السعي ١ 4 الحل ١ 30 حضور 5 حضور 5 10

$\vec{A} \times \vec{B} = A.B\, sin\theta$

وفي المعادلة أعلاه فأن حاصل الضرب المتجهي للوحدات المتوازية للمتجهات يساوي صفر (وذلك لأن جيب الزاوية صفر يساوي صفر)

وأن حاصل الضرب العددي للوحدات المتعامدة للمتجهات يساوي 1 وذلك لأن (جيب الزاوية 90 يساوي 1)

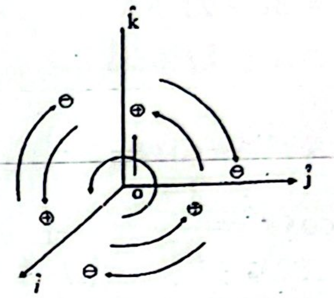
وعليه فان:

للمتجهات الزاوية 0 $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 0$

اما المتجهات المتعامدة وحسب قاعدة اليد اليمنى:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{i}.\hat{j} = \hat{k} \\ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \\ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \end{array}\right\}$$ مع قاعدة اليد اليمنى

$$\left.\begin{array}{l} -\hat{j} \times \hat{i} = \hat{k} \\ -\hat{k} \times \hat{j} = \hat{i} \\ -\hat{i} \times \hat{k} = \hat{j} \end{array}\right\}$$ عكس قاعدة اليد اليمنى



فإذا كان:

$\vec{A} = \hat{i}Ax + \hat{j}Ay + \hat{k}Az$

$\vec{B} = \hat{i}Bx + \hat{j}By + \hat{k}Bz$

$\vec{A} \times \vec{B} = (\hat{i}Ax + \hat{j}Ay + \hat{k}Az) \times (\hat{i}Bx + \hat{j}By + \hat{k}Bz)$

$+(\hat{j}Ay * \hat{i}Bx) + (\cancel{\hat{j}Ay \times \hat{j}By}) + (\hat{j}Ay * \hat{k}Bz)$

$+(\hat{k}Az * \hat{i}Bx) + (\hat{k}Az \times \hat{j}By) + (\cancel{\hat{k}Az \times \hat{k}Bz})$

$+(\cancel{\hat{i}Ax * \hat{i}Bx}) + (\hat{i}Ax * \hat{j}By) + (\hat{i}Ax * \hat{k}Bz$

$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{k}AxBy - \hat{j}AxBz - \hat{k}AyBx + \hat{i}AyBz$

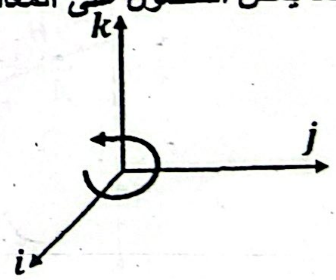
$+\hat{j}AzBx - \hat{i}AzBy$

$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{i}(AyBz - AzBy) + \hat{j}(AzBx - AxBz)$

$+\hat{k}(AxBy - AyBy)$

كما يمكن الحصول على المعادلة أعلاه بطريقة المحددات

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \end{vmatrix}$$



$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{i}(AyBz - AzBy) + \vec{j}(AzBx - AxBz)$

$+\hat{k}(AxBy - AyBx)$

مثال: برهن أن:

$$(\vec{A}\times\vec{B})^2 + (\vec{A}.\vec{B})^2 = A^2B^2$$

الحل:

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta$$

نعوض في المعادلة

$$(AB\sin\theta)^2 + (AB\cos\theta)^2 = A^2B^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = A^2B^2$$

$\therefore \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ لأن   و. هـ. م.

مثال: إذا كان

$$A = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - \hat{k}$$

$$\vec{B} = \hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}$$

جد: b- $(\vec{B}\times\vec{A})$ a- $(\vec{A}\times\vec{B})$ c- $(\vec{A}+\vec{B})\times(\vec{A}-\vec{B})$

الحل:

a) $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

$$\therefore \vec{A}\times\vec{B} = \hat{\imath}(+6+4) + \hat{\jmath}(-1+4) + \hat{k}(8+3)$$

$$= 10\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 11\hat{k}$$

b) $\vec{B}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

$$\vec{B}\times\vec{A} = \hat{\imath}(-4-6) + \hat{\jmath}(-4+1) + \hat{k}(-3-8)$$

$$= -10\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 11\hat{k}$$

c) $\vec{A}+\vec{B} = (2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - \hat{k}) + (\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k})$

$$= \hat{\imath}(2+1) + \hat{\jmath}(4-3) + \hat{k}(-1-2)$$

$$= 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

$$\vec{A}-\vec{B} = (2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - \hat{k}) - (\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k})$$

$$= \hat{\imath}(2-1) + \hat{\jmath}(-3-4) + \hat{k}(-1+2)$$

$$= \hat{\imath} - 7\hat{\jmath} + \hat{k}$$

$$\therefore (\vec{A}+\vec{B})\times(\vec{A}-\vec{B}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}(1-21) + \hat{\jmath}(+3+3) + \hat{k}(-21-1) = -20\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 22\hat{k}$$

2

مثال: إذا كان:

$\vec{A} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 5\hat{k}$

$\vec{B} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 6\hat{k}$

احسب بطريقة المتجهات: a) طول كل متجه b) A.B c) الزاوية بين المتجهين

الحل:

a) $A = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}$

$B = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (6)^2} = \sqrt{1+4+36} = \sqrt{41}$

b) $\vec{A}.\vec{B} = (3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 5\hat{k}).(-\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 6\hat{k})$

$= (3)(1) + (4)(2) + (-5)(6)$

$= -3 + 8 - 30 = -25$

c) $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$

$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = \frac{-25}{\sqrt{50}\sqrt{41}} = -\frac{25}{45} = -0.55$

$\theta = 123$

3

مثال: بين أي من المتجهات الاتية متعامدة وتضع زاوية قائمة بينها؟

$\vec{A} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$

$\vec{B} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}$

$\vec{C} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}$

الحل: لدينا:

$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$

لكي يكون اثنان من هذه المتجهات متعامدة هذا يعني ان $\cos\theta = \cos 90 = 0$ أي:

$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = 0$

لنطبق هذا على المتجهات الثلاثة ونجد قيم كل متجه وحاصل ضرب العددين لكل متجهين:

$A = \sqrt{(3)^2 + (-2)^3 + (1)^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

$B = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (5)^2} = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$

$C = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$

وحاصل الضرب العددي لكل متجهين يساوي:

$\vec{A}.\vec{B} = (3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}).(\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}) = (3)(1) + (-2)(-3) + (1)(5)$

$= 3 + 6 + 5 = 14$

$\vec{A}.\vec{C} = (3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}).(2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}) = (3)(2) + (-2)(1) + (1)(-4)$

$= 6 - 2 - 4 = 0$

$\vec{B}.\vec{C} = (\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}).(2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}) = (1)(2) + (-3)(1) + (5)(-4)$

$$= 2 - 3 - 20 = -21$$

$$\therefore cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{C}}{AC} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = 0$$

$$\therefore \theta = 90$$

هذا يعني ان المتجهات $\vec{C},\vec{A}$ متعامدان ويصنعان زاوية قائمة بينهما

11 مثال: متجهان الأول: $\vec{a} + \vec{b} = 11\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 5\hat{k}$

والثاني $\vec{a} - \vec{b} = -5\hat{\imath} + 11\hat{\jmath} + 9\hat{k}$

1)جد كلا من المتجهين $\vec{b},\vec{a}$ والزاوية المحصورة بين $(\vec{a})$ و $(\vec{a} + \vec{b})$

الحل:

يجمع المتجهين الأول والثاني:

$$\vec{a} + \vec{b} = 11\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 5\hat{k}$$
$$\vec{a} - \vec{b} = -5\hat{\imath} + 11\hat{\jmath} + 9\hat{k}$$

بالجمع

$$2\vec{a} = 6\hat{\imath} + 10\hat{\jmath} + 14\hat{k}$$
$$\vec{a} = 3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 7\hat{k}$$

طرح المتجهين الأول والثاني

$$\vec{a} + \vec{b} = 11\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 5\hat{k}$$
$$\mp\vec{a} \mp \vec{b} = \mp 5\hat{\imath} \mp 11\hat{\jmath} \mp 9\hat{k}$$

بالطرح

$$2\vec{b} = 16\hat{\imath} - 12\hat{\jmath} - 4\hat{k}$$
$$\vec{b} = 8\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} - 2\hat{k}$$

2) الزاوية بين $\vec{a}$ و $\vec{a} + \vec{b}$

$$(\vec{a} + \vec{b}).\vec{a} = (a + b)a cos\theta$$

$$cos\theta = \frac{(\vec{a} + \vec{b}).\vec{a}}{(a + b)(a)} = \frac{(11\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 5\hat{k})(3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 7\hat{k})}{\sqrt{112 + 1 + 25}\sqrt{9 + 25 + 49}} = \frac{33 - 5 + 35}{\sqrt{147}\sqrt{83}}$$

$$cos\theta = \frac{63}{12 * 9} = \frac{63}{108} = 0.58$$

$$\theta = 54°$$

و. هـ. م.

8 مثال: جد قيمة الثابت $\propto$ إذا كان المتجه $\vec{A} = 4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$

عمودي على المتجه $\vec{B} = \alpha\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 4\hat{k}$

الحل: بما ان $\vec{A} \perp \vec{B}$ $\therefore$ الزاوية بينهما 90

$$\therefore \cos 90 = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = \frac{(4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k})(\alpha\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 4\hat{k})}{\sqrt{16+4+9}\sqrt{(\alpha)^2 + 9 + 16}}$$

$$0 = \frac{4\alpha + 6 - 12}{\sqrt{29}\sqrt{\alpha^2 + 25}}$$

$$0 = 4\alpha + 6 - 12 \qquad \therefore 4\alpha = 6 \qquad \therefore \alpha = \frac{3}{2} = 1.5$$

6 **مثال:** اثبت ان المتجهات التالية تشكل مثلث قائم الزاوية:

$$\vec{A} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k} \;\&\; \vec{B} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 5\hat{k} \;\&\; \vec{C} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 4\hat{k}$$

الحل:

$$A = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} = 2.4 \quad \& \quad B = \sqrt{1+9+25} = 5.9$$

$$C = \sqrt{9+16+16} = 64$$

$$\vec{A}.\vec{B} = 2+3-5 = 0 \;\&\; \vec{A}.\vec{C} = 6+4-4 = 6 \;\&\; \vec{B}.\vec{C} = 3+12+20 = 35$$

$$\therefore \sphericalangle \vec{A}\&\vec{B} \Longrightarrow \cos\theta = \frac{0}{2.4 * 5.9} = 0 \quad \therefore \theta = 90^\circ$$ زاوية قائمة

$$\sphericalangle \vec{A}\&\vec{C} \Longrightarrow \cos\theta = \frac{6}{2.4 * 6.4} = \frac{6}{15.36} = 0.39 \quad \therefore \theta = 67^\circ$$

$$\sphericalangle \vec{B}\&\vec{C} \Longrightarrow \cos\theta = \frac{35}{5.9 * 6.4} = \frac{6}{15.36} = 0.39 \quad \therefore \theta = 23^\circ$$

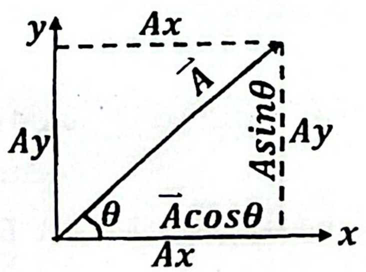
$\therefore$ مجموع زوايا المثلث $90^\circ + 67^\circ + 23^\circ = 180^\circ$

$\therefore$ هي تمثل اضلاع مثلث قائم الزاوية بين $\vec{A}\&\vec{B}$

تحليل المتجهات وحساب المحصلة والمعادلة Resolution of Vectors

يمكن تحليل المتجه $\vec{A}$ الذي يعمل زاوية (θ) مع محور x باتجاهين متعامدين في محاور (y,x) بحيث ان:

$$Ax = A\cos\theta \quad \& \quad Ay = A\sin\theta$$



كما في الشكل التالي

والمحصلة تكون:

$$A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}$$

واتجاه المحصلة

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$