4 البحث ١ الحل ١ 30

حضور 5 ↓ حضور 5

10 تحضير

$$\vec{A} \times \vec{B} = A.B\, sin\theta$$

وفي المعادلة أعلاه فأن حاصل الضرب المتجهي للوحدات المتوازية للمتجهات يساوي صفر (وذلك لأن جيب الزاوية صفر يساوي صفر)

وأن حاصل الضرب العددي للوحدات المتعامدة للمتجهات يساوي 1 وذلك لأن (جيب الزاوية 90 يساوي 1)

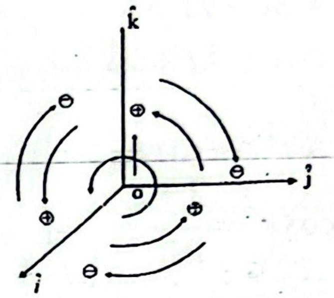
وعليه فان:

للمتجهات الزاوية 0 $\hat{\imath}.\hat{\imath} = \hat{\jmath}.\hat{\jmath} = \hat{k}.\hat{k} = 0$

اما المتجهات المتعامدة وحسب قاعدة اليد اليمنى:

$$\left.\begin{aligned} \hat{\imath}.\hat{\jmath} &= \hat{k} \\ \hat{\jmath} \times \hat{k} &= \hat{\imath} \\ \hat{k} \times \hat{\imath} &= \hat{\jmath} \end{aligned}\right\} \text{مع قاعدة اليد اليمنى}$$

$$\left.\begin{aligned} -\hat{\jmath} \times \hat{\imath} &= \hat{k} \\ -\hat{k} \times \hat{\jmath} &= \hat{\imath} \\ -\hat{\imath} \times \hat{k} &= \hat{\jmath} \end{aligned}\right\} \text{عكس قاعدة اليد اليمنى}$$



فإذا كان:

$$\vec{A} = \hat{\imath}Ax + \hat{\jmath}Ay + \hat{k}Az$$

$$\vec{B} = \hat{\imath}Bx + \hat{\jmath}By + \hat{k}Bz$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (\hat{\imath}Ax + \hat{\jmath}Ay + \hat{k}Az) \times (\hat{\imath}Bx + \hat{\jmath}By + \hat{k}Bz)$$

$$+(\hat{\jmath}Ay * \hat{\imath}Bx) + \cancel{(\hat{\jmath}Ay \times \hat{\jmath}By)} + (\hat{\jmath}Ay * \hat{k}Bz)$$

$$+(\hat{k}Az * \hat{\imath}Bx) + (\hat{k}Az \times \hat{\jmath}By) + \cancel{(\hat{k}Az \times \hat{k}Bz)}$$

$$+\cancel{(\hat{\imath}Ax * \hat{\imath}Bx)} + (\hat{\imath}Ax * \hat{\jmath}By) + (\hat{\imath}Ax * \hat{k}Bz$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{k}AxBy - \hat{\jmath}AxBz - \hat{k}AyBx + \hat{\imath}AyBz$$

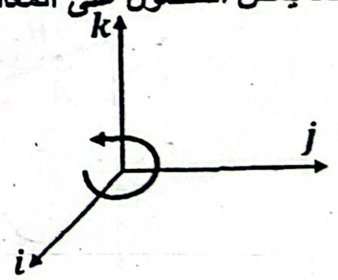
$$+\hat{\jmath}AzBx - \hat{\imath}AzBy$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{\imath}(AyBz - AzBy) + \hat{\jmath}(AzBx - AxBz)$$

$$+\hat{k}(AxBy - AyBy)$$

كما يمكن الحصول على المعادلة أعلاه بطريقة المحددات

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \end{vmatrix}$$



$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{\imath}(AyBz - AzBy) + \vec{\jmath}(AzBx - AxBz)$$

$$+\hat{k}(AxBy - AyBx)$$

مكتبة مريم فوق النادي الطلابي

مثال: برهن أن:

$$(\vec{A} \times \vec{B})^2 + (\vec{A}.\vec{B})^2 = A^2B^2$$

الحل:

$$\vec{A}.\vec{B} = ABcos\theta$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = ABsin\theta$$

نعوض في المعادلة

$$(ABsin\theta)^2 + (ABcos\theta)^2 = A^2B^2(cos^2\theta + sin^2\theta) = A^2B^2$$

$\therefore cos^2\theta + sin^2\theta = 1$ لأن   و. هـ. م.

1 مثال: إذا كان

$$A = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - \hat{k}$$

$$\vec{B} = \hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}$$

جد: b- $(\vec{B} \times \vec{A})$ a- $(\vec{A} \times \vec{B})$ c- $(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{B})$

الحل:

$$a)\ \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \hat{\imath}(+6+4) + \hat{\jmath}(-1+4) + \hat{k}(8+3)$$

$$= 10\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 11\hat{k}$$

$$b)\ \vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = \hat{\imath}(-4-6) + \hat{\jmath}(-4+1) + \hat{k}(-3-8)$$

$$= -10\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 11\hat{k}$$

$$c)\ \vec{A} + \vec{B} = (2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - \hat{k}) + (\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k})$$

$$= \hat{\imath}(2+1) + \hat{\jmath}(4-3) + \hat{k}(-1-2)$$

$$= 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - \hat{k}) - (\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k})$$

$$= \hat{\imath}(2-1) + \hat{\jmath}(-3-4) + \hat{k}(-1+2)$$

$$= \hat{\imath} - 7\hat{\jmath} + \hat{k}$$

$$\therefore (\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{B}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}(1-21) + \hat{\jmath}(+3+3) + \hat{k}(-21-1) = -20\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 22\hat{k}$$

2

مثال: إذا كان:

$\vec{A} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 5\hat{k}$
$\vec{B} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 6\hat{k}$

احسب بطريقة المتجهات: a) طول كل متجه b) A.B c) الزاوية بين المتجهين

الحل:

a) $A = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50}$

$B = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (6)^2} = \sqrt{1 + 4 + 36} = \sqrt{41}$

b) $\vec{A}.\vec{B} = (3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 5\hat{k}).(-\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 6\hat{k})$

$= (3)(1) + (4)(2) + (-5)(6)$

$= -3 + 8 - 30 = -25$

c) $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$

$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = \frac{-25}{\sqrt{50}\sqrt{41}} = -\frac{25}{45} = -0.55$

$\theta = 123$

3

مثال: بين أي من المتجهات الاتية متعامدة وتضع زاوية قائمة بينها؟

$\vec{A} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$
$\vec{B} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}$
$\vec{C} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}$

الحل: لدينا:

$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$

لكي يكون اثنان من هذه المتجهات متعامدة هذا يعني ان $\cos\theta = \cos 90 = 0$ أي:

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = 0$$

لنطبق هذا على المتجهات الثلاثة ونجد قيم كل متجه وحاصل ضرب العددين لكل متجهين:

$A = \sqrt{(3)^2 + (-2)^3 + (1)^2} = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$

$B = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (5)^2} = \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}$

$C = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 1 + 16} = \sqrt{21}$

وحاصل الضرب العددي لكل متجهين يساوي:

$\vec{A}.\vec{B} = (3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}).(\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}) = (3)(1) + (-2)(-3) + (1)(5)$

$= 3 + 6 + 5 = 14$

$\vec{A}.\vec{C} = (3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}).(2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}) = (3)(2) + (-2)(1) + (1)(-4)$

$= 6 - 2 - 4 = 0$

$\vec{B}.\vec{C} = (\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}).(2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}) = (1)(2) + (-3)(1) + (5)(-4)$

$$= 2 - 3 - 20 = -21$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{C}}{AC} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = 0$$

$$\therefore \theta = 90$$

هذا يعني ان المتجهات $\vec{C},\vec{A}$ متعامدان ويصنعان زاوية قائمة بينهما

١٧ مثال: متجهان الأول: $\vec{a} + \vec{b} = 11\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 5\hat{k}$

والثاني $\vec{a} - \vec{b} = -5\hat{\imath} + 11\hat{\jmath} + 9\hat{k}$

1)جد كلا من المتجهين $\vec{b},\vec{a}$ والزاوية المحصورة بين $(\vec{a})$ و $(\vec{a} + \vec{b})$

الحل:

يجمع المتجهين الأول والثاني:

$$\vec{a} + \vec{b} = 11\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 5\hat{k}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = -5\hat{\imath} + 11\hat{\jmath} + 9\hat{k}$$

بالجمع

$$2\vec{a} = 6\hat{\imath} + 10\hat{\jmath} + 14\hat{k}$$

$$\vec{a} = 3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 7\hat{k}$$

طرح المتجهين الأول والثاني

$$\vec{a} + \vec{b} = 11\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 5\hat{k}$$

$$\mp\vec{a} \mp \vec{b} = \mp 5\hat{\imath} \mp 11\hat{\jmath} \mp 9\hat{k}$$

بالطرح

$$2\vec{b} = 16\hat{\imath} - 12\hat{\jmath} - 4\hat{k}$$

$$\vec{b} = 8\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} - 2\hat{k}$$

2) الزاوية بين $\vec{a}$ و $\vec{a} + \vec{b}$

$$(\vec{a} + \vec{b}).\vec{a} = (a + b)a\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{(\vec{a} + \vec{b}).\vec{a}}{(a + b)(a)} = \frac{(11\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 5\hat{k})(3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 7\hat{k})}{\sqrt{112 + 1 + 25}\sqrt{9 + 25 + 49}} = \frac{33 - 5 + 35}{\sqrt{147}\sqrt{83}}$$

$$\cos\theta = \frac{63}{12 * 9} = \frac{63}{108} = 0.58$$

$$\theta = 54°$$

و. هـ. م.

8 مثال: جد قيمة الثابت $\propto$ إذا كان المتجه $\vec{A} = 4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$

عمودي على المتجه $\vec{B} = \alpha\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 4\hat{k}$

الحل: بما ان $\vec{A} \perp \vec{B}$ $\therefore$ الزاوية بينهما 90

$$\therefore cos90 = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = \frac{(4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k})(\alpha\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 4\hat{k})}{\sqrt{16+4+9}\sqrt{(\alpha)^2 + 9 + 16}}$$

$$0 = \frac{4\alpha + 6 - 12}{\sqrt{29}\sqrt{\alpha^2 + 25}}$$

$$0 = 4\alpha + 6 - 12 \qquad \therefore 4\alpha = 6 \qquad \therefore \alpha = \frac{3}{2} = 1.5$$

6 **مثال: اثبت ان المتجهات التالية تشكل مثلث قائم الزاوية:**

$$\vec{A} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k} \;\&\; \vec{B} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 5\hat{k} \;\&\; \vec{C} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 4\hat{k}$$

الحل:

$$A = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} = 2.4 \quad \& \quad B = \sqrt{1+9+25} = 5.9$$

$$C = \sqrt{9+16+16} = 64$$

$$\vec{A}.\vec{B} = 2+3-5 = 0 \;\&\; \vec{A}.\vec{C} = 6+4-4 = 6 \;\&\; \vec{B}.\vec{C} = 3+12+20 = 35$$

$\therefore \sphericalangle \vec{A}\&\vec{B} \Rightarrow cos\theta = \frac{0}{2.4 * 5.9} = 0 \quad \therefore \theta = 90°$ زاوية قائمة

$$\sphericalangle \vec{A}\&\vec{C} \Rightarrow cos\theta = \frac{6}{2.4 * 6.4} = \frac{6}{15.36} = 0.39 \quad \therefore \theta = 67°$$

$$\sphericalangle \vec{B}\&\vec{C} \Rightarrow cos\theta = \frac{35}{5.9 * 6.4} = \frac{6}{15.36} = 0.39 \quad \therefore \theta = 23°$$

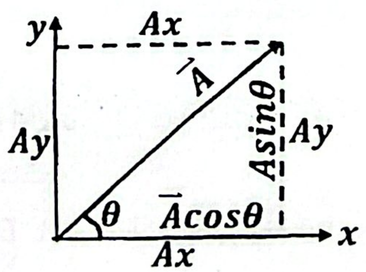
$\therefore$ مجموع زوايا المثلث $90° + 67° + 23° = 180°$

$\therefore$ هي تمثل اضلاع مثلث قائم الزاوية بين $\vec{A}\&\vec{B}$

تحليل المتجهات وحساب المحصلة والمعادلة Resolution of Vectors

يمكن تحليل المتجه $\vec{A}$ الذي يعمل زاوية (θ) مع محور x باتجاهين متعامدين في محاور (y, x) بحيث ان:

$$Ax = A\,cos\theta \quad \& \quad Ay = Asin\theta$$



كما في الشكل التالي

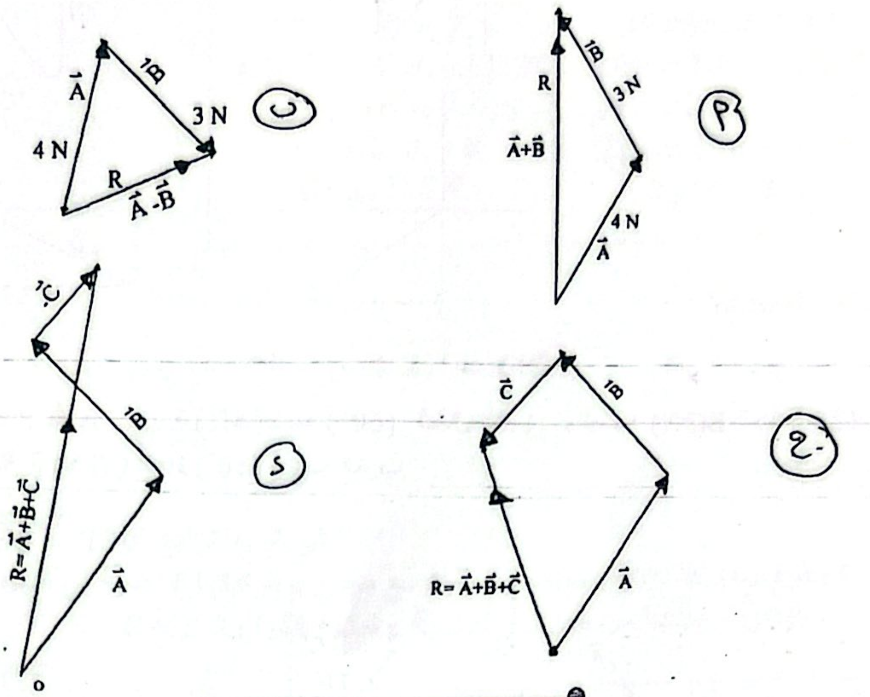
والمحصلة تكون:

$$A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}$$

واتجاه المحصلة

$$\theta = tan^{-1}\frac{y}{x}$$

احسب أ) $A + B$ ب) $A - B$ جـ) $A + B + C$ د) $A + B - C$



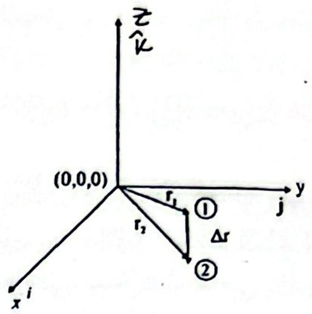
الحركة على خط مستقيم

الحركة motion:

يبحث الميكانيك العلاقة بين بين القوة والمادة والحركة وفرع علم الميكانيك الذي يبحث رياضياً انتقال المادة من نقطة الى أخرى بعلم الحركة وتعرف الحركة على أنها التغير المستمر في موضع الجسم. ومن أساسيات دراسة علم الحركة هو دراسة كل من الازاحة والسرعة والتعجيل. ولتحديد موضع الجسم يتحرك على خطى مستقيم علينا ان نأخذ بنظر الاعتبار وجود نقطة ثابتة كنقطة الأصل(0,0,0) (x y z) فعند انتقال جسم من موقع 1 إلى موقع 2 كما في الشكل التالي نحتاج إلى تحديد موقع الجسم، نقطة الأصل

مكتبة مريم
فوق النادي الطلابي

اذا متجه الموضع r_1 يحدد موضع الجسم عند بداية الحركة ومتجه الموضع r_2 يحدد موضع الجسم عند نهاية الحركة بعد زمن وقدره



$$\Delta t = t_2 - t_1$$

وحيث ان إزاحة الجسم تعطى بالعلاقة التالية

$$r_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k$$
$$r_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k$$

وعليه

$$\Delta r = r_2 - r_1 = (x_2 i + y_2 j + z_2 k) - (x_1 i + y_1 j + z_1 k)$$

وعليه فان الازاحة تعتمد على المسافة من نقطة البداية والنهاية فقط ولا تعتمد على المسار الذي يسلكه الجسم

مثال: اكتب متجه موضع الجسم يقع في المحاور الثلاثية (x,y,z) في النقاط التالية

a) (5, −6, 0)   b) (5, −4, 2)   c) (5, ~~−6~~, ~~0~~)   −1 , 6 , 3

الحل:

a) $r_1 = 5\hat{\imath} - 6\hat{\jmath}$ b) $r_2 = 5i - 4j + 2k$ c) $r_3 = -\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 6\hat{k}$

متوسط السرعة $\overrightarrow{v_{av}}$ ومتوسط الانطلاق Average Velauly, Average speed v_{av}

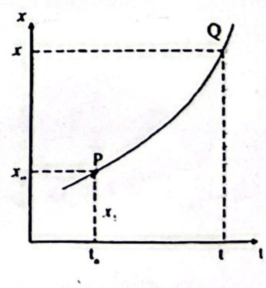
يعرف متوسط السرعة بأنها الازاحة المقطوعة في وحدة الزمن.

$$\overrightarrow{v_{av}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta \vec{t}} \qquad (m/sec)$$

ووحدتها تساوي وحدة الازاحة مقسومة على وحدة الزمن m/sec وانها كمية فيزياوية متجهة لذلك يجب تحديدها بقيمتها بقيمة عددية واتجاه اما متوسط الانطلاق (v_{av}) فيعرف بأنه طول المسار المقطوع في وحدة الزمن وهو كمية عددية أي ان:

$$v_{av} = \frac{L}{\Delta t} \qquad (m/sec)$$

فإذا تحرك جسم من نقطة (P) الى نقطة (Q) يكون متوسط سرعته:



$$\overrightarrow{v_{av}} = \frac{\vec{x} - \vec{x_0}}{t - t_0} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

أما متوسط انطلاقه فهو

$$v_{av} = \frac{l(PQ)}{t - t_0}$$

ونستنتج من معادلة متوسط السرعة

بعد ضرب طرفين وسطين ونقل x الى جهة اليمين ان

$$\vec{x} = \vec{x_0} + \vec{v_{av}}(t - t_0)$$

السرعة الآنية:

تعرّف بأنها سرعة جسم في لحظة معينة من زمن حركته او في نقطة معينة واقعة على مساره ونظرا لكون الازاحة للسرعة الانية متناهية في الصغر وكذلك الزمن اللازم للجسم لقطع تلك الازاحة لذا تعرف السرعة الانية لجسم في نقطة معينة بأنها سرعته على مساره المتناهي بالصغر بحيث ان تلك النقطة واقعة على مساره فإذا كان (Δx) هي تغير الازاحة خلال زمن Δt كما في الشكل السابق واقترب نقطة p من نقطة Q كغاية لها فان $\Delta t \to 0$ وتكتب المعادلة بالصيغة التالية

$$\vec{v} = \lim_{t\to 0}\frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t}$$

$$\therefore \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

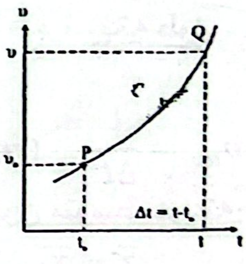
وعلى هذا فان سرعة الانية لجسم يتحرك بإزاحة معينة تمثل المشتقة الأولى لتلك الازاحة بدلالة الزمن.

متوسط التعجيل

يعرف بانه تغير السرعة بوحدة الزمن

$$a_{aw} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

لنفرض ان جسما يتحرك من نقطة مثل p حيث سرعته V عندما كان الزمن إلى نقطة Q حيث سرعته V عندما يكون الزمن t لذا يكون متوسط التعجيل



$$\overrightarrow{a_{av}} = \frac{\vec{v} - \vec{v_0}}{t - t_0} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

اما التعجيل الاني لجسم ما فانه تعجيل ذلك الجسم في لحظة معينة من زمن حركته او في نقطة معينة على مساره.

فإذا كانت Δv هي تغير السرعة خلال زمن قدره Δt كما في الشكل أعلاه واقتربت نقطة p من نقطة Q كغاية لها يكتب التعجيل بالصيغة التالية

$$\vec{a} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

من هذه المعادلة والمعادلة التي سبقتها يمكن الحصول على المعادلة التالية