مثال:

إذا كانت R محصلة المتجهين $\vec{B},\vec{A}$ المتلاقيان بزاوية θ فبرهن ان

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2ABcos\theta$$

الحل:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$
$$\overrightarrow{R^2} = \vec{R}.\vec{R} = (\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})$$
$$= \vec{A}.\vec{A} + \vec{B}.\vec{B} + 2\vec{A}.\vec{B}$$
$$R^2 = A^2 + B^2 + 2ABCos\theta$$

حيث $\vec{A}.\vec{B} = ABcos\theta$

مثال:

جد الزاوية بين المتجهين

$$\vec{A} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$$
$$\vec{B} = \hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 3\hat{k}$$

الحل:

لدينا $\vec{A}.\vec{B} = ABcos\theta$

$$\therefore cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = \frac{(3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k})(\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 3\hat{k})}{\left(\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (1)^2}\right)\left(\sqrt{(1)^2 + (-5)^2 + (3)^2}\right)}$$

$$cos\theta = \frac{3\hat{\imath}.\hat{\imath} + 3\hat{\imath}.(-5\hat{\imath}) + 3\hat{\imath}.3\hat{k} + (-2\hat{\jmath})\hat{\imath} + (-2\hat{\jmath}).(-5\hat{\jmath}) + (-2\hat{\imath}).3k + \hat{k}.\hat{\imath} + \hat{k}.(-5\hat{\jmath}) + \hat{k}.3\hat{k}}{(\sqrt{9+4+1})(\sqrt{1+25+9})}$$

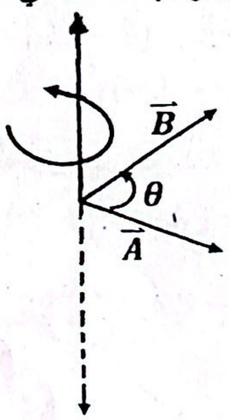
$$cos\theta = \frac{3+10+3}{(\sqrt{14})(35)} = \frac{16}{\sqrt{14\times 35}} = \frac{16}{22.1} = 0.723$$

$$\therefore \theta = 43^\circ$$

<u>الضرب المتجهي للمتجهات:</u>

يرمز للضرب المتجهي مثل $\vec{B},\vec{A}$ بالرمز $(\vec{A},\vec{B})$ ويقرأ $(\vec{A}cross\vec{B})$ فإذا كانت المتجه $\vec{C}$ المحصلة فانه يكون عموديا على المستوى المحدد بالمتجهين $\vec{B},\vec{A}$ واتجاهه كما في الشكل:

ان حاصل الضرب الاتجاهي هو كمية متجهة قيمتها العددية تساوي حاصل ضرب القيمتين العددين للمتجهين وجيب الزاوية θ المرصودة بينهما كما في العلاقة التالية:

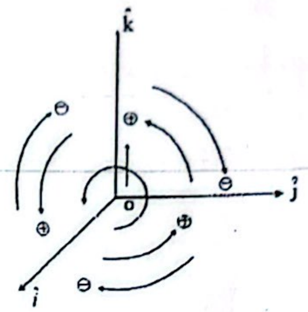


$$\vec{A} \times \vec{B} = A.B\, sin\theta$$

وفي المعادلة أعلاه فأن حاصل الضرب المتجهي للوحدات المتوازية للمتجهات يساوي صفر (وذلك لأن جيب الزاوية صفر يساوي صفر)
وأن حاصل الضرب العددي للوحدات المتعامدة للمتجهات يساوي 1 وذلك لأن (جيب الزاوية 90 يساوي 1)
وعليه فأن:
للمتجهات الزاوية 0 $\hat{\imath}.\hat{\imath} = \hat{\jmath}.\hat{\jmath} = \hat{k}.\hat{k} = 0$
اما المتجهات المتعامدة وحسب قاعدة اليد اليمنى:

$$\left.\begin{aligned} \hat{\imath}.\hat{\jmath} &= \hat{k} \\ \hat{\jmath} \times \hat{k} &= \hat{\imath} \\ \hat{k} \times \hat{\imath} &= \hat{\jmath} \end{aligned}\right\}$$ مع قاعدة اليد اليمنى

$$\left.\begin{aligned} -\hat{\jmath} \times \hat{\imath} &= \hat{k} \\ -\hat{k} \times \hat{\jmath} &= \hat{\imath} \\ -\hat{\imath} \times \hat{k} &= \hat{\jmath} \end{aligned}\right\}$$ عكس قاعدة اليد اليمنى

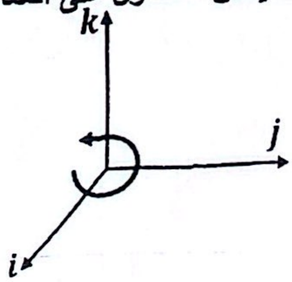


فإذا كان:

$$\vec{A} = \hat{\imath}Ax + \hat{\jmath}Ay + \hat{k}Az$$
$$\vec{B} = \hat{\imath}Bx + \hat{\jmath}By + \hat{k}Bz$$
$$\vec{A} \times \vec{B} = (\hat{\imath}Ax + \hat{\jmath}Ay + \hat{k}Az) \times (\hat{\imath}Bx + \hat{\jmath}By + \hat{k}Bz)$$
$$+(\hat{\jmath}Ay * \hat{\imath}Bx) + (\cancel{\hat{\jmath}Ay \times \hat{\jmath}By}) + (\hat{\jmath}Ay * \hat{k}Bz)$$
$$+(\hat{k}Az * \hat{\imath}Bx) + (\hat{k}Az \times \hat{\jmath}By) + (\cancel{\hat{k}Az \times \hat{k}Bz})$$
$$+(\cancel{\hat{\imath}Ax * \hat{\imath}Bx}) + (\hat{\imath}Ax * \hat{\jmath}By) + (\hat{\imath}Ax * \hat{k}Bz$$
$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{k}AxBy - \hat{\jmath}AxBz - \hat{k}AyBx + \hat{\imath}AyBz$$
$$+\hat{\jmath}AzBx - \hat{\imath}AzBy$$
$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{\imath}(AyBz - AzBy) + \hat{\jmath}(AzBx - AxBz)$$
$$+\hat{k}(AxBy - AyBy)$$

كما يمكن الحصول على المعادلة أعلاه بطريقة المحددات

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \end{vmatrix}$$



$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{\imath}(AyBz - AzBy) + \vec{\jmath}(AzBx - AxBz)$$
$$+\hat{k}(AxBy - AyBx)$$

مثال: برهن أن:

$$(\vec{A}\times\vec{B})+(\vec{A}.\vec{B})=A^2B^2$$

الحل:

$$\vec{A}.\vec{B}=AB\cos\theta$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=AB\sin\theta$$

نعوض في المعادلة

$$(AB\sin\theta)^2+(AB\cos\theta)^2=A^2B^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=A^2B^2$$

$\therefore \cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ لأن و. هـ. م.

مثال: إذا كان

$$A=2\hat{\imath}-3\hat{\jmath}-\hat{k}$$

$$\vec{B}=\hat{\imath}+4\hat{\jmath}-2\hat{k}$$

جد: b-$(\vec{B}\times\vec{A})$ a-$(\vec{A}\times\vec{B})$ c-$(\vec{A}+\vec{B})\times(\vec{A}-\vec{B})$

الحل:

$$a)\ \vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 2 & -3 & -1\\ 1 & 4 & -2\end{vmatrix}$$

$$\therefore \vec{A}\times\vec{B}=\hat{\imath}(+6+4)+\hat{\jmath}(-1+4)+\hat{k}(8+3)$$

$$=10\hat{\imath}+3\hat{\jmath}+11\hat{k}$$

$$b)\ \vec{B}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 1 & 4 & -2\\ 2 & -3 & -1\end{vmatrix}$$

$$\vec{B}\times\vec{A}=\hat{\imath}(-4-6)+\hat{\jmath}(-4+1)+\hat{k}(-3-8)$$

$$=-10\hat{\imath}-3\hat{\jmath}-11\hat{k}$$

$$c)\ \vec{A}+\vec{B}=(2\hat{\imath}-3\hat{\jmath}-\hat{k})+(\hat{\imath}+4\hat{\jmath}-2\hat{k})$$

$$=\hat{\imath}(2+1)+\hat{\jmath}(4-3)+\hat{k}(-1-2)$$

$$=3\hat{\imath}+\hat{\jmath}-3\hat{k}$$

$$\vec{A}-\vec{B}=(2\hat{\imath}-3\hat{\jmath}-\hat{k})-(\hat{\imath}+4\hat{\jmath}-2\hat{k})$$

$$=\hat{\imath}(2-1)+\hat{\jmath}(-3-4)+\hat{k}(-1+2)$$

$$=\hat{\imath}-7\hat{\jmath}+\hat{k}$$

$$\therefore (\vec{A}+\vec{B})\times(\vec{A}-\vec{B})=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 3 & 1 & -3\\ 1 & -7 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\hat{\imath}(1-21)+\hat{\jmath}(-3-3)+\hat{k}(-21-1)=-20\hat{\imath}-6\hat{\jmath}-22\hat{k}$$

مثال: إذا كان:

$$\vec{A} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 5\hat{k}$$
$$\vec{B} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 6\hat{k}$$

احسب بطريقة المتجهات: a) طول كل متجه b) A.B c) الزاوية بين المتجهين

الحل:

$$a)\ A = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50}$$
$$B = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (6)^2} = \sqrt{1 + 4 + 36} = \sqrt{41}$$
$$b)\ \vec{A}.\vec{B} = (3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 5\hat{k}).(-\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 6\hat{k})$$
$$= (3)(1) + (4)(2) + (-5)(6)$$
$$= -3 + 8 - 30 = -25$$
$$c)\ \vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$$
$$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = \frac{-25}{\sqrt{50}\sqrt{41}} = -\frac{25}{45} = -0.55$$
$$\theta = 123$$

مثال: بين أي من المتجهات الاتية متعامدة وتضع زاوية قائمة بينها؟

$$\vec{A} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$$
$$\vec{B} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}$$
$$\vec{C} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}$$

الحل: لدينا:

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$$

لكي يكون اثنان من هذه المتجهات متعامدة هذا يعني ان $\cos\theta = \cos 90 = 0$ أي:

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = 0$$

لنطبق هذا على المتجهات الثلاثة ونجد قيم كل متجه وحاصل ضرب العددين لكل متجهين:

$$A = \sqrt{(3)^2 + (-2)^3 + (1)^2} = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$$
$$B = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (5)^2} = \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}$$
$$C = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 1 + 16} = \sqrt{21}$$

وحاصل الضرب العددي لكل متجهين يساوي:

$$\vec{A}.\vec{B} = (3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}).(\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}) = (3)(1) + (-2)(-3) + (1)(5)$$
$$= 3 + 6 + 5 = 14$$
$$\vec{A}.\vec{C} = (3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}).(2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}) = (3)(2) + (-2)(1) + (1)(-4)$$
$$= 6 - 2 - 4 = 0$$
$$\vec{B}.\vec{C} = (\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}).(2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}) = (1)(2) + (-3)(1) + (5)(-4)$$

$= 2 - 3 - 20 = -21$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{C}}{AC} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = 0$$

$\therefore \theta = 90$

هذا يعني ان المتجهات $\vec{C},\vec{A}$ متعامدان ويصنعان زاوية قائمة بينهما

مثال: متجهان الأول: $\vec{a} + \vec{b} = 11\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 5\hat{k}$

والثاني $\vec{a} - \vec{b} = -5\hat{\imath} + 11\hat{\jmath} + 9\hat{k}$

1)جد كلا من المتجهين $\vec{b},\vec{a}$ والزاوية المحصورة بين $(\vec{a})$ و $(\vec{a} + \vec{b})$

الحل:

بجمع المتجهين الأول والثاني:

$\vec{a} + \vec{b} = 11\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 5\hat{k}$

$\vec{a} - \vec{b} = -5\hat{\imath} + 11\hat{\jmath} + 9\hat{k}$

بالجمع

$2\vec{a} = 6\hat{\imath} + 10\hat{\jmath} + 14\hat{k}$

$\vec{a} = 3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 7\hat{k}$

طرح المتجهين الأول والثاني

$\vec{a} + \vec{b} = 11\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 5\hat{k}$

$\mp\vec{a} \mp \vec{b} = \mp 5\hat{\imath} \mp 11\hat{\jmath} \mp 9\hat{k}$

بالطرح

$2\vec{b} = 16\hat{\imath} - 12\hat{\jmath} - 4\hat{k}$

$\vec{b} = 8\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} - 2\hat{k}$

2) الزاوية بين $\vec{a}$ و $\vec{a} + \vec{b}$

$(\vec{a} + \vec{b}).\vec{a} = (a + b)a\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{(\vec{a} + \vec{b}).\vec{a}}{(a + b)(a)} = \frac{(11\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 5\hat{k})(3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 7\hat{k})}{\sqrt{112 + 1 + 25}\sqrt{9 + 25 + 49}} = \frac{33 - 5 + 35}{\sqrt{147}\sqrt{83}}$$

$$\cos\theta = \frac{63}{12 * 9} = \frac{63}{108} = 0.58$$

$\theta = 54°$

و. هـ. م.

مثال: جد قيمة الثابت $\propto$ إذا كان المتجه $\vec{A} = 4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$

عمودي على المتجه $\vec{B} = \alpha\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 4\hat{k}$

الحل: بما ان $\vec{A} \perp \vec{B}$ ∴ الزاوية بينهما 90

$$\therefore cos90 = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = \frac{(4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k})(\alpha\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 4\hat{k})}{\sqrt{16 + 4 + 9}\sqrt{(\alpha)^2 + 9 + 16}}$$

$$0 = \frac{4\alpha + 6 - 12}{\sqrt{29}\sqrt{\alpha^2 + 25}}$$

$$0 = 4\alpha + 6 - 12 \qquad \therefore 4\alpha = 6 \qquad \therefore \alpha = \frac{3}{2} = 1.5$$

مثال: اثبت ان المتجهات التالية تشكل مثلث قائم الزاوية:

$$\vec{A} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k} \;\&\; \vec{B} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 5\hat{k} \;\&\; \vec{C} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 4\hat{k}$$

الحل:

$$A = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6} = 2.4 \;\&\; B = \sqrt{1 + 9 + 25} = 5.9$$

$$C = \sqrt{9 + 16 + 16} = 64$$

$$\vec{A}.\vec{B} = 2 + 3 - 5 = 0 \;\&\; \vec{A}.\vec{C} = 6 + 4 - 4 = 6 \;\&\; \vec{B}.\vec{C} = 3 + 12 + 20 = 35$$

$$\therefore \measuredangle\vec{A}\&\vec{B} \Rightarrow cos\theta = \frac{0}{2.4 * 5.9} = 0 \quad \therefore \theta = 90^\circ$$ زاوية قائمة

$$\measuredangle\vec{A}\&\vec{C} \Rightarrow cos\theta = \frac{6}{2.4 * 6.4} = \frac{6}{15.36} = 0.39 \quad \therefore \theta = 67^\circ$$

$$\measuredangle\vec{B}\&\vec{C} \Rightarrow cos\theta = \frac{35}{5.9 * 6.4} = \frac{6}{15.36} = 0.39 \quad \therefore \theta = 23^\circ$$

$\therefore$ مجموع زوايا المثلث $90^\circ + 67^\circ + 23^\circ = 180^\circ$

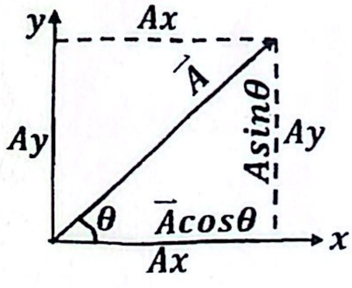
$\therefore$ هي تمثل اضلاع مثلث قائم الزاوية بين $\vec{A}\&\vec{B}$

تحليل المتجهات وحساب المحصلة والمعادلة Resolution of Vectors

يمكن تحليل المتجه $\vec{A}$ الذي يعمل زاوية (θ) مع محور x باتجاهين متعامدين في محاور (y, x) بحيث ان:

$$Ax = A\,cos\theta \quad \& \quad Ay = Asin\theta$$

كما في الشكل التالي



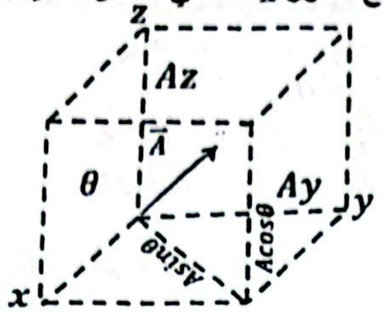
والمحصلة تكون:

$$A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}$$

واتجاه المحصلة

$$\theta = tan^{-1}\frac{y}{x}$$

اما إذا وقع المتجه $(\vec{A})$ بالفراغ (x, y, z) وكان يعمل زاوية مقدارها θ مع محور z ومسقطه على مستوى (y, x) ويعمل زاوية مقدارها $\emptyset$ مع محور x كما في الشكل التالية:



فان

$$Ax = Asin\theta Cos\emptyset$$

$$Ay = Asin\theta sin\emptyset$$

$$Az = Acos\theta$$

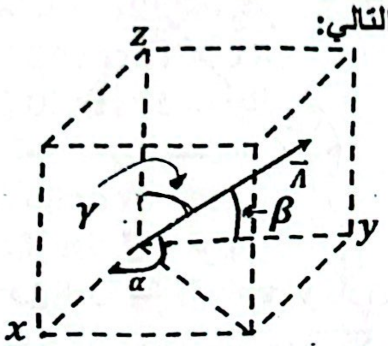
والمحصلة تكون:

$$A = \sqrt{A^2x + A^2y + Az^2}$$

كذلك اتجاه المحصلة:

$$sin\emptyset = \frac{Ay}{Asin\theta} \qquad \theta = tan^{-1}\frac{y}{x}$$

أما إذا وقع المتجه $\vec{A}$ بالفراغ (z, y, x) سابقا وكان يعمل زاوية α مع محور x ويعمل زاوية (β) مع محور y ويعمل زاوية (γ) مع محور z كما في الشكل التالي:



فان

$$Ax = Acos\alpha$$

$$Ay = Acos\beta$$

$$Az = Acos\gamma$$

وان مجموع الجبري مربع جيوب تمام هذه الزوايا الثلاث يساوي واحد أي ان

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$$

<u>إيجاد محصلة عدة متجهات في مستوى (x, y)</u>

عند مواجهة مسائل فيزياوية فيها عدة متجهات اثنان او ثلاثة او أربعة او اكثر $(A, B, C, D, ...)$ الخ) فاننا نحتاج الى تحليل كل متجه على حدة الى مركباته بالنسبة الى محاور (y, x) كما ذكر سابقا مما سيسهل علينا إيجاد المحصلة حيث سنقوم بعد اجراء التحليل لكل متجه بجمع مركبات المتجهات في اتجاه المحور x ثم جمع مركبات المتجهات في محور y ثم نطبق قانون المحصلة الذي ينص على ان المحصلة تساوي الجذور التربيعية لمجموع مربع مركبات x ومربع مركبات y كما في المعادلة التالية:

$$A = \sqrt{A^2x + Ay^2}$$

ويحسب اتجاه المحصلة لهذه المركبات من خلال المعادلة التالية:

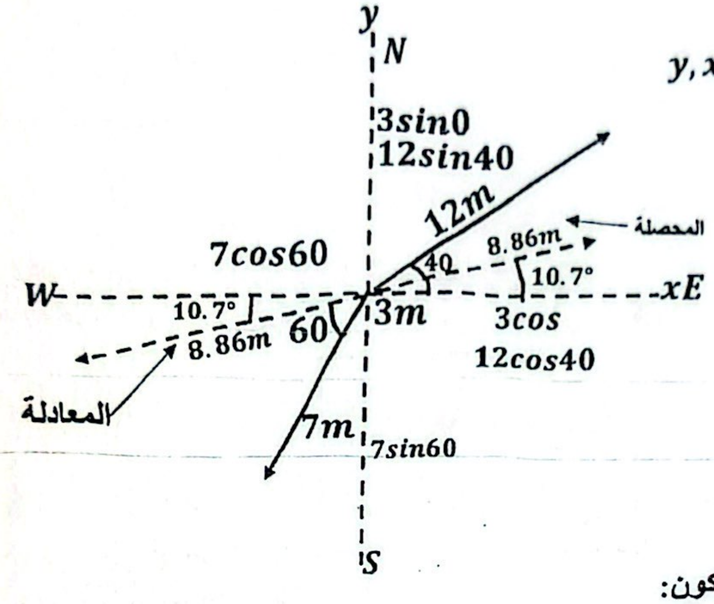
$$\theta = tan^{-1}\frac{Ay}{Ax}$$

أما المعادلة فتعرف بأنها كمية متجهة تساوي قيمتها العددية لقيمة المحصلة وتعاكسها في الاتجاه وهذا ينطبق على كل الحالات الواردة سابقا.

مثال:

جد محصلة واتجاه المحصلة والمعادلة واتجاه المعادلة للمتجهات التالية $(3.00m)$ باتجاه الشرق و $(12.00m)$ اتجاه $(40°)$شمال الشرق و $(7.00m)$ اتجاه $(60°)$ جنوب الغرب.

الحل:



نحل المتجهات الى مركباتها في y, x

المتجهة 3.00 شرقا

يحلل الى:

$$Ax = 3cos0(x)$$

$$Ay = 3sin0(y)$$

والمتجه $12cm$ يحلل الى:

$$Bx = 12cos40\ (x)$$

$$By = 12sin40\ (y)$$

والمتجه $(7m)$ يحلل الى

$$Cx = 7cos60\ (x)$$

$$Cy = 7sin60(y)$$

مجموع المركبات باتجاه y, x يكون:

باتجاه x ∴

$$Rx = 3cos0 + 12cos40 - 7cos60$$
$$= 3 * (1) + 12 * (0.766) - 7 * (0.5)$$
$$= 8.69m$$

ومجموع المركبات باتجاه y:

$$Ry = 3sin0 + 12sin40 - 7sin60$$
$$= 3 * (0) + 12 * (0.642) - 7 * (0.866)$$
$$= 1.65m$$

$$R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2} = \sqrt{(8.69)^2 + (1.65)^2} = 8.86m$$

اتجاه المحصلة يحسب من العلاقة:

$$tan\theta = \frac{Ry}{Rx} = \frac{1.65}{8.7} = 0.189$$

$\therefore \theta = tan^{-1}0.189 = 10.7°$ شمال الشرق

المعادلة تساوي أيضا $8.68m$ ولكن اتجاهها $10.7°$ جنوب الغرب: