$a = a + 0 = 0 + a : a \epsilon N^*$$

وهكذا **** المجموعة الاعداد الطبيعية التي اضيفت لها (الصفر) ورمزها

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

بينما ان

$$N^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

مجموعة الاعداد الطبيعية ج2

المحاضرة السادسة

في هذه المحاضرة سوف نتعرف على :

1 – عملية الطرح على N , خواص عملية الطلرح على N .

2- عملية الضرب على N , خواص عملية الضرب على N .

3- عملية القسمة على N , خواص عملية القسمة على N .

٢ – عملية الطرح على N

تستطيع تعريف عملية الطرح من خلال عملية الجمع وكما يلي:

تعريف: اذا كان x, y عددين طبيعيين نقول ان x اصغر من $x < y$

وجد عدد مثل (c) ينتمي الى $x, y, c \in N$ ،

بحيث $x + c = y$

مثال ١: لتكن $5 = y$ ، $3 = x$

$$X < y \Rightarrow 3 < 5$$

يوجد عدد مثل (c) حيث $c=2$ يحقق الأتي

$$x + c = y$$

$$3 + 2 = 5$$

وذلك فأن

$$2 = 5 - 3$$

مثال 2: $x=5\ ,\ y=8$

$$X < y \Rightarrow 5 < 8$$

حيث من الممكن ايجاد عدد يحقق

$$8 = 5 + 3 \quad \Rightarrow \quad 8 - 5 = 3$$

خواص عملية الطرح على N

١. ليست مغلقة: أي انه اذا كان $x, y \in N$ فليس بالضرورة ان يكون $x - y \in N$

مثال:

$$6, 9 \in N$$

$6 - 9 =$ -3 فأن $-3 \notin N$

٢. ليست ابدالية: $x - y \neq y - x$

$$3 - 5 \neq 5 - 3$$

فقط اذا كان $x = y$ يكون ابدالية

٣. ليست تجميعية

$$(x - y)\ z \neq x - (y - z)$$

$$(2 - 5) - 4 \neq 2 - (5 - 4)$$

$$(-3) - 4 \neq 2 - 1$$

$$-7 \neq 1$$

٤. لا يوجد عنصر محايد لعملية الطرح على N

$$x - 0 \neq 0 - x$$

$$x \neq -x$$

$$3 - 0 \neq 0 - 3$$

$$3 \neq -3$$

اذن هي ليست ابدالية لذلك لا يوجد لها عنصر محايد.

٣ - <u>عملية الضرب على N</u>

تعريف: اذا كان $x, y \in N$ فان حاصل ضرب

x.y=x+x+x+....... (y من المرات)

مثال: 3.2=3+3 =6

7.5 = 7+ 7+ 7+ 7+ 7= 35

ملحوظة: أي ان عملية الضرب عملية جمع متكرر ولها نفس خصائص علمية الجمع.

خواص عملية الضرب على N

١. خاصية الانغلاق: اذا كان $x, y \in N$

$$\Rightarrow x \,.\, y \in N$$

مثال:

$$3, 4 \in N$$

$$3 \,.\, 4 = 12 \in N$$

٢. خاصية الابدال: اذا كان

$$x, y \in N \Rightarrow x \,.\, y = y \,.\, x$$

مثال:

$$3 \,.\, 5 = 5.3$$

$$15 = 15$$

٣. خاصية التجميع: اذا كان $x, y, z, \in N$

$$(x \,.\, y).\, z = x \,.\, (y \,.\, z)$$

مثال:

$$3 \,.\, 5 \,.\, 6$$

$$(3 \,.\, 5).\, 6 = 3(5 \,.\, 6)$$

$$(15) \,.\, 6 = 3(30)$$

$$90 = 90$$

٤. خاصية التوزيع أي توزيع عملية الضرب على الجمع

$$x \,.\, (y + z) = x \,.\, y + x \,.\, z$$

مثال:

$$3.\, (5 + 3) = 3 \,.\, 5 + 3 \,.\, 3$$

$$= 15 + 9$$

$$= 24$$

٥. خاصية الترتيب

$$n < m \,, k \neq 0 \;\rightarrow n\, k < mk$$

مثال:

$$n = 5, \qquad m = 8, \qquad n < m$$

$$5 < 8$$

ليكن $k = 2$ اذن $5.2 < 8.2$

$$10 < 16$$

٦. العنصر المحايد:

العدد (1) هو العنصر المحايد لعملية الضرب على N

$$x \,.\, 1 = 1 \,.\, x = x$$

مثال

$$3 \,.\, 1 = 1 \,.\, 3 = 3$$

4 – القسمة على N

اذا كان $x, y \in n$ ووجد عدد مثل $z \in n$

بحيث $x . z = y$

فان z تسمى خارج قسمة y على x

وتكتب $z = y \div x$

يسمى (y) المقسوم، (x) المقسوم عليه (z) الناتج

مثال:

$$27 \div 3 = 9 \Rightarrow 9 \times 3 = 27$$

حيث تعتبر القسمة عكس عملية الضرب والقسمة عبارة عن طرح متكرر

$$12 \div 3 =$$

$$12 - 3 = 9$$

تم طرح عدد (٣) $\quad 9 - 3 = 6$

٤ مرات من $\quad 6 - 3 = 3$

المقسوم وهو (١٢) $\quad 3 - 3 = 0$

خواص عملية القسمة على N

لعملية القسمة نفس خواص عملية الطرح على N

وهي:

١. ليست ابدالية.

٢. ليست تجمعية.

٣. ليست مغلقة.

٤. لا يوجد لها عنصر محايد.

المحاضرة السابعة

مجموعة الاعداد الصحيحة

نتعرف في هذه المحاضرة على :

1- مفهوم الاعداد الصحيحة .

2– انشاء مجموعة الاعداد الصحيحة.

3- عملية الجمع على مجموعة الاعداد الصحيحة ,خواص الجمع على I . .

4- عملية الطرح على مجموعة الاعداد الصحيحة , خواص الطرح على I .

5- عملية الضرب على مجموعة الاعداد الصحيحة , خواص الضرب على I .

6- قوانين الجمع وضرب الاشارات .

مفهوم الأعداد الصحيحة:

المعادلة $a=b+x$ حيث a , b أعداد طبيعية لها حل في مجموعة الأعداد الطبيعية أذا كان $a \geq b$ والحل هو $x = a - b$

Ex:

$5 = 3 + x \Rightarrow x = 5 - 3 = 2$

اما أذا كانت $a < b$ فلا يوجد حل لها في الاعداد الطبيعية .

Ex:

$3 = 5 + x \Rightarrow x = 3 - 5 = {}^{-}2$

حيث (-2) لا تنمتي الى الاعداد الطبيعية

لذلك ظهرت الحاجة الى توسيع مجموعة الأعداد الطبيعية .

أنشاء الأعداد الصحيحة:

$$N \times N = \{ (a , b) : a , b \in N \}$$

ولتكن (~) علاقة على المجموعة $N \times N$ أي

$$(a , b) \sim (c , d) \leftrightarrow a+d = b+c$$

Ex:

$$(2,3) \sim (6,5) \leftrightarrow 3 + 5 = 2 + 6 = 8$$

وهذة علاقة تكافؤ (~) أي (أنعكاسية و متناظرة ومتعدية)

وتجزئة المجموعة N × N الى مجموعة جزئية لكل منها يسمى صف تكافؤ ويرمز له [a , b] ويدعى عدد صحيحاً وأستناداً الى ذلك :

0,1) , (1,2) [0,0] = { (0,0) , (1,1) ,(2,2) } = 0

[0 ,1] = { (,(2,3) } = -1

$$[1,0] = \{ (1,0) , (2,1) , (3,2) \} = 1$$

والتعميم بشكل عام

$$[a,0] = a$$

$$[0,a] = -a$$

$$[0,0] = 0$$

يرمز للاعداد الصحيحة :

$$I = \{ .... , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , ... \}$$

أما مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة $\{1 , 2 , 3 , ...\}$

ومجموعة الأعداد الصحيحة السالبة $\{ -1 , -2 ,-3 , ... \}$

أما (0) لا يعتبر سالباً ولا موجباً .

تعريف الجمع على الأعداد الصحيحة :

$$[a,b] + [c,d] = [a+c , b+d]$$

Ex:

$[7+6]$, $[9,4] = [7 + 9 , 6 + 4 \quad]$

$= 16 + 10$

(التحقيق) للبرهنة على صحة التطبيق

$7 - 6 + 9 - 4 = 16 - 10$

$1 + 5 = 6$

$6 = 6$

خواص الجمع على الاعداد الصحيحة :

1 - خاصية الأبدال : لكل $x, y \in I$

يكون $x + y = y + x$

Ex:

$-11 + 9 = -2$ وكذلك $9 + (-9) = -2$

$\therefore 9 + -11 = -11 + +9 = -2 \in I$

2 - خاصية التجميع :

أذا كانت $x , y , z \in I$ فأن

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

Ex:

$(6 + (-5)) + 4 = 6 + ((-5) + 4)$

$1 + 4 = 6 + (-1)$

$5 = 5$

خاصية الانغلاق : اذا كانت $x , y \in I$

فأن $x + y \in I$

Ex:

1- $7 + 5 = 12 \in I$

2- $-8 + 5 = -3 \in I$

3- $-2 + (-1) = -3 \in I$

4-العنصر المحايد بالنسبة للأعداد الصحيحة هو (الصفر):

$0 = [0 + 0]$

$a + 0 = 0 + a \; : \; \forall a \in I$

Ex:

$-7 + 0 = -7 \qquad 0 + (-7) = -7$

5 – خاصية الاختزال : $\forall a, b, c \in I$

$$a + c = b + c \rightarrow a = b$$

Ex:

$-3 + 5 = b + 5$

$2 = b + 5$

$b = 2 - 5 = -3 \qquad \therefore a = b$

$= -3$

6 - لكل عدد صحيح نظير جمعي :

لكل $a \in I$ يوجد نظيرة الجمعي $(-a)$

أي $= 0$ $-a + a = a + (-a)$

قواعد الأشــــارات:

$$(+a) + (+a) = +(a+b)$$

$$(-a) + (-b) = -(a+b)$$

$$(+a) + (-b) = +(a-b) \quad if \quad a > b$$

$$-(a-b) \quad if \quad a < b$$

$$0 \quad if \quad a = b$$

عملية الطرح على الاعداد الصحيحة:

لأجراء عملية الطرح على الأعداد الصحيحة نحول عملية الطرح الى جمع وبدلاً من العدد المطروح ستضع النظر الجمعي له ثم نجد الناتج أي

$$a, b \in I \quad , \quad a - b = a + (-b)$$

Ex:

$$6 - 5 = 6 + (-5) = 1$$

خواص عملية الطرح على الأعداد الصحيحة:

1- مغلقة: $a, b \in I$

فان $a - b$ ينتمي الى I

Ex:

$$-7 \in \quad , \quad -6 \in I$$

$$(-7) - (-6) = -7 + 6 = -1 \quad \in I$$

2- ليست ابدالية: اذا كانت $a, b \in I$

ليست بالضرورة $a - b = b - a$

3- ليست تجميعية:

اذا كان $a, b, c \in I$

فليس بالضرورة أن يكون $(a - b) - c = a - (b - c)$

Ex: $(-8 - 3) - (-6) = -8 - (3 - (6))$

$(-11) - (-6) = -8 - 9$

$-5 = -17$

<u>عملية الضرب على الأعداد الصحيحة:</u>

$[a, b] \times [c, d] = [a.c + b.d, a.d + b.c]$

Ex:

$[2, 3] \times [4, 5] = [2.4 + 3.5, 2.5 + 3.4]$

$= 8 + 15 \quad , \quad 10 + 12$

$23 \quad , \quad 22$

خواص ضرب الأعداد الصحيحة:

1 - الخاصية الأبدالية : $a, b \in I$

$\therefore \quad a.b = b.a$

Ex: $(-3).5 = 5.(-3)$

$-15 = -15$

2 – الخاصية التجميعية:

$$a, b, c \quad \in I$$

$$(a.b).c = a.(b.c)$$

Ex:

$$(3.5).-2 = 3.(5.\ (-2)\ )$$

$$-30 \quad = \quad -30$$

3- توزيع الضرب على الجمع:

$$a.(b+c) = a.b + a.c$$

$$-5(\ 6 + (-2)\ ) = \ -5.6 + (-5).(-2)$$

$$-5\ .(4) \quad = \quad -30 + 10$$

$$-20 \quad = -20$$

4- خاصية الاغلاق:

$$\forall\ a\ ,b \quad \in I \qquad :a\ .b\ \in I$$

Ex: $-5\ .2\ = \ -10 \quad \in I$

5- العنصر المحايد لعملية الضرب في الأعداد الصحيحة هو (1):

أي اذا كان $a \in I$ فان $a.1 = 1.a = a$

$$5.1 = 1.5 \ = 5$$

6 - خاصية الأختزال:

وهي متحققة في عملية الضرب $a.c = b.c \ \rightarrow a = b$

7- ضرب أي عدد صحيح في (الصفر) فأن الناتج يكون صفر

$$a \,.\, 0 = 0$$

ملاحظة : عملية الضرب تتوزع على عملية الطرح

$$a.(b-c) = a.b - a.c$$

$$\forall\, a,b,c \in I$$

Type equation here.

<u>قوانين ضرب الأشـــارات:</u>

$^{+}a \;.\; ^{+}b = ^{+}(a\,.b)$

$^{-}a \,.\, ^{-}b = \; ^{+}(a\,.\,b)$

$^{+}a \,.\, ^{-}b = ^{-}(a.b)$

$^{-}a \,.\, ^{+}b = ^{-}ab$

$-(-a) = +a$

المحاضرة
الثامنة

عملية القسمة على : مجموعة الاعداد الصحيحة

نتعرف في هذه المحاضرة على :

1- تعريف القسمة
2- بعض مبرهنات القسمة مجموعة الاعداد الصحيحة
3- بعض الامثلة والتمارين القسمة مجموعة الاعداد الصحيحة

قابلية القسمة :

ليكن a , b عددين صحيحين و $b \neq 0$ حيث b قاسم العدد a أو العدد a يقبل القسمة على العدد الصحيح b اذا وجد عدد صحيح k بحيث

$$a = k.b$$

ويرمز له بالرمز $\frac{a}{b}$ او b/a .

وفي هذه الحالة يقرأ b قاسم الـ a او يقرأ a مضاعف أو b عامل من عوامل a.

اذن $b/a \rightarrow \exists\, k \in I ; \quad a = k.b \quad (b \neq 0)$

ملاحظة: اذا كانت b لا يقسم a فنكتب $b \nmid a$

Ex:

$3/12$

$\exists\, 7 \in I \quad ; \quad 21 = 7.3$

اما $2 \nmid 5$ أي 2 غير قاسم لـ 5

لانه $\exists\, k \in I \; ; \; 5 = K.2$ وهو غير متحقق

ملحوضة : بما انه عملية القسمة عكس عملية الضرب فأن اشارة خارج القسمة يكون موجباً اذا كان العددان متشابهين بالاشارة

Ex:

$14 \div 7 = 2 \quad \rightarrow \quad 2 \times 7 = 14$

$^-24 \div {}^-3 = 8 \quad \rightarrow {}^-3 \times 8 = {}^-24$

ويكون اشارة خارج القسمة سالباً اذا كان العددان مختلفين في الاشارة

Ex:

$$^{-}36 \div 4 = {}^{-}9 \quad \rightarrow \quad 4 \times {}^{-}9 = {}^{-}36$$

$$45 \div {}^{-}15 = {}^{-}3 \quad \rightarrow \quad {}^{-}15 \times {}^{-}3 = 45$$

خصائص عملية القسمة على الاعداد الصحيحة:

1- ليست مغلقة : اي اذا كان

$a, b \in I$ ليس بالضرورة $a \div b \in I$

2- ليست ابدالية :

اذا كان $a, b \in I$ ليس بالضرورة

$$a \div b = b \div a$$

Ex:

$$6 \div -3 = -2 \quad , \quad -3 \div 6 = \frac{-3}{6}$$

3- ليست تجميعية:

اذا كان $a, b, c \in I$ ليس بالضرورة

$$(a \div b) \div c = a\,(b \div c)$$

تحقق منها بأمثلة عددية

بعض الخصائص القاسم :

مبرهنة 1: الصفر يقبل القسمة على جميع الأعداد الصحيحة عدا (الصفر)

البرهان: ليكن a عدد صحيح بحيث $a \neq 0$

$$\exists\, 0 \in I\,;\ 0 = 0.a \quad \rightarrow \quad a/0$$

$$\therefore \ a.0 = 0$$

مبرهنة 2: جميع الاعداد الصحيحة لا تقبل القسمة على (صفر) .

البرهان بالتناقض

نفرض أنه العدد الصحيح a يقبل القسمة على الصفر حيث $a \neq 0$

أي أنه $0/a$

وعليه $\exists\, k \in I \;;\; a = k.0$

$\therefore a = 0$

وهذا تناقض

مبرهنة 3: أي عدد صحيح a هو قاسم لنفسه

البرهان : لأثبات a/a

$$\exists\, 1 \in I ; a = 1.a$$

$$\therefore a = a$$

فأن العدد الصحيح يكون قاسم لنفسه.

مبرهنة 4: الواحد قاسم لأي عدد صحيح

البرهان: لأثبات أن $1/a$

$$\exists\, a \in I ;\; a = a.1$$

$$a = a$$

$\therefore$ الواحد قاسم لأي عدد صحيح

مبرهنة 5:   اذا كان a/b , b/a

فان $|a| = |b|$

البرهان :   بما أن a/b

فان $\exists\, k_1 \in I;\ \ b = K_1 . a \ldots\ldots 1$

وبما أن b/a

فان $\exists\, k_2 \in I\,; a = K_2.b \ \ \ldots\ldots\ldots 2$

$a = k_2.b \ = k_2.(k_1.a)$

$a = (k_1.k_2).a$

معامل a $\therefore\ k_1.k_2 = 1$

$\therefore\ \ K_1 = 1 = k_2 \text{ OR } K_1 = -1 = K_2$

$\therefore K_1 = \pm 1 = K_2$

$\therefore |a| = |b|$

تمارين

لكل عدد صحيح a,b,c أثبت أن:

1- اذا كان $a/b\ ,\ b/c$ فأن a/c

البرهان: نفرض وجود عددين صحيحين وليكن $k_1\ ,\ k_2$

$$a/b \rightarrow \exists\, k_1 \in I\ ;\ b = k_1 . a \qquad \ldots\ldots 1$$

$$b/c \rightarrow \exists\, k_2 \in I\ ;\ C = K_2 . b \qquad \ldots\ldots 2$$

$C=k_2 . b$

نعوض مكان b حيث $b=k_1 .a$

$$\therefore c = k_2 . (k_1 . a)$$

بالتجميع $\mathbf{c = (k_2 . k_1) . a}$

$$c = k . a$$

$$\exists k \in I ; c = k . a \rightarrow a/c$$

2- اذا كان $a/b\ ,\ c/d$ فأن $a.c/b.d$

البرهان:

$$a/b \rightarrow \exists k_1 \in I\ ;\ b = k_1 . a \qquad \ldots\ldots 1$$

$$c/d \rightarrow \exists\, k_2 \in I\ ;\ d = k_2 . c \qquad \ldots\ldots 2$$

$$\rightarrow b.d = (k_1 . a) . (k_2 . c)$$

بالتعويض او ضرب طرفي المعادلة ببعض

$$= (k_1 . k_2) . (a . c)$$

$$= k(a . b)$$

$$\exists\, k \in I\ ;\ b.d = k . (a.c) \rightarrow a.c/bd$$

3- اذا كان d/a , d/b فأن $d/a \pm b$

البرهان: يوجد عدين صحيحين مثل k_1 , k_2 أي ان(d) يقسم مجموع العدين أو يقسم الفرق بينهم .

$$\mathbf{d/a \rightarrow \exists\, k_1 \in I \;;\; a = k_1 . d} \quad ....1$$

$$d/b \rightarrow \exists\, k_2 \in I \;;\; b = k_2 . d \quad ....2$$

$$a + b = (k_1 . d) + (k_2 . d)$$

$$a + b = (k_1 + k_2)d$$

$$= k . d$$

$$d/a + b \rightarrow \exists\, k \in I \;;\; a + b = k . d$$

$$\therefore d/a + b$$

4- اذا كان d/a فأن $d/a.c$

البرهان:

$$d/a \rightarrow \exists\, k \in I \;;\; a = k . d$$

ضرب الطرفين في (c) $\quad a = k . d$

$$a . c = (k.d). c$$

$$a. c = (k . c). d$$

$$a. c = k. d$$

$$d/a.c \rightarrow \exists\, k \in I \;;\; a.c = k.d$$

$$\rightarrow d/a . c$$

5- برهن أو ادحض

أذا كان a/b فأن $a + c/b + c$

يحل بالادحاض

$2/6$ بينما بأضافة الـ 1 $\quad 2 + 1 \nmid 6 + 1$

لأنه $3 \nmid 7$

6- اذا كان $d/a.b$ فان $d/a \vee d/b$

الحل بالادحاض :

$6/18$ أي $6/9 \times 2$

بينما $6 \nmid 9$

الموضوع: القاسم المشترك الأعظم:

لأيجاد القاسم المشترك الأعظم:

اولاً: طريقة العوامل المشتركة (استخراج القواسم) تستخدم مع الأعداد الصغيرة.

ثانياً:طريقة القسمة الأقليدية تستخدم مع الأعداد الكبيرة والصغيرة.

ثالثاً:الطرح المتتالي

تعريف : اذا كان a\b , a\c فأن الـ a قاسم مشترك لـ b , c .
أي هو أكبر عدد يقسم في نفس الوقت العددين معاً بدون أي باقي

تعريف: لأي عددين $a, b \neq 0$ يوجد عدد وحيد d يسمى القاسم المشترك بين a , b بشرط انه:

1) $d > 0$

2) $d \backslash a$, $d \backslash b$

3) اذا كان $d_1 \backslash a$, $d_1 \backslash b$ فأن $d_1 \leq d$

يرمز لـ d بالرمز (a , b) ق.م.أ

أو g.c.d Greatest common divisor

أو $d = (a , b)$

مثال1/ اوجد (4,8)

عوامل كل منهم $4=\{1,2,4\}$ $8=\{1,2,4,8\}$

العوامل المشتركة $\{1,2,4\}$

$\therefore g.c.d = 4$

$d(4,8) = 4$

القاسم المشترك الاعظم هو 4

مثال2/ اوجد ق.م.أ للعددين (12,6)

عوامل كل منهم

$6=\{1,2,3,6\}$ $12=\{1,2,3,4,6,12\}$

العوامل المشتركة $\{1,2,3,4,6\}$

القاسم المشترك الأعظم = 6 $\therefore d = (6, 12) = 6$

$d(3,4) = 1$

$d > 0 \quad d(2,-2) = 2$

ثانياً/ أيجاد القاسم المشترك الأعظم بين عددين بأستخدام الخوارزمية الأقليدية:
هي طريقة لأيجاد القاسم المشترك الأعظم لعددين وهو أكبر عدد يقسم العددين في نفس الوقت .

ليكن $0 < b \leq a$ حسب خوارزمية اقليدس

$$a = q.b + r \qquad 0 \leq r \leq a$$

يسمى :

q ناتج القسمة

r باقي القسمة a\b حيث أن a المقسوم b هو القاسم

Ex:

$17 \div 2 = 8$ الباقي 1

$$a = 17, \quad b = 2, \quad q = 8, \quad r = 1$$

$\therefore 17 = 8.2 + 1$

Ex:

$7 \div 3 = 2$ الباقي 1

$a = 7, \quad b = 3, \quad q = 2, \quad r = 1$

$a = q.b + r$

$7 = 2.3 + 1$

Ex:

$4 \div 2 = 2$ الباقي 0

$a = 4\,,\quad b = 2\,,\quad q = 2\,,\quad r = 0$

$4 = 2 \times 2 + 0$

$$a = q.b + r$$

- اذا كان $r = 0$ فأن $a = q.b$

$\therefore (a, b) = b$

$(8, 4) = 4$

$(6, 2) = 2$

- اذا كان $r \neq 0$ نستمر بتطبيق الخوارزمية حتى يكون باقي القسمة مساوياً للصفر أي $r = 0$

مثال1// جد القاسم المشترك الأعظم للعددين (60 , 48)
الحل/
نقسم 60 على 48 يساوي 1 يكون الباقي 12
نكرر العملية 48 على 12 يساوي 4 يكون الباقي 0 عندما يكون الباقي معدوم نأخذ اخر قاسم هو القاسم المشترك الأعظم.

$$60 = 1 \times 48 + 12$$

القاسم اصبح مقسوم وباقي القسمة اصبح القاسم

$$48 = 4 \times 12 + 0$$

$$d(60,48) = 12$$

اي القاسم المشترك الاعظم هو 12

مثال2// جد القاسم المشترك الأعظم للعددين (595,252)
الحل/

$$595 = 2 \times 252 + 91$$
$$252 = 2 \times 91 + 70$$
$$91 = 1 \times 70 + 21$$
$$70 = 3 \times 21 + 7$$
$$21 = 3 \times 7 + 0$$

$$\therefore d(595\,,252) = 7$$

مثال3// جد القاسم المشترك الاعظم (114 , 95)

الحل/ اذن نقسم اكبر العددين على اصغرهما

95\114 الناتج 1 والباقي 19

ونستمر حتى نتوصل الى الباقي صفر

$$114 = 1 \times 95 + 19$$
$$95 = 5 \times 19 + 0$$
$$\therefore d(114\,, 95) = 19$$

مثال// أوجد *g.c.d* للعددين (*1080 , 920*)

الحل//

$$1080 = 1 \times 920 + 160$$
$$920 = 5 \times 160 + 120$$
$$160 = 1 \times 120 + 40$$
$$120 = 3 \times 40 + 0$$
$$\therefore d(1080\,, 920) = 40$$

****

ثالثاً/ الطرح المتتالي:

مثال / جد $g.c.d$ للعددين $(1080 , 920)$

$$1080-920=160$$
$$920-160=760$$
$$760-160=600$$
$$600-160=440$$
$$440-160=280$$
$$280-160=120$$
$$160-120=40$$
$$120-40=80$$
$$80-40=40$$
$$40-40=0$$

دائماً نطرح من العدد الاكبر

بما أن الناتج صفر اذن القاسم المشترك الاكبر ق.م.أ

d(1080 ,920)=40

م// المضاعف المشترك الأصغر: (م . م . أ) (L . C . M)

أي هو أصغر عدد يقبل القسمة علية

لأيجاد المضاعف المشترك الأصغر:

- نوجد مضاعفات كل من العددين الاول والثاني
- نحدد مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين
- نختار أصغر عدد في مجموعة المضاعفات
- العدد الأصغر من بين مجموعة المضاعفات هو (المضاعف المشترك الأصغر)

ملاحظة: يمكن ايجاد المضاعف المشترك الأصغر بين ثلاثة أعداد أو أكثر

مثال / اوجد (L . C.M) للعددين (4,5)

الحل: نوجد مضاعفات كل من العدد 5 , 4

$$4 = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, \dots \dots$$

$$5 = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, \dots \dots \dots \dots$$

اذن المضاعافات المشتركة بين العددين (4,5) هما 20 و 40

نأخذ أصغر مضاعف مشترك بينهم وهو العدد (20)

$$\therefore (4, 5) = 20$$

مثال2// اوجد (م.م.أ) المضاعف المشترك الاصغر للعددين (15 , 25)

الحل /

$$15 = 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, \dots .$$

$$25 = 25, 50, 75, 100, 125, 150, 175, 200, \dots ..$$

المضاعفات المشتركة للعددين 15 , 25 هما (75 , 150)

اصغر مضاعف مشترك هو (75)

$$\therefore (15, 25) = 75$$

المحاضرة 10--- تكملة موضوع القاسم المشترك الاعظم(G.C.D) والمضاعف المشترك الاصغر (L.C.M)

تعريف1 // اذا كان القاسم المشترك الاعظم لعددين صحيحين a , b يساوي واحد , فإننا نسمي العددين الصحيحين عددين اولين نسبياً. (Relativly Prime)

مثال / g.c.d(32,15)=1 فالعددان 15 , 32 اوليان نسبياً

تعريف2// اذا كان القاسم المشترك الاعظم للاعداد غير الصفرية معاً ($a_1,a_2,....a_n$) يساوي الواحد , نقول ان الاعداد a_i اولية نسبياً فيما بينها حيث

, i=1,2,3,........n

<u>مثال / اوجد القاسم المشترك الاعظم للاعداد (21,9,12)</u>

, d=((21,9),12)

, d= (21,9)=3

, d=(3,12)=3

d=(21,9,12)=3

نتيجة //

اذا كانت الاعداد غير الصفرية معاً i=1,2,3,........n , اولية نسبياً مثنى مثنى , فأنها اولية نسبياً والعكس غير صحيح

<u>مثال1 //</u>

الاعداد (21 , 14 , 6) اولية نسبياً لان 1 =(21 , 14 , 6)

ولكنها ليست اولية نسبياً مثنى مثنى , لان

(14,21)=7 , (6,21)=3 , (6,12)=2

مثال 2 //

ان الاعداد (6,25,77) اولية نسبياً مثنى مثنى , وهي اولية نسبياً , لان

g.c.d (6,25,77) = (6(25,77)) = (6,1)=1

(6,25)=1 (6,77)=1 (25,77)=1

مثال//اوجد القاسم المشترك الاعظم للاعداد (175, 72 ,25)

d=(25,72,175)=1, اولية نسبياً

d=(175,25)=25 d=(175,72)=1 ,d(25,72)=1

....

ملاحظة 1// اذا كان k\a.b , (k,b)≠1 فان k قد لايقسم اياً من a,b

مثال // ليكن ال 6 =b , a=2 , k=4

4\2.6 (4,6)=2 , 4لاتقسم 2 4\2 4لاتقسم 6 4\6

ملاحظة 2 // اذا كان (k,b)=1 و k|a.b فان k\a

مثال //ليكن k=2 و a=6 و b=5

d=(2,5)=1, 2|5.6 و فان 2\6

....

المضاعف المشترك الاصغر (L.C.M) وعلاقته بالقاسم المشترك الاعظم (G,C,D)

مبرهنة //

اذا كان a,b عددين صحيحين موجبين وكان d=g.c.d(a,b) و L=l.c.m(a,b)

فأن $L = \frac{a.b}{d}$

مثال // اوجد المضاعف المشترك الاصغر بدلالة القاسم المشترك الاعظم L=l.c.m(6,21)

الطريقة الاولى بايجاد اصغر المضاعفات بين العددين

6={6,12,18,24 ,30,36,**42** ,..........}

21={21,**42**,63,84,..............}

L=l.c.m(6,21)= **42**

الطريقة الثانية باستخدام القانون **فأن** $L = \frac{a.b}{d}$

d= (6,21)=3

$L = \frac{6.21}{3} =$ **42**

ملاحظة // يمكن الاستفادة من خواص القاسم المشترك الاعظم بتبسيط الخطوات وبطريقة خوارزمية اقليدس.

مثال// g.c.d(12,30)

=3 g.c.d(4,10)

=(3.2) g.c.d(2,5)

=6

واجب //

1. l.c.m (143,65) بدلالة القاسم المشترك الاعظم
2. l.c.m (5,10.15) بدلالة القاسم المشترك الاعظم
3. جد l.c.m (9,14)
4. جد l.c.m (6,16)
5. اوجد القاسم المشترك الاعظم للاعداد (256,112,72)
6. اوجد القاسم المشترك الاعظم للعددين نتبسيط العددين G.C.D(24,30)

....

(المحاضرة 11)

الاعداد الاولية (Prime Numbers)

تعريف / نقول ان العدد الصحيح P عدد اولي اذا تحقق مايلي :

1) $P > 1$

2) P لايقبل القسمة الا على نفسه والعدد 1

يسمى العدد الصحيح الموجب غير الاولي والاكبر تماماً من الواحد

عدداً مؤلفاً (Composite Numbers)

نتيجة //

اذا كان n عدداً مؤلفاً , فيمكن ان يكتب كما يلي : n=a.b

حيث $1 < b < n$, $1 < a < n$

مثال //

العدد 35 عدداً مؤلفاً ويمكن ان يكتب 35=7.5

بعض الاعداد الخاصة

(التامة , الزائدة , الناقصة , المتحابة , الفيثاغورية)

الأعداد التامة (المثالية)

كل عدد يتساوى مجموع عوامله مع العدد نفسه، يسمى تاماً، وأصغر الأعداد التامة 6، فعواملها 1، 2، 3 مجموعها 6، يلي ذلك 28، وعوامله 1، 2، 4، 7، 14، مجموعها 28، ومن الأعداد التامة 496، و 8128، و 33550336 ولا يوجد في الآحاد سوى 6، وفي العشرات سوى 28، وفي المئات سوى 496، وفي الآلاف سوى 8128. وهي دائماً تبدأ إما بالرقم 6 أو 8 في آحادها. وهي دائماً أعداد زوجية. وجميع الأعداد التامة 17 عدداً فقط.

*ملاحظة عوامل(قواسم)العدد: هي الأرقام التي يقبل العدد القسمة عليها، فمثلاً: 1، 2، 3، 4، 6 هي عوامل العدد 12، لأنه يقبل القسمة عليها كلها.

خواص العدد التام

1. العدد التام من الاعداد القليلة الوجود حيث يوجد منها عدد واحد فقط في كل من الاحاد والعشرات و المئات والالوف...الخ

2. تتصف الاعداد التامة بالترتيب والانتظام.

3. تبدأ دائماً بالرقم 6 او 28.

4. تكون اعداد زوجية دائماً وهي 6 , 28 , 496 , 8128... الخ

5. اذا ضرب العدد التام في 8 وزاد عليه 1 كان العدد الناتج مجذوراً

الأعداد الزائدة:

هي كل عدد مجموع عوامله أكبر منه، مثل العدد 12، الذي مجموع عوامله (1، 2، 3، 4، 6) 16 أكبر منه.

مثال:

العدد 12

مجموع قواسمه = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 , 16 > 12

لذلك نقول أن العدد 12 عدد زائد

الأعداد الزائدة الأوائل هي : 12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 66, 70, 72, 78, 80, 84, 88, 90, 96, 100, 102...

الأعداد الناقصة:

فهي كل عدد مجموع عوامله أصغر من العدد نفسه، مثل العدد 10، فإن مجموع عوامله (1، 2، 5) 8 أقل منه.

مثال: العدد 8

قواسم العدد 8 ما عدا 8 هي 1 ، 2 ، 4

مجموع القواسم 1 + 2 + 4 = 7 <8 فهو عدد ناقص

الأعداد المتحابة

هي كل عددين مزدوجين، أحدهما ناقص، والثاني زائد، إذا كان مجموع عوامل كل منهما مساوياً للآخر.

مثال: العددين (220 ، 284)

عوامل العدد 220 هي 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 22 + 44 + 55 + 110 = 284

وأن عوامل العدد 284 هي 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220

الاعداد الفيثاغورية :

تتألف ثلاثية فيثاغورس من الأعداد الصحيحة (a , b , c)

حيث $a^2 + b^2 = c^2$ تسمى مبرهنة فيثاغورس .

تكتب الثلاثية على الشكل (a, b, c) ومن الأمثلة الشهيرة عليها هي (3 ,4 ,5). إذا كانت (a, b, c) هي ثلاثية فيثاغورسية فإن (ka, kb, kc) من أجل أي عدد صحيح k تكون أيضاً ثلاثية فيثاغورسية. تكون الأعداد المشكلة لثلاثية فيثاغورس a, b و c أولية فيما بينها.

تم أخذ الاسم من مبرهنة فيثاغورس) حيث تكون كل ثلاثية فيثاغورس حلاً لمبرهنة فيثاغورس.

أمثلة

هناك ست عشر ثلاثية فيثاغورس حيث $c \le 100$:

(3, 4, 5)

(5, 12, 13)

(8, 15, 17)

(7, 24, 25)

(20, 21, 29)

(12, 35, 37)

(9, 40, 41)

(28, 45, 53)

(11, 60, 61)

(16, 63, 65)

(33, 56, 65)

(48, 55, 73)

(13, 84, 85)

(36, 77, 85)

(39, 80, 89)

(65, 72, 97)

انتهت محاضرات مادة (نظرية الاعداد)