الكينماتيك الزاوي

اعداد: لجنة البايوميكانيك

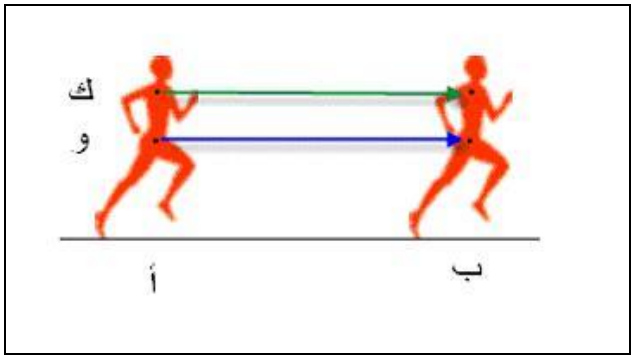
المسافة والازاحة الزاوية

تكلمنا في محاضرات سابقة عن معنى الحركة بصفة عامة ويمكن تعريفها بشكل مبسط على انها (انتقال الجسم او جزء منه من نقطة الى نقطة اخرى) و هذا بطبيعة الحال يتطلب العوامل الاساسية الثلاث (١هدف للحركة ٢ انتاج القوة من خلال الانقباض العضلي ٣ تقريب و تبعيد اجزاء الجسم بهدف تحقيق الهدف).

سبق ايضا ان تحدثنا عن المحاور و المسطحات و تبين لنا ان جميع الحركات التي تؤدى على محور وهمي أو حقيقي، خارجي أو داخلي فإنها حركات دائرية.

و لو ناقشنا شكل الدائرة من الناحية الهندسية سيتبين لنا إن لكل دائرة بداية ونهاية، ومن المعروف أن زاوية أية دائرة هي (٣٦٠ درجة) تبدأ من (الصفر) بعكس عقرب الساعة وتنتهي في (٣٦٠ درجة).

الآن بالانتقال الى مفهوم السرعة (علاقة المسافة بالزمن) و ربطها بالدائرة كخط مسير او بأتجاه حركة (هدف حركي) فالنقطة التي تتحرك على محيط الدائرة تمتلك سرعة تسمى بالسرعة المحيطية أو الدائرية ووحدتها تماثل وحدة السرعة الخطية (متراثانية) ، ولغرض توضيح السرعة المحيطية ومقارنتها بالسرعة الخطية فإننا نلاحظ المثال الأتي.

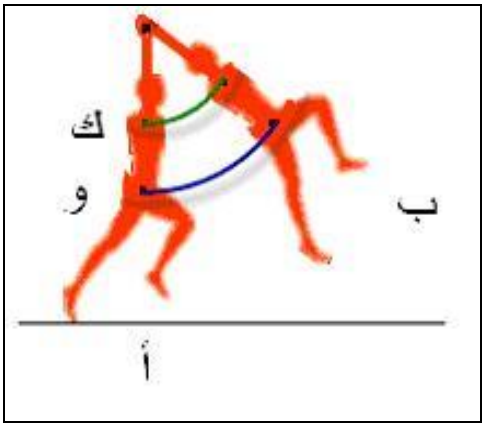


شكل : يوضح المسار الخطي لمفصل الورك والكتف في الركض

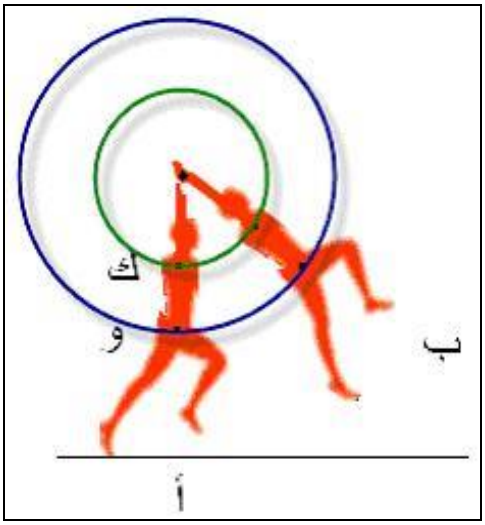
لو تحرك لاعب من نقطة (أ) إلى نقطة (ب) وشخصنا نقطتان في جسم اللاعب وهما نقطة الورك (و) ونقطة الكتف (ك)، فان المسافة المقطوعة لكلتا النقطتين تكون متساوية وبما أن

النقطتين تحركتا في الوحدة الزمنية نفسها فإننا نستطيع الجزم بان سرعة النقطتين متساوية، أي إن سرعة نقطة الورك تساوي سرعة نقطة الكتف.

أما إذا راقبنا هاتين النقطتين على اللاعب نفســـه وهو يؤدي المرجحة على جهاز العقلة وكما في الشـــكل التالي ، فاننا نلاحظ اختلاف في مدى حركة النقطتين فالمدى الحركي لنقطة الورك اكبر من المدى الحركي لنقطة الكتف أو بصـياغة أخرى فان المسـافة التي تتحركها نقطة الورك اكبر من المسافة التي تتحركها نقطة الكتف، قارن الاشكال التالية .



شكل: يوضح المسار الدائري لمفصل الورك
والكتف في المرجحة على العقلة



شكل: يوضح الدوائر التي يمكن رسمها لمفصل الورك
والكتف في المرجحة على العقلة

فلو تحركت نقطة (و) من منطقة (أ) ووصـــلت إلى منطقة (ب) فإنها ســـتكون قطعت مســـافة اكبر من مســـافة نقطة (ك)، ورغم أن النقطتين تحركتا في الوحدة الزمنية نفســـها الا ان

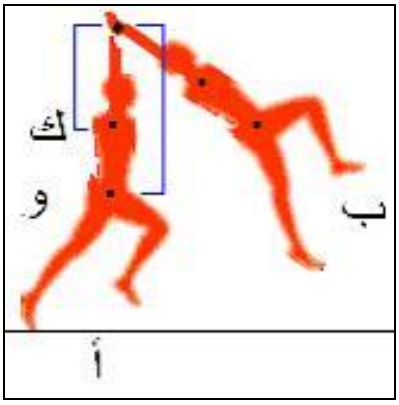
سرعة النقطة (و) لا تساوي سرعة النقطة (ك)، وهذا هو الاختلاف الثاني بين الحركات الخطية والحركات الدائرية، فالاختلاف الأول وجود المحور. اما الاختلاف الثاني فهو نصف القطر

إن الفروق التي يمكن ملاحظتها بين النقطتين (و) و (ك) يمكن إيجازها بما يأتي

١- مدى حركة (و) اكبر من مدى حركة (ك)

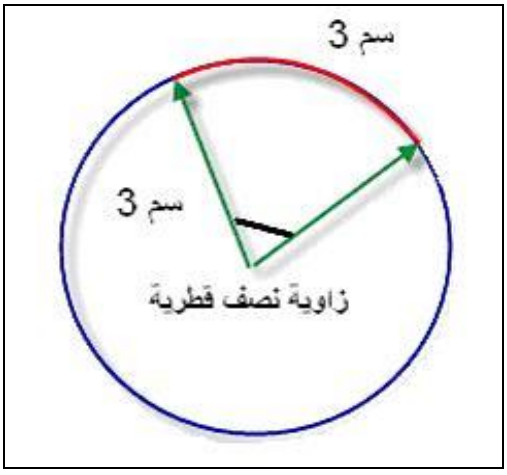
٢- بعد نقطة (و) اكبر من بعد نقطة (ك)

٣- سرعة نقطة (و) اكبر من سرعة نقطة (ك)



شكل : يوضح اختلاف ابتعاد لمفصل الورك والكتف من محور العقلة

وهناك اتفاق واحد بين النقطتين وهي أنهما تتحركان في الزاوية نفسها (هـــ)، كما موضح في الشكل أدناه



شكل : يوضح موقع الزاوية نصف القطرية

والتساؤل المهم ، هل يمكن حساب سرعة هاتين النقطتين ؟ الجواب: نعم ، اذ سيتم دراستها وفقا للزوايا وتسمى السرعة التي تقيس الزاوية في وحدة الزمن بالسرعة الزاوية وقانونه :

$$\text{السرعة الزاوية} = \frac{\text{قيمة الزاوية}}{\text{الزمن}} \quad \ldots\ldots\ldots (١)$$

وهذا القانون لا يكون صـــحيحا في إجراء المقارنة بين ســـرعتي النقطتين لأنهما يحدثان على نفس الزاوية وفي الزمن نفسه أي أن سرعتهما الزاوية هي نفسها وبوحدة (درجةاثانية) ، فمن الأفضل الاستفادة من الاختلافات بين النقطتين ، أي أن نستخدم (طول القوس) لأنه متباين عند النقطتين وكذلك (نصف القطر) أي البعد عن المحور وهو أيضا متباين لدى النقطتين.

ســنلجأ إلى الزاوية نصــف القطرية لأنها تعرف بأنها (النســبة بين طول القوس ونصــف القطر)

$$\text{الزاوية نصف قطرية} = \frac{\text{طول القوس}}{\text{نصف القطر}} \quad \ldots\ldots\ldots (٢)$$

وتعرف الزاوية نصــف قطرية بانها الزاوية التي تقابل قوســا طوله يســاوي طول نصــف القطر.

إذا استخدمنا الزاوية هذه بدلا من الزاوية في القانون (١) سنحصل على مكسبين أولهما أننا ســـنعطي وبدقة تحرك كل نقطة وفقا لمداها وبعدها ، وثانيا إن الوحدة الحالية لقيمة الزاوية سوف لن تكون بوحدة الدرجة وهذا سيساعدنا (لاحقا) في اشتقاق معادلة للسرعة المحيطية.

إن وحدة الزاوية في المعادلة رقم (١) بالدرجة أما قيمة الزاوية في المعادلة رقم (٢) فإنها بدون وحدة لان طول القوس بالمتر أو الســـنتمتر وكذلك وحدة نصـــف القطر فتكون وحدة هذه الزاوية هي (م ÷ م =١). اما المساحة المحصورة بين ضلعي نصف القطر وطول القوس تسمى بالقطاع ، ونلاحظ وجود عدد (٦,٢٨) قطاعا في الدائرة الواحدة ، أي اذا اخذنا نصـــف قطر معين ووضــعنا بقدر ذلك مســافات على محيط الدائرة فان عدد المقاطع ســتســاوي (٦) مع بقاء مقطع صــغير يتم تقســيمه على المقاطع الاخرى لتصــبح (٦,٢٨) مقطع او قطاع ، وعند قياس الزاوية في كل مقطع سنجد انها تساوي (٥٧,٣٢٤ درجة) وهي قيمة الزاوية نصف القطرية.

حساب المسافة على محيط الدائرة

توجد طريقتين اما عن طريق محيط الدائرة (النســـبة الثابتة ٣,١٣) اذ علمنا ربع محيط الدائرة او نصفه وهكذا او عن طريق قيمة القطاع (٥٧,٣٢٤)

ركض عداء في منحنى أي نصـف محيط دائرة وكانت لدينا نصـف القطر فقط (٣١,٨٢ متر)

محيط الدائرة = ٢ × نصف القطر × النسبة الثابتة

= ٢ × ٣١,٨١ × (٢٢÷٧)

= ٢ × ٣١,٨١ × ٣,١٤

= ٢٠٠ متر تقريبا

نصف المسافة هي ١٠٠ متر

اما الطريقة الثانية فلو تحرك العداء من البداية الى نهاية المنحنى فانه قد قطع ١٨٠ درجة وعلى نصف قطر ٣١,٨١

المسافة = نصف القطر × الزاوية ÷ القطاع

المسافة = ٣١,٨١ × ١٨٠ ÷ ٥٧,٣٢٤

=٥٧٢٥,٨ ÷ ٥٧,٣٢٤

= ١٠٠ متر تقريبا

علاقة السرعة المحيطية بالسرعة الزاوية

لا نسـتطيع ان نفترض بان (السـرعة المحيطية = السـرعة الزاوية) وذلك لاختلاف وحدات كل مصـطلح ، فوحدة السـرعة المحيطية هي م / ثا اما وحدة السـرعة الزاوية فهي درجة / ثا ، ولكي

تكون هناك علاقة فعلية بين المصــطلحين فاننا نقوم بمجموعة من الاجراءات منها اننا نســتخدم الزاوية نصف قطرية بدون وحدة بدلا من الزاوية بوحدة الدرجة

$$\text{السرعة الزاوية} = \frac{\text{قيمة الزاوية (درجة)}}{\text{الزمن (ثانية)}}$$

قيمة الزاوية التي سنعتمدها فهي الزاوية الموجودة في المعادلة رقم (٢) أي الزاوية النصف قطرية

$$\text{السرعة الزاوية} = \frac{\text{الزاوية نصف قطرية}}{\text{الزمن}} \quad \frac{١}{\text{ثانية}} \quad \ldots\ldots (٣)$$

نحتاج إلى قياس بوحدة المتر أو السـنتمتر، تحدثنا سـابقا إننا لا نسـتطيع مقارنة نقطتان تبتعدان عن بعضيهما على نفس المحور وعلى نفس خط العمل بسبب اختلاف أنصاف الأقطار، إذن يمكننا اعتماد نصـف القطر في المعادلة وطالما إن نصـف القطر تتناسـب طرديا مع السرعة فان أفضــل مقياس نعتمده هو نصــف القطر. وهكذا فان وحدة السـرعة الزاوية سـتكون مسـاوية لوحدة السرعة المحيطية او بمعنى اخر ان

$$\text{السرعة المحيطية} = \frac{\text{الزاوية نصف قطرية}}{\text{الزمن}} \times \text{نصف القطر} \quad \ldots\ldots\ldots (٤)$$

او ان

السرعة المحيطية = السرعة الزاوية × نصف القطر

ويجب ان نفهم جيدا بان وحدة الســرعة الزاوية الموجودة في المعادلة اعلاه هي (١اثا) وليســت (درجةاثا)

من المعادلة أعلاه نستنتج ما يأتي

١- إن السرعة المحيطية تتناسب طرديا مع نصف القطر بثبات السرعة الزاوية

٢- إن السرعة المحيطية تتناسب طرديا مع السرعة الزاوية بثبات نصف القطر

مثال:

تحرك جسـم من نقطة (أ) إلى نقطة (ب) بزمن قدره (٠,٣ ثا) وقطع زاوية مقدارها (٩٠درجة) وكان بعد هذا الجسم عن محور الدوران (٠,٠٦ متر). احسب السرعة المحيطية واحسب السرعة المحيطية عند مضاعفة نصف القطر.

الحل:

نحول قيمة الزاوية من وحدة الدرجة إلى وحدة نصف قطرية

$$\text{الزاوية} = \frac{\text{طول القوس}}{\text{نصف القطر}}$$

طول القوس = الزاوية × نصف القطر

طول القوس = ٩٠×٠,٠٦

= ٥,٤ درجة . م

نقسم الرقم أعلاه على زاوية القطاع ٥٧,٣٢٤ وهي ثابتة فنتخلص من وحدة الدرجة

$$\text{طول القوس} = \frac{٥,٤}{٥٧,٣}$$

طول القوس = ٠,٠٩ م

$$\text{قيمة الزاوية نصف قطرية} = \frac{٠,٠٩}{٠,٠٦}$$

قيمة الزاوية نصف قطرية = ١,٥ بدون وحدة

$$\text{السرعة المحيطية} = \frac{١,٥}{٠,٣} \times ٠,٠٦$$

السرعة المحيطية = ٠,٣٠ م\ثا

أما إذا كان نصف القطر(٠,٠٦×٢=٠,١٢)

طول القوس=٩٠×٠,١٢

طول القوس = ١٠,٨ درجة . م

$$\text{طول القوس} = \frac{١٠,٨}{٥٧,٣}$$

طول القوس = ٠,١٩ م

$$\text{قيمة الزاوية نصف قطرية} = \frac{٠,١٩}{٠,١٢}$$

قيمة الزاوية نصف قطرية = ١,٥٨ بدون وحدة

$$\text{السرعة المحيطية} = \frac{١,٥٨}{٠,٣} \times ٠,١٢$$

السرعة المحيطية = ٠,٦٣ مإثا

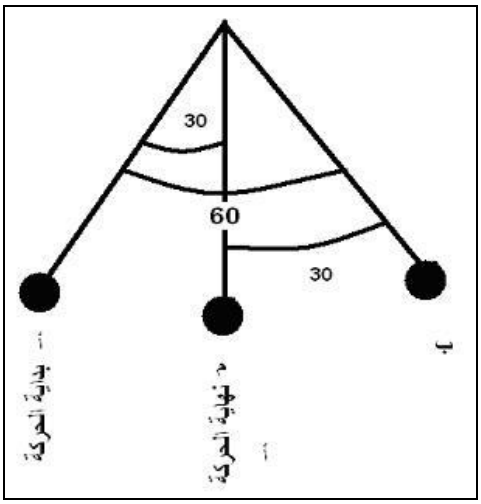
أي بمضاعفة نصف القطر تتضاعف السرعة المحيطية ، ولاحظ بان قيمة الزاوية نصف قطرية بقيت كما هي

في الدائرة الواحدة فان الزاوية تساوي ٣٦٠ درجة لذلك فان أية مسافة زاوية ستكون مساوية للإزاحة الزاوية مثلما في ركض المستقيم (١٠٠ متر مثلا) باستثناء الدورة الكاملة فإنها تبدأ من نقطة الصفر وتنتهي في نقطة ٣٦٠ درجة فان إزاحتها (صفر) مثلما تحدث في ركض (٤٠٠ متر) ، وحتى الزاوية ٣٥٩ فان مسافتها الزاوية تساوي إزاحتها الزاوية ، فمثلا ان الإزاحة الزاوية لدرجة ٩٠ هي نفسها . أما الدرجة ٣٧٠ فان إزاحتها (٣٦٠-٣٧٠ = ١٠ درجة)
أما إذا تكررت هذه الدورة مثلا لعدة مرات فان الإزاحة الزاوية تكون لمرة واحدة فلو ان مطرقة تدور ٣ دورات ، إذا علمنا إن كل دورة هي ٣٦٠ درجة فان المسافة الزاوية هي (٣٦٠ × ٣) أما الإزاحة الزاوية فهي (٣٦٠ × ١)

في البندول الأمر يختلف فإننا نمســك الخيط او الجزء الذي ســيتأرجح ثم نطلقه فيذهب من نقطة (أ) إلى نقطة (ب) مارا من منتصف المسافة (م) وسيتكرر ذلك ولكن البندول سيستقر في (م) فان الإزاحة الزاوية هي (أ إلى م) أما المسافة الزاوية فهي كل المدى

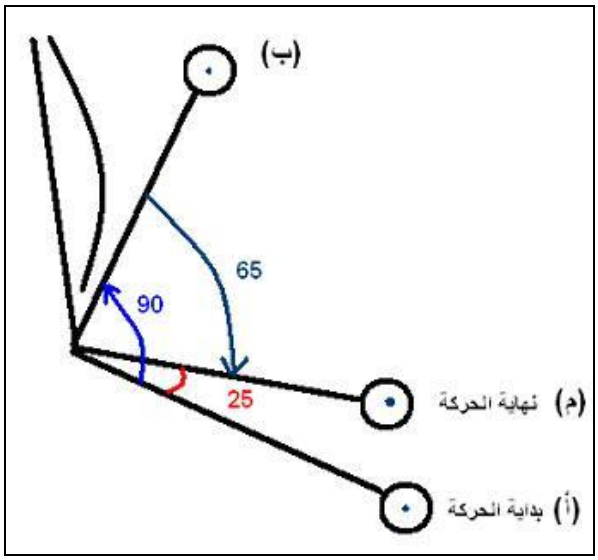
المسافة الزاوية = (٣٠+٦٠)

الازاحة الزاوية = ٣٠



شكل : يوضح الزوايا المتوقعة في مرجحة حرة لجسم (بندول)

وكذلك فان تمرين (كيرل) ثني ومد الدمبلص من نقطة (أ) الى نقطة (ب) ثم الرجوع الى النقطة (م) فان الإزاحة الزاوية تحسب حسب مسألة البندول.



شكل رقم (٢٩-٢) : يوضح الزوايا المتوقعة في تمرين رفع الثقل على الذراع (كيرل)

الذراع تبدأ بالثني من نقطة (أ) بداية الحركة فتصل إلى أقصى ثني في نقطة (ب) نهاية الثني تكون قد قطعت زاوية مقدارها (٩٠ درجة) ثم ترجع إلى الزاوية ٦٥ درجة نهاية الحركة وبذلك تكون قد قطعت مسافة زاوية مقدارها (٩٠+٦٥) أما الإزاحة الزاوية فهي (٢٥ درجة) وهي قيمة الزاوية بين بداية الحركة ونهايتها. أي اننا نحدد نقطتين هما بدأ الحركة ثم انتهائها.