البرمجة الخطية
Linear programming

هو نموذج رياضي يساعد متخذ القرار على اتحاذ قرارات صحية وبطريقة عملية والتي تعالج التخصيص الامثل للموارد المحددة بغية الحصول على الحل الامثل (تعظيم ربح أو تقليل كلفة)

إذ تتكون البرمجة الخطية من كلمتين: خطي (اي العلاقة بين المتغيرات المتعددة بالدرجة الاولى) وبرمجة (اي عملية اختيار الحل الافضل)

مكونات البرمجة الخطية:

١- دالة الهدف: هي دالة خطية تتكون اما في حالة تعظيم (max) او تقليل (min)

ويعبر عن دالة الهدف رياضياً كالتالي:

$$\text{Max (or) min } Z= C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots.. + C_n x_n$$

ويمكن كتابتها بشكل مختصر كالتالي:

$$\text{Max (or) min } Z= \sum_{j=1}^{n} CjXj$$

٢- قيود: شروط تحكم دالة الهدف وهي مجموعة من المعادلات أو البيانات الخطية التي تتعلق بالموارد المحددة (ايدي عاملة، موارد أولية، ساعات تشغيل ماكنة)

$$a_{11} X_1+ a_{12} X_2+ a_{13} X_3 +\ldots..+ a_{1n}X_n \ (\geq , \leq , =) \ bi$$

$$a_{21} X_1+ a_{22} X_2+ a_{23} X_3 +\ldots..+ a_{2n}X_n \ (\geq , \leq , =) \ bi$$

.

.

.

$$A_{n1} X_1+ a_{n2} X_2+ a_{n3} X_3 +\ldots..+ a_{mn}X_n \ (\geq , \leq , =) \ bi$$

ويمكن كتابة القيود بشكل مختصر كالتالي:

$$\sum_{j=1}^{n} aijXj \ (\geq , \leq , =) \ bi \qquad i=1,2,3,\ldots\ldots,n$$

٣- شرط عدم السالبية $Xj \geq 0$

بالإمكان كتابة انموذج البرمجة الخطية رياضياً كالتالي:

$$\text{Max (or) min } Z= \sum_{j=1}^{n} CjXj$$

s.t

$$\sum_{j=1}^{n} aijXj \ (\geq , \leq , =) \ bi$$

$$Xj \geq 0$$

النجاح ليس صدفة، بل انه عمل شاق ومثابرة وتعلم ودراسة وتضحيات واهم من ذلك كله هو حب ما تعمله

Z : متغيرات دالة الهدف : (دالة ربح ، دالة كلفة ، دالة انتاج)

Xj : متغيرات القرار: (متغيرات المراد ايجاد قيمتها ويجب ان تكون كميات موجبة لانها تمثل عدد وحدات من بضاعة معينة)

C : السعر (اما يكون ربح وحدة واحدة أو كلفة انتاج)

bi : كميات الموارد المحددة (تسمى ايضا بالطاقة الاستيعابية اما تكون ايدي عاملة أو ساعات انتاج أو موارد أولية .

aij : كميات من الموارد المحددة .

مثال 1

يمتلك أحد صناع الاثاث (6) وحدات من الخشب و(28) ساعة من الوقت يستغلها في صنع نوعين من شاشات ديكور. ويقدر ان النوع الاول يحتاج وحدتين من الخشب و(7) ساعات بينما تحتاج النوع الثاني الى وحدة واحدة من الخشب و (8) ساعات وتقدر اثمان النوعين ب (120$) و (80$) على التوالي كم عدد ساعات شاشات الديكور من كل نوع يجب ان يقوم بتصنيعها إذا اراد تعظيم العائد من المبيعات.

الحل :

الهدف : تعظيم عائد المبيعات (بالدولار) ونرمز له بالرمز Z

نفرض النوع الأول من الشاشات : X_1

نفرض النوع الثاني من الشاشات : X_2

$$\text{Max } Z = 120X_1 + 8X_2$$

<u>S.T</u>

$$2X_1 + X_2 \leq 6$$

$$7X_1 + 8X_2 \leq 28$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

مثال 2

تقوم احدى الشركات بإنتاج نوعين من المعدات (A,B) وإن الشركة حققت ربح قدره (1000) دينار من الوحدة الواحدة من المنتج (A) و (1500) وحدة واحدة من المنتج (B)، علماً ان الشركة تحتاج الى (20) ساعة لانتاج الوحدة الواحدة من المنتوج (A) و (30) ساعة لانتاج الوحدة الواحدة من المنتج (B) علماً بأن الوقت الاجمالي المسموح به سنوياً يساوي (1200) ساعة، كما ان الطلبات على هذين المنتجين يتوقف على

امكانيتها لإنتاج المنتوج (A) لا يزيد عن (40) وحدة في السنة زمن المنتوج (B) لا يزيد عن (30) وحدة بالسنة، المطلوب كتابة المشكلة بصورة أنموذج برمجة خطية بحيث تحقق الشركة أقصى ربحاً ممكناً.

الحل :-

نفرض عدد وحدات المنتج الاول : X_1

نفرض عدد وحدات المنتج الثاني : X_2

$$Max\ Z = 100\ X_1 + 1500 X_2$$

<u>S.T</u>

$$2X_1 + 30\ X_2 = 1200$$

$$X_1 \leq 40$$

$$X_2 \leq 30$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

العلامة مساواة لان بالسؤال ذَكر كلمة يساوي

مثال 3

يحتاج جسم الانسان البشري يومياً إلى الكميات التالية على الاقل من الفيتامينات

140 mg V

300 mg X

270 mg Y

300 mg Z

وأفرض ان شخص ما يريد ان يتغذى على نوعين من الطعام (A) و (B) بحيث تحتوي على الكميات من الفيتامينات المطلوبة بالملي غرام وكالتالي :

Vitamins	A	B
V	20	5
X	25	12
Y	15	15
Z	10	30

والمطلوب تعين كمية الطعام الذي يتناولها من كل نوع بحيث تكون التكاليف اقل ما يمكن علماً ان ثمن (B) ضعف ثمن (A).

الحل:

نفرض عدد وحدات الطعام (A) : X_1

نفرض عدد وحدات الطعام (B) : X_2

ذكر بالسؤال ثمن (B)
ضعف ثمن (A)

والثمن تمثل التكاليف

$$\text{Min } Z = X_1 + 2X_2$$

S.T

$$20X_1 + 5X_2 \geq 140$$

$$25X_1 + 12X_2 \geq 300$$

$$15X_1 + 15X_2 \geq 270$$

$$10X_1 + 30X_2 \geq 300$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

في السؤال عند ذكر كلمة المتاحة او الكمية المتاحة أو المسموح به او عدم ذكر اي شيء يدل على نوع الإشارة فهذا يعني الإشارة هي أصغر و يساوي

خوارزميات حل البرمجة الخطية (تحليل مسائل البرمجة الخطية) :

يقصد من تحليل مسائل البرمجة الخطية هو حل المسألة بحيث يحقق جميع القيود الواردة في المسألة ليكن حل مقبول، وهنالك ثلاث طرق لحل مسائل البرمجة الخطية: -

أولاً : طريقة التمثيل البياني

تستخدم هذه الطريقة في حالة وجود متغيرين فقط في مسألة البرمجة الخطية.

اما خطوات هذه الطريقة فهي :

١- إعتبار جميع القيود في حالة مساواة

٢- تحديد نقاط رسم لكل قيد

٣- تحديد تجاه كل قيد فيما اذا كان اقل أو يساوي فيكون اتجاه السهم باتجاه نقطة الأصل

واذا كان القيد في حالة أكبر من او يساوي فيكون اتجاه السهم بعيد عن نقطة الأصل.

٤- تحديد منطقة الحل المقبول (وهي منطقة تقاطع اتجاهات جميع القيود)

في كل مرة ترى فيها شخصا ناجحا أكثر منك، اعلم أنه يفعل شيئا ما لا تفعله أنت.

مثال 1

أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية التالية :

Min $Z = 10X_1 + 25X_2$

S.T

$X_1 + X_2 \geq 50$

$X_1 \geq 20$

$X_2 \leq 40$

$X_1, X_2 \geq 0$

SOL

$X_1 + X_2 = 50$

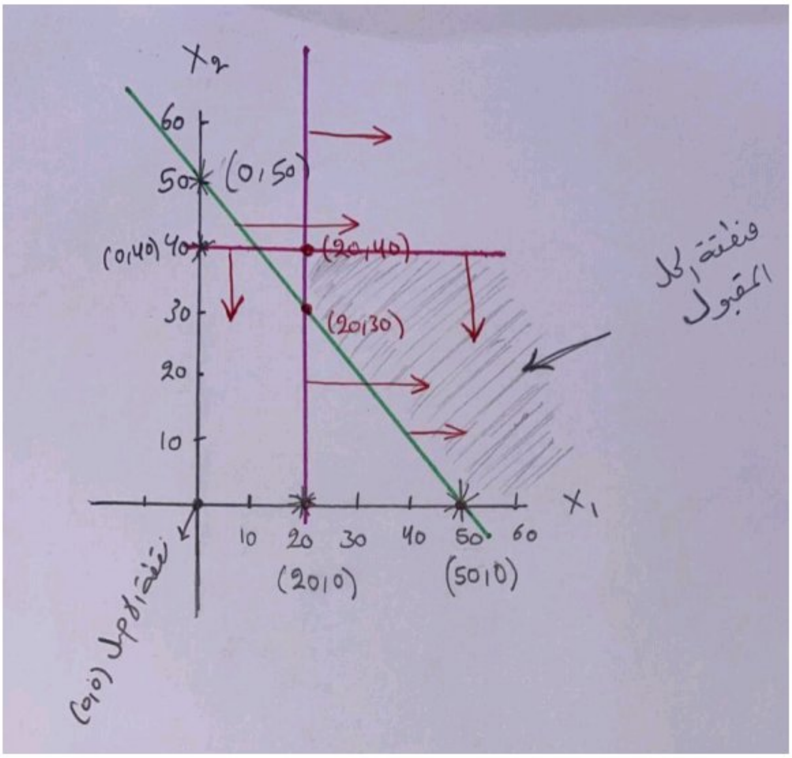
X_1	X_2	Point
0	50	(0,50)
50	0	(50,0)

$X_1 = 20$

X_1	X_2	Point
20	0	(20,0)

$X_2 = 40$

X_1	X_2	Point
0	40	(0,40)



$X_1 + X_2 = 50$

بالطرح

$X_1 = 20$

$X_2 = 30 \longrightarrow X_1 = 20$ (20,30)

المتطرفة	Min $Z = 10X_1 + 25X_2$
(50,0)	10 (50)+25(0) = 500 ⟹
(20,40)	10 (20) + 25 (40)= 950
(20,30)	10(20) + 25(30) = 1200

الحل الأمثل

optimal)

(solution

$Z = 500$

$X_1 = 50$, $X_2 = 0$

مثال 2

أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية التالية :

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 2X_2$$

S.T

$X_1 + X_2 \leq 10$

$X_1 = 5$

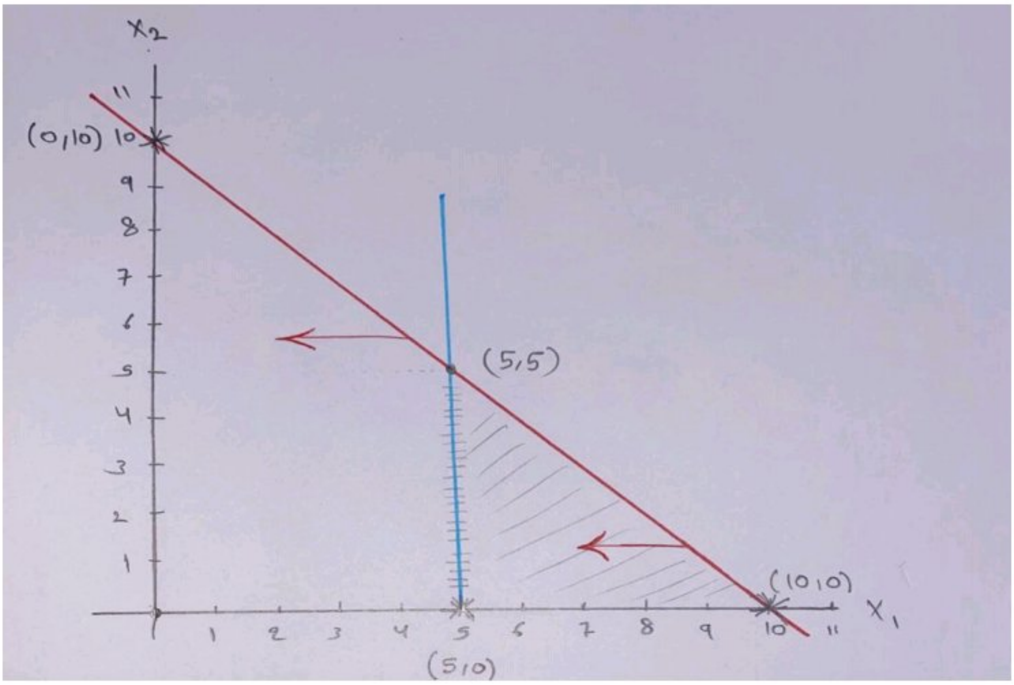
$X_1, X_2 \geq 0$

SOL

$X_1 + X_2 = 10$ $\qquad\qquad$ $X_1 = 5$

X_1	X_2	Point
0	10	(0,10)
10	0	(10,0)

X_1	X_2	Point
5	0	(5,0)



$X_1 + X_2 = 10$

$X_1 = 5$

$X_2 = 5 \longrightarrow X_1 = 5 \quad (5,5)$

النقاط المتطرفة	x Z= 5 X_1 + 2X_2
(5,0)	5 (5)+2 (0) = 25
(5,5)	5 (5) + 2 (5)= 35

الحل الأمثل هو أكبر ناتج للدالة لان الدالة في حالة تعظيم(Max)

الحل الأمثل
optimal)
(solution

Z= 35

$X_1 = 5 \quad , \quad X_2 = 5$

مثال 3

أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية التالية :

Max $Z= 6X_1 - 2X_2$
S.T
$2X_1 - X_2 \leq 2$
$X_1 \leq 4$
$X_1 , X_2 \geq 0$

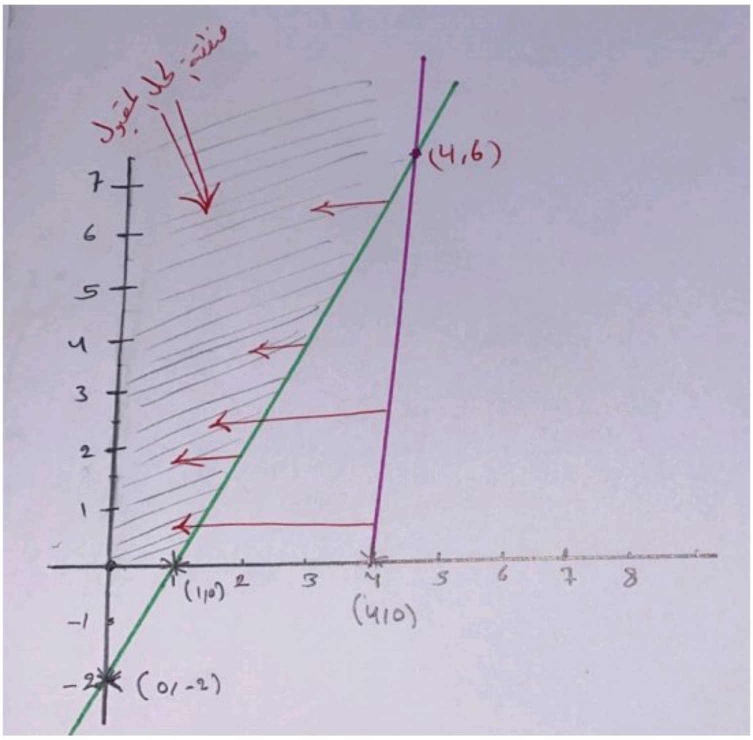
عند عدم وجود تقاطع في القيود في الرسم يعني عدم وجدود حل أمثل

SOL
$2X_1 - X_2 = 2$

X_1	X_2	Point
0	-2	(0,-2)
1	0	(1,0)

$X_1 = 4$

X_1	X_2	Point
4	0	(4,0)



$2X_1 - X_2 = 2$
بالطرح
$X_1 = 4$

$X_2=6 \longrightarrow X_1=4 \quad (4,6)$

النقاط المتطرفة	Max $Z= 6X_1 - 2X_2$
(1,0)	6 (1)-2 (0) = 6
(4,6)	6 (4) - 2 (6)= 12

الحل الأمثل هو أكبر ناتج للدالة لان الدالة في حالة تعظيم(Max)

الحل الأمثل
optimal)
(solution
Z= 12
$X_1=4$, $X_2=6$

H.M

أوجد قيمة دالة الهدف التي تجعل الأرباح اعظم ما يمكن :

Max $Z= 40 X_1 - 36X_2$

S.T

$5X_1 + 3X_2 \geq 45$

$X_1 \leq 8$

$X_2 \leq 10$

$X_1 , X_2 \geq 0$

مثال 4

find the optimal solution of the following :

	1	2	3	profit
A	10	6	4.5	9
B	5	6	18	7
hours	50	36	81	

Sol

Max $Z= 9 X_1 + 7X_2$

S.T

$10X_1+5 X_2 \leq 50$

$6X_1 + 6X_2 \leq 36$

$4.5X_1+ 18X_2 \leq 81$

$X_1 , X_2 \geq 0$

$10X_1+5 X_2 = 50$

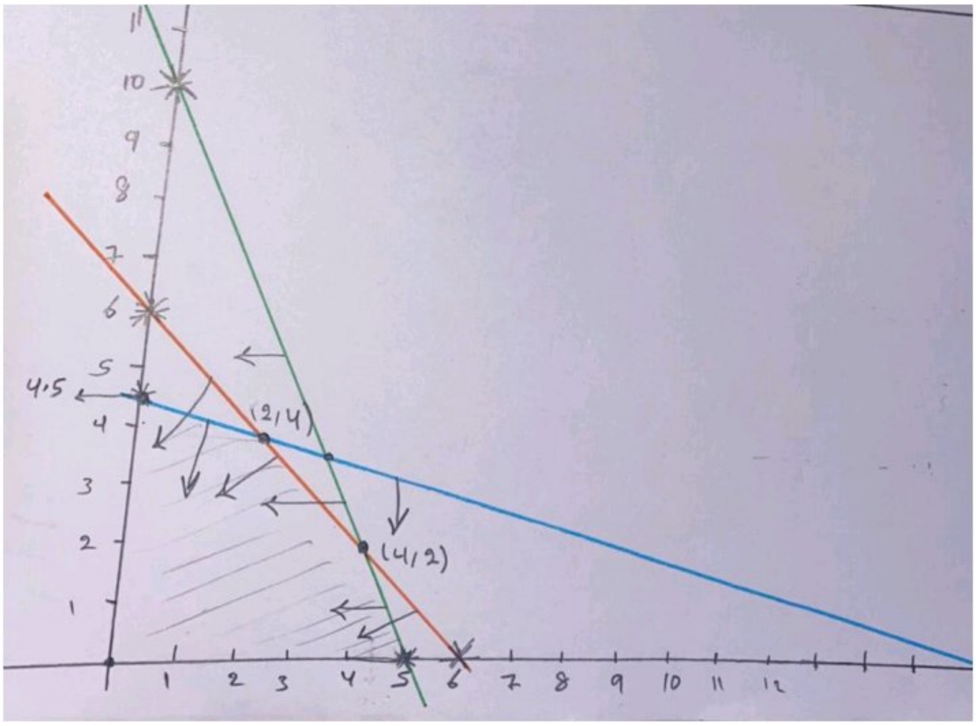
X_1	X_2	Point
0	10	(0,10)
5	0	(5,0)

$6X_1 + 6X_2 = 36$

X_1	X_2	Point
0	6	(0,6)
6	0	(6,0)

$4.5X_1+ 18X_2 = 81$

X_1	X_2	Point
0	4.5	(0,4.5)
18	0	(18,0)



لأيجاد نقطة تقاطع القيد الاول والثاني :

$\{10X_1+5X_2 = 50\}$ بالقسمة على 5

$\{6X_1+6X_2 = 36\}$ بالقسمة على 6

$2X_1 + X_2 = 10$

بالطرح $-X_1 + X_2 = 6$

$X_1 = 4 \quad , X_2 = 2 \longrightarrow (4,2)$

اما نقطة تقاطع القيدين الثاني والثالث فكما يلي :

$\{6X_1 + 6X_2 = 36\}$ بالقسمة على 6

$\{4.5X_1 + 18X_2 = 81\}$ بالقسمة على 4.5

$X_1 + X_2 = 6$

بالطرح $X_1 + 4X_2 = 18$

$X_2 = 4 \;,\; X_1 = 2 \;, \longrightarrow (2.4)$

النقاط المتطرفة	Max $Z = 9X_1 + 7X_2$
(5,0)	$9(5) + 0 = 45$
(4,2)	$9(4) + 7(2) = 50$
(2,4)	$9(2) + 7(4) = 46$

الحل الأمثل optimal (solution

$Z = 50$

$X_1 = 4 \quad , X_2 = 2$

ثانياً :- طريقة العامة أو المبسطة (السمبلكس) Simplex Method

قبل البدء بهذه الطريقة يجب أولاً تحويل صيغة البرمجة الخطية الى الصيغة القياسية.

خطوات التحويل الى الصيغة القياسية :

١- دالة الهدف تبقى على حالها سواء كانت في حالة (max or min) .

٢- القيود يجب ان يكون الطرف الأيمن للقيد غير سالب .

في حالة وجود قيمة سالبة في الطرف الأيمن للقيد يجب تحويله الى الحالة الموجبة بضرب القيد بأكمله في (-١)

٣- يجب تحويل العلاقة في كل قيد الى حالة المساواة (=)

وبالخطوات التالية:

أ- عندما تكون نوع العلاقة في حالة اصغر من (≤) نضيف الى القيد متغير وهمي(Slack Variables) (+S) ونحوّل العلاقة الى حالة المساواة.

ب- عندما تكون نوع العلاقة في حالة اكبر من (≥) نطرح من القيد متغير وهمي (-S) ونحول العلاقة الى حالة المساواة.

مثال 1

حوّل البرمجة الخطية الاتية الى الصيغة القياسية

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 4X_2$$

S.T

$$3X_1 - X_2 \le 8$$
$$5X_1 + 2X_2 \ge 3$$
$$4X_1 - X_2 = 6$$
$$|X_1 - X_2| \le 10$$

$$X_1 , X_2 \ge 0$$

قيد المطلق يُفتح بشكل قيدين:

$$X_1 - X_2 \ge 10$$
$$X_1 - X_2 \le 10$$

Sol

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 4X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4$$

S.T

$$3X_1 - X_2 + S_1 = 8$$
$$5X_1 + 2X_2 - S_2 = 3$$
$$4X_1 - X_2 = 6$$
$$X_1 - X_2 - S_3 = 10$$
$$X_1 - X_2 + S_4 = 10$$

$$X_1 , X_2, S_1 , S_2 , S_3 , S_4 \ge 0$$

مثال2

البيانات التالية تمثل المواد الغذائية لشركة الاستيراد وهي كما يلي :

اكتب البيانات اعلاه بصيغة برمجة خطية ثم حوّلها الى الصيغة القياسية.

الكلفة	الادارة	التفريغ	التوزيع	المواد الغذائية
10	5	3	2	رز X_1
8	4	2	1	سكر X_2
4	3	1	1	زيت X_3
	لا يقل عن 200	يساوي 100	لايزيد عن 40	المتاح

اذا كانت الكلف عمودية
اذاً القيود عمودية

SOL

Min $Z=10X_1 + 8X_2 + 4X_3$

S.T

$2X_1 + X_2 + X_3 \le 40$

$3X_1 + 2X_2 + X_3 = 100$

$5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 200$

$X_1, X_2, X_3 \ge 0$

نحول الى الصيغة القياسية :

Min $Z=10X_1 + 8X_2 + 4X_3$

S.T

$2X_1 + X_2 + X_3 + S_1 = 40$

$3X_1 + 2X_2 + X_3 = 100$

$5X_1 + 4X_2 + 3X_3 - S_2 = 200$

$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2 \ge 0$

بعد توضيح كيفية تحويل نموذج البرمجة الخطية من صيغته العامة الى الصيغة القياسية ندخل الى الطريقة الثانية لحل مسألة البرمجة الخطية وهي الطريقة العامة أو الطريقة المبسطة (Simplex)وبالخطوات التالية:

أولاً : الطرف الايمن للقيد يجب ان يكون موجب وتكون القيود في حالة اصغر او يساوي (≤) اما اذا كانت الاشارة اكبر (≥) فهنا لا يمكن حل المسألة بطريقة ال (simplex) وتُحل بطرق اخرى.

ثانياً : ننظر الى صف الاختبار اذا كانت الدالة من نوع

أ- (max) وكانت معاملات صف الاختبار جميعها قيم موجبة أو اصفار فأن الحل امثل ونتوقف عن الحل، اما اذا كانت قيم صف الاختبار على الاقل قيمة سالبة فننتقل للخطوة التالية بأستخراج المتغير الداخل والخارج.

ب- (min) وكانت معاملات صف الاختبار جميعها قيم سالبة أو اصفار فأن الحل امثل ونتوقف عن الحل، اما اذا كانت قيم صف الاختبار على الاقل قيمة موجبة فننتقل للخطوة التالية بأستخراج المتغير الداخل والخارج.

ثالثاً : نستخرج المتغير الداخل بطريقتين:

أ- في حالة الدالة (max) فالمتغير الداخل هو اصغر قيمة سالبة.

ب- في حالة الدالة (min) فالمتغير الداخل هو اكبر قيمة موجبة .

رابعاً : نستخرج المتغير الخارج من خلال قسمة عمود الحل على عناصر المتغير الداخل ونأخذ أقل قيمة موجبة ونهمل الصفر والسالب سواء كانت الدالة (max) او (min).

مثال 1

أوجد الحل الامثل لمسألة البرمجة الخطية التالية باستخدام الطريقة العامة.

$\text{Max } Z = 8X_1 + 6X_2$

S.T

$4X_1 + 2X_2 \leq 60$

$2X_1 + 4X_2 \leq 48$

$X_1, X_2 \geq 0$

خطوات الحل :

١- التحويل الى الصيغة القياسية

$\text{Max } Z = 8X_1 + 6X_2$

S.T

$4X_1 + 2X_2 + S_1 = 60$

$2X_1 + 4X_2 + S_2 = 48$

$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$

٢- نجد حل اساسي أولي مقبول

		المتغير الداخل					
		8	6	0	0		
معاملات المتغيرات B.C	**المتغيرات الاساسية B.V**	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**عمود الحل SOL**	
0	S_1	4	2	1	0	60	المتغير الخارج
0	S_2	2	4	0	1	48	
	صف الاختبار Zj - Cj	-8	-6	0	0	0	

لإيجاد عناصر الصف الجديد والذي هو في هذا السؤال (X_1) بقسمة عناصر الصف القديم على عنصر المحور (تقاطع المتغير الداخل مع المتغير الخارج)وهو (4)

			المتغير الداخل				
		8	6	0	0		
معاملات المتغيرات B.C	**المتغيرات الاساسية B.V**	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**عمود الحل SOL**	
8	X_1	1	1/2	1/4	0	15	
0	S_2	0	3	-1/2	1	18	المتغير الخارج
	صف الاختبار Zj - Cj	0	-2	2	0	120	

لإيجاد صف المتغير (S_2) نطبق القانون التالي :

عناصر الصف القديم – العنصر المناظر لعنصر المحمور* عناصر الصف الجديد

$2 - 2 *(1) = 0$

$4 - 2* (1/2) = 3$

$0 - 2 * (1/4) = -1/2$

$1 - 2 * (0) = 1$

$48 - 2 * (15)= 18$

		8	6	0	0		
معاملات المتغيرات B.C	**المتغيرات الاساسية B.V**	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**عمود الحل SOL**	
	X_1	1	0	1/3	-1/6	12	
	X_2	0	1	-1/6	1/3	6	
	صف الاختبار Zj - Cj	0	0	5/3	2/3	132	

بما انه جميع قيم صف الاختبار هي اكبر او يساوي صفر والدالة في حالة (Max) فأن الحل امثل Optimal solution)

$\underline{X_1}$

$1 - 1/2\ (0) = 1$

$1/2 - 1/2\ (1) = 0$

$1/4 - 1/2\ (-1/6) = 1/3$

$0 - 1/2\ (1/3) = -1/6$

$15 - 1/2\ (6) = 12$

الحل الأمثل optimal (solution

$Z = 132$

$X_1 = 12 \quad , \quad X_2 = 6$

(H.W) : أوجد الحل الامثل لمسألة البرمجة الخطية الاتية وبالطريقة المبسطة

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2 \\
&\underline{S.T} \\
&4X_1 + 3X_2 \le 12 \\
&4X_1 + X_2 \le 8 \\
&4X_1 - X_2 \le 8 \\
&X_1, X_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

مثال2

أوجد الحل الامثل لمسألة البرمجة الخطية الاتية وبالطريقة المبسطة

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } Z = -2X_1 + X_2 - X_3 \\
&\underline{S.T} \\
&X_1 + X_2 + X_3 \le 6 \\
&X_1 + 2X_2 \le 4 \\
&X_2 \le 2 \\
&X_1, X_2, X_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

<u>Sol</u>

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } Z = -2X_1 + X_2 - X_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 \\
&\underline{S.T} \\
&X_1 + X_2 + X_3 + S_1 = 6 \\
&X_1 + 2X_2 + S_2 = 4 \\
&X_2 + S_3 = 2 \\
&X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

الوسيلة الوحيدة إلى النجاح هي
الاستمرار بقوة حتى النهاية.

		داخل							
		-2	1	-1	0	0	0		
معاملات المتغيرات B.C	**المتغيرات الاساسية B.V**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**عمود الحل SOL**	
	S_1	1	1	1	1	0	0	6	
	S_2	1	2	0	0	1	0	4	خارج
	S_3	0	1	0	0	0	1	2	
	صف الاختبار Zj - Cj	2	-1	1	0	0	0	0	

				داخل					
		-2	1	-1	0	0	0		
معاملات المتغيرات B.C	**المتغيرات الاساسية B.V**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**عمود الحل SOL**	
	S_1	0	-1	1	1	-1	0	2	خارج
	X_1	1	2	0	0	1	0	4	
	S_3	0	1	0	0	0	1	2	
	صف الاختبار Zj - Cj	0	-5	1	0	-2	0	-8	

		-2	1	-1	0	0	0		
معاملات المتغيرات B.C	**المتغيرات الاساسية B.V**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**عمود الحل SOL**	
	X_3	0	-1	1	1	-1	0	2	
	X_1	1	2	0	0	1	0	4	
	S_3	0	1	0	0	0	1	2	
	صف الاختبار Zj - Cj	0	-4	0	-1	-1	0	-10	

بما ان قيم صف الاختبار هي عبارة عن قسم سالبة واصفار والدالة في حالة min فأن الحل أمثل

Optimal solution

$Z = -10$, $X_1 = 4$

$X_2 = 0$, $X_3 = 2$

مثال3

أوجد الحل الامثل لمسألة البرمجة الخطية الاتية وبالطريقة المبسطة

$Min\ Z= 3X_1 +4X_2 +3X_3$

S.T

$3X_1 +2X_2+ X_3 \leq 960$

$5X_1+8\ 2X_2+4X_3 \leq 5000$

$\leq 2400\ \ 3X_3+6X_2 + 3X_3$

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

Sol

$Min\ Z= 3X_1 +4X_2 +3X_3+0S_1 +0S_2 +0S_3$

S.T

$3X_1 +2X_2+ X_3 +S_1 = 960$

$5X_1+8\ 2X_2+4X_2+S_2 = 5000$

$=2400\ \ 3X_3+6X_2 + 3X_3 +S_3$

$X_1 , X_2 , X_3 , S_1 , S_2 , S_3 \geq 0$

			داخل						
		3	4	3	0	0	0		
معاملات المتغيرات B.C	المتغيرات الاساسية B.V	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	عمود الحل SOL	
	S_1	3	2	1	1	0	0	960	
	S_2	5	8	4	0	1	0	5000	
	S_3	3	6	3	0	0	1	2400	خارج
	صف الاختبار Zj - Cj	-3	-4	-3	0	0	0	0	
		داخل							
		3	4	3	0	0	0		
معاملات المتغيرات B.C	المتغيرات الاساسية B.V	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	عمود الحل SOL	
	S_1	2	0	0	1	0	-1\3	160	خارج
	S_2	1	0	0	0	1	-4\3	1800	
	X_2	1\2	1	1\2	0	0	1\6	400	
	صف الاختبار Zj - Cj	-1	0	-1	0	0	2\3	1600	

5-8(1\2) = 1
8-8(1) = 0
4-8(1\2) = 0
0-8(0) = 0
1-8(0) = 1
0-8(1\6) = -4\3
5000-8(400)= 1800

3-2(1\2) = 2
2-2(1) = 0
1-2(1\2) = 0
1-2(0) = 1
0-2(0) = 0
0-2(1\6) = -1\3
960-2(400) = 160

				داخل					
		3	4	3	0	0	0		
معاملات المتغيرات B.C	المتغيرات الاساسية B.V	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	عمود الحل SOL	
	X_1	1	0	0	1\2	0	-1\6	80	
	S_2	0	0	0	-1\2	1	-7\6	1720	
	X_2	0	1	1\2	-1\4	0	1\4	360	خارج
	صف الاختبار Zj - Cj	0	0	-1	1\2	0	1\2		

<u>X_2</u>

1\2-1\2(1) = 0
1-1\2(0) = 1
1\2-1\2(0) = 1\2
0-1\2(1\2) = -1\4
0 -1\2(0) = 0
1\6-1\2(-1\6) = 1\4
1800-1\2(80) = 360

<u>S_2</u>

1 – 1 = 0
0 – 0 = 0
0 – 0 = 0
0 – 1\2 = -1\2
1 – 0 = 1
-4\3 – (-1\6) = -7\6
800 - 80 = 1720

		3	4	3	0	0	0		
معاملات المتغيرات B.C	**المتغيرات الاساسية B.V**	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	**عمود الحل SOL**	
	X_1	1	0	0	1\2	0	-1\6	80	
	S_2	0	0	0	-1\2	1	-7\6	1720	
	X_3	0	2	1	-1\2	0	1\2	720	
	صف الاختبار Zj - Cj	0	2	0	0	0	1	2400	

Optimal solution

$Z = -10$

$X_1 = 4$

$X_2 = 0$

$X_3 = 2$

ثالثاً :- المسألة الثنائية (النموذج المقابل) Duality

ان لكل نموذج في البرمجة الخطية نموذج مقابل له حيث يسمى النموذج الاول بالمسألة الاولية ويسمى النموذج الثاني بالمسألة الثنائية، يوجد علاقة بين هاتين المسألتين بحيث ان حل احدى المسألتين يعطي حلاً للمسألة الاخرى.

خطوات المسألة الثنائية:

١- تحويل دالة الهدف Max ↔ Min

٢- اذا كانت الدالة في حالة (Max) فأن جميع القيود في حالة اصغر من (≤)، وفي حالة وجدود قيد في حالة اكبر من نحوله الى حالة اصغر من بضرب القيد ب (1−) وبالعكس.

مثال 1

حوّل المسألة التالية الى مسألة ثنائية . أو اكتب المسألة الثنائية للمسألة الاولية التالية:

$\text{Max } Z = 10X_1 + 9X_2$

S.T

$5X_1 + 4X_2 \le 120$

$2X_1 + 4X_2 \le 60$

$X_1 , X_2 , \ge 0$

الحل

الخطوة الاولى: تحويل دالة الهدف من (MaX) الى (Min) $\quad \text{Min } w = 120\, Y_1 + 60\, Y_2$

الخطوة الثانية: بالنسبة للقيود تحويل الاعمدة الى صفوف وبالعكس

S.t

$5Y_1 + 2Y_2 \geq 10$

$4Y_1 + 4Y_2 \geq 9$

$Y_1 , Y_2 \geq 0$

مثال 2

Transfer to dual model

$\text{Max } Z = X_1 + 2X_2 - 3X_3$

S.T

$2X_1 + 2X_2 - X_3 \leq 20$

$X_1 + 3X_3 \leq 18$

$[\, 2X_2 - 2X_3 \geq 10 \,]*-1$ → بما انه الدالة في حالة Max فيجب ان تكون جميع القيود في حالة اقل من ويساوي

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

Sol

$\text{Max } Z = X_1 + 2X_2 - 3X_3$

S.T

$2X_1 + 2X_2 - X_3 \leq 20$

$X_1 + 3X_3 \leq 18$

$-2X_2 + 2X_3 \leq -10$

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

$\text{Min } w = 20Y_1 + 18Y_2 + 10Y_3$

s.t

$2Y_1 + Y_2 \geq 1$

$2Y_1 - 2y_2 \geq 2$

$-Y_1 + 3Y_2 + 2Y_3 \geq -3$

$Y_1 , Y_2 \geq 0$

EX 3

Find the optimal solution of dual model from primal model.

Min

$\cancel{Max}\ Z = 6X_1 + 4X_2 - X_3$

S.T

$3X_1 + X_2 - X_3 \geq 1$

$X_1 - X_2 - 2X_3 \leq 1$

$X_1 + X_2 \geq 0$

$X_1, X_2, \geq 0 \quad , X_3$ Unrest

الحل

الخطوة الاولى: تحويل دالة الهدف من (~~Min~~ max) الى (Max min)

min

$\cancel{Max}\ Z = 6X_1 + 4X_2 - X_3$

S.T

$[3X_1 + X_2 - X_3 \geq 1]*-1$

$X_1 - X_2 - 2X_3 \leq 1$

$X_1 + X_2 \geq 0$

بما انه الدالة في حال (max) يجب ان تكون جميع القيود في حالة اكبر من او يساوي(≤)

min

$\cancel{Max}\ Z = 6X_1 + 4X_2 - X_3$

s.t

$-3X_1 - X_2 + X_3 \geq -1$

$X_1 - X_2 - 2X_3 \geq 1$

$X_1 + X_2 \geq 0$

$X_1, X_2, \geq 0 \quad , X_3$ Unrest

عندما يذكر بالسؤال unrest اي غير مقيد الاشارة في النموذج الاولي فعند الحل يكون القيد مساواة في النموذج المقابل

Max

$\cancel{Min}\ w = -Y_1 + Y_2$

s.t

$-3Y_1 + Y_2 + Y_3 \leq 6$

$-Y_1 - Y_2 + Y_3 \leq 4$

$Y_1 - 2Y_2 + 0 = -1$

اما عندما يكون في النموذج الاولي(المعطى بالسؤال) قيد يحتوي على المساواة يقابل متغير غير مقيد الاشارة في النموذج المقابل

$Y_1 , Y_2 , Y_3 \geq 0$

EX 4

MAX $Z=X_1+X_2$

S. TO:

$2X_1+X_2= 5$

$3X_1-X_2= 6$

X1, X2, UNRESTRICTED

الحل:

MIN $Y= 5Y_1+6Y_2$

S. TO:

$2Y_1+3Y_2 = 1$

$Y_1-Y_2 = 1$

y1, y2 unrestricted

مشاكل النقل

تعتبر مشكلة النقل من التطبيقات المهمة في البرمجة الخطية ونموذج النقل هو نموذج البرمجة الخطية يهدف الى نقل عدة اشياء (بضائع، اشخاص ،... الخ) من عدة اماكن تسمى مصادر أو مناشئ الى عدة اماكن تسمى المحطات او مراكز الاستهلاك حيث ان دالة كلفة النقل اقل ما يمكن.

<u>تعريف نموذج النقل</u>

Sources مصادر	مواقع destination	1	2	....	N	Supply(التجهيز او العرض)
1		X_{11} $\boxed{C_{11}}$	X_{12} $\boxed{C_{12}}$		X_{1n} $\boxed{C_{1N}}$	a_1
2		X_{21} $\boxed{C_{21}}$	X_{22} $\boxed{C_{22}}$		X_{2n} $\boxed{C_{2N}}$	a_2
. . .						
M		X_{m1} $\boxed{C_{M1}}$	X_{m2} $\boxed{C_{M2}}$		X_{mn} $\boxed{C_{MN}}$	a_n
(الطلب)Demand		b_1	b_2		b_m	

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum CijXij$$

s.t

$$\sum_{j=1}^{n} Xij = ai$$

$$\sum_{i=1}^{m} Xij = bj$$

$$X_{ij} \geq 0$$

ولحل نموذج النقل لابد من تحقيق الخطوات التالية :

١- موازنة نموذج النقل

٢- ايجاد حل اساسي أولي مقبول

- ١- الركن الشمالي الغربي
- ٢- اقل كلفة
- ٣- طريقة فوجل

٣- ايجاد حل أمثل

- ١- طريقة المسار المتعرج
- ٢- طريقة عوامل الضرب

اولاً : موازنة نموذج النقل

ان الشرط الاساسي لحل نموذج النقل هو ان يكون النموذج متوازن، اي ان : $\sum a_i = \sum b_i$

اما في حالة ان النموذج غير متوازن اي ان : $\sum a_i \neq \sum b_i$

عند ذلك يجب تحويله الى نموذج متوازن بحالتين :

أ- اذا كان مجموع العرض اكبر من مجموع الطلب نقوم باضافة موقع وهمي (عمود) كلف النقل فيه مساوية الى الصفر

	1	2	3	supply
1	1	5	0	10
2	2	6	4	15
3	7	3	1	20
(الطلب)Demand	15	15	10	

الطلب ≠ العرض

	1	2	3	4	supply
1	1	5	0	0	10
2	2	6	4	0	15
3	7	3	1	0	20
Demand(الطلب)	15	15	10	5	45

الطلب = العرض = 45

ب-اذا كان مجموع الطلب اكبر من مجموع العرض، نضيف مصدر وهمي (صف) كلف النقل فيها مساوية للصفر.

	1	2	3	supply
1	3	2	0	10
2	1	5	4	15
3	7	1	3	10
Demand	20	10	10	

الطلب ≠العرض

	1	2	3	supply
1	3	2	0	10
2	1	5	4	15
3	7	1	3	10
4	0	0	0	5
Demand	20	10	10	40

الطلب = العرض=40

ثانياً : ايجاد حل اساسي أولي مقبول (INITIAL SOLUTION)

أ- طريقة الركن الشمالى الغربى(north –west corner method)

EX

Find the initial solution of linear programing (L.P) by using north –west corner method

الركن الشمالي الغربي

	1	2	3	supply
1	7 $\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	~~7~~ 0
2	3 $\boxed{0}$	9 $\boxed{4}$	$\boxed{2}$	~~12~~ ~~9~~ 0
3	$\boxed{3}$	1 $\boxed{1}$	10 $\boxed{5}$	~~11~~ ~~10~~ 0
demand	~~10~~ ~~3~~ 0	~~10~~ ~~1~~ 0	~~10~~ 0	30

نبدأ الحل من الزاوية الواقعه في شمال غرب الجدول ونقارن الطلب مع العرض ,ونختار اقل قيمة.

$$Min\ Z = 7(1) + 3(0)+ 9(4) + 1(1) +10(5) = 94$$

للتأكيد

١- عدد المصادر + عدد المواقع

M+n – 1

3+3-1 = 5

تمثل عدد المتغيرات الاساسية

ب- طريقة اقل كلفة (lest cost method)

لايجاد الحل الاولي الاساسي المقبول بطريقة اقل كلفة نتبع الخطوات التالية:

١- يتم اختيار خلية ذات اقل كلفة من جدول النقل.
٢- يتم تخصيص قيمة للمتغيرين في هذه الخلية وذلك بمقارنة الطلب والعرض
٣- يتم حذف العمود او الصف الذي يحقق ذلك
٤- تكرار جميع الخطوات السابقة حتى يتم حذف جميع الصفوف والاعمدة.

EX

Find the initial solution of linear programing (L.P) by using lest cost method.

	1	2	3	supply
1	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	7 $\boxed{6}$	~~7~~ 0
2	10 $\boxed{0}$	$\boxed{4}$	2 $\boxed{2}$	~~12~~ ~~2~~ 0
3	$\boxed{3}$	10 $\boxed{1}$	1 $\boxed{5}$	~~11~~ ~~1~~ 0
demand	~~10~~ 0	~~10~~ 0	~~10~~ ~~8~~ 0	30

Min Z = 7(6) + 2(2) +10(1)+1(5) +10(0)

= 61

للتأكيد

عدد المصادر + عدد المواقع ١-

M+n – 1

3+3-1 = 5

تمثل عدد المتغيرات الاساسية

EX

Find the initial solution of linear programing (L.P) by using lest cost method.

اسواق /مصانع	1	2	3	supply
1	$\boxed{14}$	$\boxed{12}$	1400 $\boxed{10}$	~~1400~~ 0
2	$\boxed{15}$	1500 $\boxed{17}$	$\boxed{13}$	~~1500~~ 0
3	1200 $\boxed{11}$	100 $\boxed{13}$	250 $\boxed{12}$	~~1550~~ ~~350~~ ~~100~~ 0
demand	~~1200~~ 0	~~1600~~ ~~1500~~ 0	~~1650~~ ~~250~~ 0	4450

Min Z = 1500(17) + 1200(11) +100(13)+250(12) +1400(10)

= 57000

للتأكيد

عدد المصادر + عدد المواقع ١-

M+n – 1

3+3-1 = 5

ت- طريقة فوجل (Vogel method)

تعتبر هذه الطريقة هي افضل من الطريقتين السابقتين وذلك لانها الاقرب الى الحل الامثل

خطوات حل طريقة فوجل

١- حساب أو تحديد كلفة الجزاء (اي الفرق بين اقل كلفتين) من كل صف أو عمود.
٢- يتم اختيار اكبر فرق من الصف أو العمود واذا تساوت القيم فيكون الاختيار عشوائي.
٣- يتم اختيار اقل كلفة من الصف او العمود المحدد من الفقرة (٢) ويتم خصم أقل وحدات من صف وعامود تلك الخلية.
٤- حذف الصف أو العمود الذي تم تصفيره اثناء عملية الخصم من فقرة(٣).
٥- يتم إعادة الفقرات اعلاه جميعها بشكل مستمر حتى يتم تصفير كل الصفوف والاعمدة.

EX

Find the initial solution of linear programing (L.P) by using Vogel method

	1	2	3	supply	p.c
1	7 $\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	~~7~~ 0	1 1 1
2	2 $\boxed{0}$	$\boxed{4}$	10 $\boxed{2}$	~~12~~ ~~2~~ 0	2 4
3	1 $\boxed{3}$	10 $\boxed{1}$	$\boxed{5}$	~~11~~ ~~1~~ 0	2 2 $\boxed{2}$ 2
demand	~~10~~ ~~8~~ ~~1~~ 0	~~10~~ 0	~~10~~ 0	30	
	1 1 2 2	1 1 1	3		

Min z= 7+20+0+3+10 = 40

EX

	1	2	3	4	supply	p.c
1	$\boxed{5}$	10 $\boxed{1}$	$\boxed{0}$	10 $\boxed{0}$	~~20~~ ~~10~~ 0	0 0 0 0 0
2	5 $\boxed{3}$	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$	5 $\boxed{0}$	~~10~~ ~~5~~ 0	2 2
3	$\boxed{7}$	$\boxed{5}$	$\boxed{2}$	15 $\boxed{0}$	~~15~~ 0	2 2 2 2
4	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$	15 $\boxed{0}$	$\boxed{0}$	~~15~~ 0	0 0 0 0 0
demand	~~5~~ 0	~~10~~ 0	~~15~~ 0	~~30~~ ~~25~~ ~~10~~ 0	60	
	2	1 1 4	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0		

Min Z = 10+15 = 25

ثالثاً : ايجاد الحل الامثل لنموذج النقل (OPTIMAL SOLUTION)

أولاً : طريقة المسار المتعرج

هي تقسيم جميع الخلايا الفارغة (متغيرات غير اساسية) من الجدول الحل الاولي أي معرفة تأثير هذا المتغير غير الاساسي على تقليل دالة الهدف.

خطوات الحل

١- ايجاد الحل الاساسي الاولي المقبول بأحدى الطرق الثلاثة السابقة.
٢- نرسم من كل متغير غير اساسي (خلية فارغة) مسار ينتجه إلى اقرب متغير اساسي سواء كان من الصف أو العمود بشرط ان يقابله متغير اساسي اخر من ذلك الصف او العمود، والمسار إما يكون افقياً ثم عمودياً او عمودياً ثم افقياً.
٣- نجد الكلفة التقديرية (C^ij) لكل متغير غير اساسي وذلك بجمع كلف النقل للخلايا التي تغير فيها المسار باشارات متناوبة سالبة موجبة ثم سالبة وهكذا، فإذا كان $(C^{\wedge}ij) \leq 0$ فأن الحل أمثل، إما اذا كانت هناك كلفة تقديرية واحدة على الاقل سالبة فأن الحل غير أمثل.

٤- إذا كان الحل غير امثل نستخرج المتغير الداخل والخارج وهنا نختار المتغير غير الاساسي(المسار) الذي فيه اكبر كلفة تقديرية مسبوقة بأشارة سالبة(أو اصغر قيمة سالبة)

٥- المتغير الداخل دائما هو اول متغير بالمسار ونجد المتغير الخارج بعد رسم مسار المتغير الداخل نختار اصغر متغير اساسي موجود في احدى الزواية السالبة ليكن هو المتغير الخارج.

٦- نضع المتغير الخارج محل المتغير الداخل ونضع بقية المتغيرات في خلاياها السابقة ثم نجد حل مقبول جديد.

٧- تكرار جميع الخطوات السابقة حتى نحصل على كلف تقديرية جميعها موجبة.

EX

Find the optimal solution of linear programing (L.P) by using stepping stone.

	1	2	3	supply
1	9 $\boxed{5}$	3 $\boxed{1}$	$\boxed{8}$	12
2	$\boxed{2}$	7 $\boxed{4}$	7 $\boxed{0}$	14
3	$\boxed{3}$	$\boxed{6}$	4 $\boxed{7}$	4
demand	9	10	11	30

Min z = 104

$X_{13} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{23}$

$\hat{C}_{13} = +8-1+4-0 = 11$

$X_{21} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{22}$

$\hat{C}_{21} = +2 -5 +1 -4= -6$

$X_{32} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{33}$

$C\hat{}_{32} = 6-4+0-7 = -5$

$X_{31} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{33}$

C^31 = +3-5+1-4+0-5 = -12

بما انه توجد قيمة سالبة للكلف التقديرية
فأن الحل غير امثل
لذا نستخرج المتغير الداخل والخارج
عن طريق اخذ مسار الكلفة ذات اكبر قيمة مسبوقة بالسالب اي (-12)

المتغير الداخل دائما هو أول متغير

$X_{31} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{33}$

	9	3	7	7	4
4	5	7	3	11	-
	(9-4)	(3+4)	(7-4)	(7+3)	

المتغير الخارج

هو اصغر قيمة مسبوقة بالسالب

ننقل قيمة المتغير الخارج محل المتغير الداخل

	1	2	3	supply
1	5 $\boxed{5}$	7 $\boxed{1}$	• $\boxed{8}$	12
2	• $\boxed{2}$	3 $\boxed{4}$	11 $\boxed{0}$	14
3	4 $\boxed{3}$	• $\boxed{6}$	$\boxed{7}$	4
demand	9	10	11	30

Min = 56

$X_{13} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{23}$

$C^{\wedge}_{13} = +8-1+4-0 = 11$

$X_{21} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{22}$

$C^{\wedge}_{21} = +2 -5 +1 -4= -6$

$X_{32} \rightarrow X_{31} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{12}$

$C^{\wedge}_{32} = 6-3+5-1 = 7$

$X_{33} \rightarrow X_{31} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{23}$

$C^{\wedge}_{31} = +7-3+5-1+4-0 = 12$

بما انه توجد قيمة سالبة للكلف التقديرية

فأن الحل غير امثل

لذا نستخرج المتغير الداخل والخارج

عن طريق اخذ مسار الكلفة ذات اكبر قيمة مسبوقة بالسالب اي (-6)

$X_{21} \rightarrow$	$X_{11} \rightarrow$	$X_{12} \rightarrow$	X_{22}
	5	7	3
3	12	10	-

المتغير الخارج

هو اصغر قيمة مسبوقة بالسالب

	1	2	3	supply
1	2 $\boxed{5}$	10 $\boxed{1}$	• $\boxed{8}$	12
2	3 $\boxed{2}$	$\boxed{4}$	11 $\boxed{0}$	14
3	4 $\boxed{3}$	• $\boxed{6}$	$\boxed{7}$	4
demand	9	10	11	30

$X_{13} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{23}$

$\hat{C}_{13} = +8-5+2-0 = 5$

$X_{22} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{21}$

$\hat{C}_{22} = +4 -1 +5 -2= 6$

$X_{32} \rightarrow X_{31} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{12}$

$C\hat{}_{32} = 6-3+5-1 = 7$

$X_{33} \rightarrow X_{31} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{23}$

$C\hat{}_{33} = +7-3+2-0 = 7$

بما انه جميع قيم الكلف التقديرية موجبة

فأن الحل امثل

ثانياً : طريقة عوامل الضرب :Maltipliers خطوات هذه الطريقة

١- نجد الحل الاساسي الاولي المقبول بإحدى الطرق الثلاثة السابقة.
٢- نضيف الى جدول النقل عمود يسمى بمعامل الضرب (ui)ونضيف صف يسمى بمعامل الضرب (Vj).
٣- نضيف قيمة اختيارية تساوي صفر في احدى خلايا عاملي الضرب (ui) أو (vj) ويفضل وضعها في الخلية الأولى من عامل الضرب (ui).
٤- نستخرج قيم (ui) و(vj) بتطبيق العلاقة التالية : Cij = ui+vj
٥- نجد الكلف التقديرية للمتغيرات غير الاساسية وذلك بموجب المعادلة التالية: C^ij = Cij – (ui+Vj) اذا كانت جميع الكلف موجبة فأن الحل امثل، وإذا كانت على الاقل كلفة تقديرية واحدة سالبة فـان الحل غير امثل.
٦- اذا كان الحل غير امثل نستخرج المتغير الداخل والخارج بنفس خطوات طريقة المسار المتعرج.
٧- نكرر جميع الخطوات اعلاه حتى نحصل على كلف تقديرية موجبة.

EX

Find the optimal solution of linear programing (L.P) using Multipliers

	1	2	3	supply	ui
1	9 $\boxed{5}$	3 $\boxed{1}$	$\boxed{8}$	12	$U_1 = 0$
2	$\boxed{2}$	7 $\boxed{4}$	7 $\boxed{0}$	14	$U_2 = 3$
3	• $\boxed{3}$	$\boxed{6}$	4 $\boxed{7}$	4	$U_3 = 10$
demand	9	10	11	30	
vj	$V_1=5$	$V_2=1$	$V_3=-3$		

الحل /

Min= 104

الخطوة الاولى: نستخرج كلف المتغيرات الاساسية

Cij = ui+vj

$C_{11} = U_1 + V_1$ $5 = 0 + V_1$ $V_1 = 5$

$C_{12} = U_1 + V_2$ $1 = 0 + V_2$ $V_2 = 3$

$C_{22} = U_2 + V_2$ $4 = U_2 + 1$ $U_2 = 3$

$C_{23} = U_2 + V_3 \qquad 0 = 3 + V_3 \qquad V_3 = -3$

$C_{33} = U_3 + V_3 \qquad 7 = U_3 + (-3) \qquad U_3 = 10$

الخطوة الثانية : نستخرج كلف المتغيرات غير الاساسية $\quad C\hat{}ij = Cij - (ui + Vj)$

$C\hat{}_{13} = C_{13} - (u_1 - v_3) \qquad 8- (0 + (-3)) \qquad C\hat{}_{13} = 11$

$C\hat{}_{21} = 2 - (3 + 5) \qquad C\hat{}_{21} = -6$

$C\hat{}_{31} = 3 - (10 + 5) \qquad C\hat{}_{31} = -12$

$C\hat{}_{32} = 6 - (10 + 1) \qquad C\hat{}_{32} = -5$

بما انه توجد قيم سالبة ← اذاً الحل غير امثل

ناخذ مسار اكبر قيمة مسبوقة بالسالب

المتغير الداخل دائما هو أول متغير

$X_{31} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{33}$

	9	3	7	7	4
4	5	7	3	11	-

المتغير الخارج هو اصغر قيمة مسبوقة بالسالب

	1	2	3	supply	ui
1	5 $\boxed{5}$	7 $\boxed{1}$	$\boxed{8}$	12	$U_1= 0$
2	• $\boxed{2}$	3 $\boxed{4}$	11 $\boxed{0}$	14	$U_2= 3$
3	4 $\boxed{3}$	$\boxed{6}$	- $\boxed{7}$	4	$U_3 =-2$
demand	9	10	11	30	
vj	$V_1=5$	$V_2=1$	$V_3=-3$		

$C\hat{}_{13} = C_{13} - (u_1 + v_3) \qquad 8- (0 + (-3)) \qquad C\hat{}_{13} = 11$

$C\hat{}_{21} = 2 - (3 + 5) \qquad C\hat{}_{21} = -6$

$C\hat{}_{32} = 6 - (-2 + 1) \qquad C\hat{}_{32} = 7$

$\hat{C}_{33} = 7 - (-2 - 3)$ $\qquad$ $\hat{C}_{33} = 12$

الحل غير امثل لوجود كلفة تقديرية سالبة

$X_{21} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{22}$

$\quad 5 \qquad 7 \qquad 3$

$3 \qquad 2 \qquad 10 \qquad -$

	1	2	3	supply	ui
1	2 $\boxed{5}$	10 $\boxed{1}$	$\boxed{8}$	12	$U_1 = 0$
2	3 $\boxed{2}$	3 $\boxed{4}$	11 $\boxed{0}$	14	$U_2 = 3$
3	4 $\boxed{3}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	4	$U_3 = -2$
demand	9	10	11	30	
vj	$V_1=5$	$V_2=1$	$V_3=3$		

$\hat{C}_{13} = C_{13} - (u_1 + v_3)$ $\qquad$ $8 - (0 + 5)$ $\qquad$ $\hat{C}_{13} = 3$

$\hat{C}_{22} = 4 - (3 + 1)$ $\qquad$ $\hat{C}_{22} = 0$

$\hat{C}_{32} = 6 - (1 - 2)$ $\qquad$ $\hat{C}_{32} = 7$

$\hat{C}_{33} = 7 - (-2 + 3)$ $\qquad$ $\hat{C}_{33} = 4$

الحل امثل لان جميع قيم الكلف التقديرية موجبة.

MinZ= 2(5) +10+3(2)+3(4)+0+4(3) = 50

EX

Find the optimal solution of linear programing (L.P) using Maltipliers

	1	2	3	supply	ui
1	4 $\boxed{1.3}$	4 $\boxed{1.5}$	7 $\boxed{1.2}$	15	U_1= 0
2	$\boxed{1.6}$	$\boxed{1.8}$	5 $\boxed{1}$	5	U_2= -0.2
demand	4	4	12	20	
vj	V_1=1.3	V_2=1.5	V_3=1.2		

الحل /

Min Z= 4(1.3)+4(1.5) +7(1.2) + 5(1) = 24.6

الخطوة الاولى: نستخرج كلف المتغيرات الاساسية $\quad$ Cij = ui+vj

$C_{11} = U_1 + V_1 \qquad 1.3 = 0 + V_1 \qquad V_1 = 1.3$

$C_{12} = U_1 + V_2 \qquad 1.5 = 0 + V_2 \qquad V_2 = 1.5$

$C_{13} = U_1 + V_3 \qquad 1.2 = 0 + V_3 \qquad V_3 = 1.2$

$C_{23} = U_2 + V_3 \qquad 1= U_2 + 1.2 \qquad V_3 = -0.2$

الخطوة الثانية : نستخرج كلف المتغيرات غير الاساسية $\quad C^{\wedge}ij = Cij - (ui + Vj)$

$C^{\wedge}_{21} = C_{21} - (U_2 + V_1) \qquad 1.6\text{-}(-0.2+1.3) \qquad C^{\wedge}_{21}= 0.5$

$C^{\wedge}_{22} = C_{22} - (U_2 + V_2) \qquad 1.8\text{-} (-0.2 +1.5) \qquad C^{\wedge}_{22} = 0.5$

الحل امثل لان جميع قيم الكلف التقديرية موجبة.