التوزيعات الاحتمالية المتقطعة :

1 توزيع ثنائي الحدين (Binomial Distribution) :

هو توزيع لتجربة عشوائية لها ناتجان فقط أحدهما نجاح التجربة والآخر فشلها ويكون الشرط الأساسي أن احتمال النجاح لا يتأثر بتكرار التجربة

خصائص التوزيع

تتكون التجربة من عدد **n** من المحاولات المتكررة

- كل محاولة لها نتيجتين إما نجاح او فشل ، نعم أو لا ، مريض أو سليم ، حي أو متوفى.
- نتيجة كل محاولة مستقلة عن المحاولات الأخرى ، ولا تتأثر بها.
- احتمال النجاح يرمز له بـ $\boldsymbol{p}$ واحتمال الفشل $\mathbf{1- \boldsymbol{p}}$ يرمز له بـ $\boldsymbol{q}$
- وحيث أن نتيجة كل محاولة هي اما نجاح أو فشل فإن

$$p + q = 1 \text{ and } q = 1 - p.$$

- اهتمامنا يكون بعدد مرات النجاح *number of successes* ضمن عدد مرات المحاولة

صيغة التوزيع ذو الحدين Binomial Probability Formula

$$p(X=x)=\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x}\ ,\quad x=0,1,2,\ldots,n$$

- n يمثل عدد مرات المحاولة في التجربة number of trials
- x يمثل عدد مرات النجاح number of successes
- n-x عدد مرات الفشل number of failures
- P احتمال النجاح probability of success
- q يمثل احتمال الفشل probability of failure ويساوي 1-p

The binomial distribution has the following properties:

- The mean of the distribution (μ_x) is equal to (n * P) . الوسط الحسابي
- The variance (σ^2_x) is n * P * (1 - P). التباين
- The standard deviation (σ_x) is sqrt[n * P * (1 - P)]. الانحراف المعياري

$$M(t) = [(1 - p) + pe^t]^n$$

- مثال : عولج 10 أشخاص جراحيًا ، نسبة النجاح 70% لكل شخص، علمًا أن عدد مرات الجراحة الناجحة يتبع للتوزيع ثنائي الحدين حيث n=10, p= 0.7 ما هو احتمال نجاح 5عمليات جراحية.

$$n = 10,\ r = 5,\ p = 70\% = 0.7,\ q = 1 - 0.7 = 0.3$$

$$p(r=5) = \left(\frac{10!}{5!(10-5)!}\right) 0.7^{5} \cdot 0.3^{10-5} \quad = (252)(0.7^{5})(0.3^{5}) = 0.1029$$

Example

Suppose a die is tossed 5 times. What is the probability of getting exactly 2 fours?

$$b(2; 5, 0.167) = {}_5C_2 * (0.167)^2 * (0.833)^3$$

$$b(2; 5, 0.167) = 0.161$$

الدالة المولد للعزوم (Moment Generating Function) :

If X is a random variable, then its MGF is:

$$\boxed{M(t)} = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} \; P(X=x) & \text{(Discrete)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \; f(x)dx & \text{(Continuous)} \end{cases}$$

وبذلك فان الدالة المولدة للعزوم لتوزيع ثنائي الحدين ستكون بالشكل :

$$M(t) = [(1 - p) + pe^{t}]^{n}$$

عندما يتم التعويض عن قيم

$T=0$ في الدالة المولدة في المشتقة الاولى والثانية والثالثة يتم الحصول على

- $M(0) = 1$,
- $M'(0) = E(X)$, الوسط الحسابي
- $M''(0) = E(X^2)$, العزم الثاني
- $M'''(0) = E(X^3)$ العزم الثالث

توزيع بواسون Poisson Distribution

هو توزيع احتمالي منفصل يستخدم للمتغيرات العشوائية المحددة في فترة زمنية محدودة أو في منطقة صغيرة كالحوادث المرورية في أسبوع أو عدد الأخطاء في صفحة كتاب او عدد المكالمات خلال شهر ..... الخ

ويتصف التوزيع باستقلالية المحاولات(n)ويكون حجم العينة كبير حيث ان ($n \geq 30$)

وصيغة دالة ال p.m.f لتوزيع بواسون تأخذ الشكل :

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^{x}}{x!} \quad , x = 0, 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, \infty$$

ويعبر عن التوزيع بالشكل, $X \sim Po\ (\lambda)$

وهي تعني ان المتغير يتوزع بواسون بالمعلمة λ

حيث λ تمثل معلمة توزيع بواسون وتكون موجبة دائما وهي تمثل المعدل او المتوسط او الوسط الحسابي .

خصائص توزيع بواسون :

الوسط الحسابي $\lambda = \mu$

التباين $\sigma^{2} = \lambda$

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\lambda}$

الدالة المولدة للعزوم تاخذ الصيغة : $M(t) = e^{\lambda(e^{t}-1)}$

يتصف التوزيع هذا باستقلالية المحاولات (n) حيث ان $n \geq 30$

مثال / أذا كان متوسط عدد الحوادث المرورية اليومية التي تحدث على الطرق الخارجية هو حادث واحد.

1-أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x.

2-ماهو أحتمال أن يحدث حادثان في يوم واحد.

3-الدالة المولدة للعزوم .

$\lambda = 1$, $x \sim p(1)$

1- $p(x) = \dfrac{e^{-1}\ 1^{x}}{x!}$, $x = 0,1,\ldots\ldots\ldots\ldots,\infty$

2- $p(x=2) = \dfrac{e^{-1}\,1^{2}}{2!} = \dfrac{e^{-1}}{2!} = \dfrac{0.368}{2} = 0.184$

3- $M(t) = e^{\,(e^{t}-1)}$

-

مثال / لديك المتغير العشوائي (x) يتوزع وفق توزيع بواسون $x \sim P(2)$.

1-أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي(x).

2-جد الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري.

3-أحسب قيمة $p(x = 2)$, $p(x < 2)$.

4- الدالة المولدة للعزوم

$\lambda = 2$, $x \sim P(2)$

1- $p(x) = \dfrac{e^{-2}\ 2^{x}}{x!}$, $x = 0,1,\ldots\ldots\ldots,\infty$

2 – $\lambda = \mu = 2$, $\sigma^{2} = \lambda = 2$, $\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{2} = 1.41$

3- $p(x=2) = \dfrac{e^{-2}\ 2^{2}}{2!} = (0.135)(2) = 0.27$

$P(x < 2) = P(x = 1) + P(x = 0) = \dfrac{e^{-2}\ 2^{1}}{1!} + \dfrac{e^{-2}\ 2^{0}}{0!} = (0.135)(2) + 0.135 = 0.405$

4- $M(t) = e^{2(e^{t}-1)}$

مثال / اذا كانت لديك الدالة المولدة للعزوم التالية ؟

$$M(t) = e^{1.5(e^{t}-1)}$$

1-أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي(x).

2-الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري.

3-$p(x \geq 1)$

الحل :

1- $$p(x) = \frac{e^{-1.5}\, 1.5^{x}}{x!} \quad , x = 0,1,\ldots\ldots\ldots\ldots,\infty$$

2 − $$\lambda = 1.5 = \mu \quad , \quad \sigma^{2} = 1.5 \quad , \quad \sigma = \sqrt{1.5}$$

3- $$p(x \geq 1) = 1- p(x < 1) = 1- p(x =0) = 1- \frac{e^{-1.5}\, 1.5^{0}}{0!} = 1- 0.223 = 0.777$$

العلاقة بين توزيع بواسون وتوزيع ثنائي الحدين :

في حالة كون حجم العينة $n \geq 30$ وقيمة الاحتمال p صغير فان توزيع ثنائي الحدين سيقترب من توزيع بواسون
ويمكن حساب قيمة الاحتمال من خلال العلاقة **$(\lambda = np)$**

مثال :
مصنع ينتج عدد من الوحدات ، وكان معلوما أن به نسبة 0.3% من الوحدات معيبة(تالفة). أخذت منه عينة عشوائية بحجم 350. إحسب الاحتمالات الآتية:
1- وجود وحدة معيبة 2- وجود وحدتان معيبتان 3- عدم وجود معيب 4- وجود على الاكثر واحدة معيبة

$p = 0.3\,\% = 0.003 \quad , \quad n = 350 \quad , \quad \lambda = np = (350)(0.003) = 1.05$

$X \sim Po\,(1.05)$

$$p(x) = \frac{e^{-1.05}\ 1.05^{x}}{x!} \quad , x = 0,1,\ldots\ldots\ldots\ldots,\infty$$

$$1\text{- } p(x=1) = \frac{e^{-1.05}\ 1.05^{1}}{1!} = (0.3499)(1.05) = 0.367$$

$$2\text{- } p(x=2) = \frac{e^{-1.05}\ 1.05^{2}}{2!} = (0.3499)(0.551) = 0.193$$

$$3\text{-} p(x=0) = \frac{e^{-1.05}\ 1.05^{0}}{0!} = (0.3499)(1) = 0.3499$$

$$4\text{-} p(x \le 1) = 1 - p(x<1) = 1 - p(x=0) = 1 - \frac{e^{-1.05}\ 1.05^{0}}{0!} = 1 - 0.349 = 0.651$$

مثال :

إذا كان عدد الأخطاء المطبعية في كتاب يتكون من 600 صفحة هو 50 خطأ فإذا كانت الأخطاء تتوزع توزيعا عشوائيا، اذا تم اختيار 10 صفحات عشوائيا من الكتاب ، اوجد مايلي :

1- اكتب الدالة الاحتمالية (pmf) للتوزيع .

2- الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري .

3- الدالة المولدة للعزوم .

4- احتمال ان لاتحتوي على اخطاء .

5- احتمال على الاكثر خطأ واحد .

الحل :

$p = 50 / 600 = 0.083$, $\lambda = np = (10)(0.083) = 0.83$

1) $p(x) = \dfrac{e^{-0.83}\ 0.83^{x}}{x!}$, $x = 0,1,\ldots\ldots\ldots\ldots,\infty$

2) $\lambda = \mu = 0.83$, $\sigma^2 = \lambda = 0.83$, $\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{0.83}$=0.911

3) M(t) = $e^{0.83\,(e^{t}-1)}$

4) p(x=0)= $\frac{e^{-0.83}\ 0.83^{0}}{0!}$ = (0.436)(1)=0.436

5) p(x≤1) = p(1) +p(0) = $\frac{e^{-0.83}\ 0.83^{1}}{1!} + \frac{e^{-0.83}\ 0.83^{0}}{0!}$ =0.362+0.436 =0.798