CHAPTER FIVE

الحركة في بعدين

Motion in two dimensions

Motion in two dimensions like the motion of projectiles and satellites and the motion of charged particles in electric fields. Here we shall treat the motion in plane with constant acceleration and uniform circular motion.

درسنا في الفصل السابق الحركة في بعد واحد أي عندما يتحرك الجسم في خط مستقيم على محور x أو أن يسقط الجسم سقوطاً حراً في محور y، سندرس الآن حركة جسم في بعدين أي في كل من x,y مثل حركة المقذوفات حيث يكون للإزاحة والسرعة مركبتان في اتجاه المحور xوالمحور y.

Motion in two dimension with constant acceleration

Assume that the magnitude and direction of the acceleration remain unchanged during the motion.

The position vector for a particle moving in two dimensions (*xy* plane) can be written as

$$\vec{r} = x_i + y_j$$

where *x*, *y*, and *r* change with time as the particle moves

The velocity of the particle is given by

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j$$

$$\vec{v} = v_x i + v_y j$$

Since the acceleration is constant then we can substitute

$$v_x = v_{xo} + a_x t \qquad\qquad v_y = v_{yo} + a_y t$$

this give

$$v = (v_{xo} + a_x t)i + (v_{yo} + a_y t)j$$

$$= (v_{xo}\, i + v_{yo}\, j) + (a_x\, i + a_y j)\, t$$

then

$$v = v_o + a\, t \qquad\qquad (***)$$

من المعادلة (***) نستنتج أن سرعة جسم عند زمن محدد t يساوى الجمع الاتجاهى للسرعة الابتدائية والسرعة الناتجة من العجلة المنتظمة.

Since our particle moves in two dimension x and y with constant acceleration then

$$x = x_o + v_{xo}\, t + 1/2\, a_x\, t^2 \quad \& \qquad y = y_o + v_{yo}\, t - 1/2\, a_y\, t^2$$

but

$$r = xi + yj$$

$$r = (x_o + v_{xo}\, t + 1/2\, a\, t^2)i + (y_o + v_{yo}\, t - 1/2\;\, g\, t^2)j$$

$$= (x_o\, i + y_o\, j) + (v_{xo} i + v_{yo} j)t + 1/2\, (a_x i + a_y j)t^2$$

$$r = r_o + v_o t + 1/2\, a\, t^2 \qquad\qquad (\#\#\#)$$

من المعادلة (###) نستنتج أن متجه الإزاحة r-r_o هو عبارة عن الجمع الإتجاهى لمتجه الإزاحة الناتج عن السرعة الابتدائية $v_o t$ والإزاحة الناتجة عن العجلة المنتظمة $1/2\, a\, t^2$.

Projectile motion

تعتبر حركة المقذوفات *Projectile motion* من الأمثلة على الحركة في بعدين، وسوف نقوم بإيجاد معادلات الحركة للمقذوفات لتحديد الإزاحة الأفقية والرأسية والسرعة والعجلة من خلال العديد من الأمثلة.

Example

A good example of the motion in two dimension it the motion of projectile. To analyze this motion lets assume that at time t=0 the projectile start at the point x_o=y_o=0 with initial velocity v_o which makes an angle q_o,

then

$$v_x = v_{xo} = v_o\cos q_o = \text{constant}$$

$$v_y = v_{yo} - gt = v_o\sin q_o - gt$$

$$x = v_{xo}\, t = (v_o\cos q_o)t$$

$$y = v_{yo}\, t - 1/\, g\, t^2 = (v_o\sin q_o)t - 1/2\, g\, t^2$$

Horizontal range and maximum height of a projectile

It is very important to work out the range (R) and the maximum height (h) of the projectile motion.

To find the maximum height *h* we use the fact that at the maximum height the vertical velocity $v_y=0$

by substituting in equation

$$v_y = v_o\sin\theta_o - gt$$

$$t_1 = \frac{v_o \sin\theta_o}{g}$$

To find the maximum height *h* we use the equation

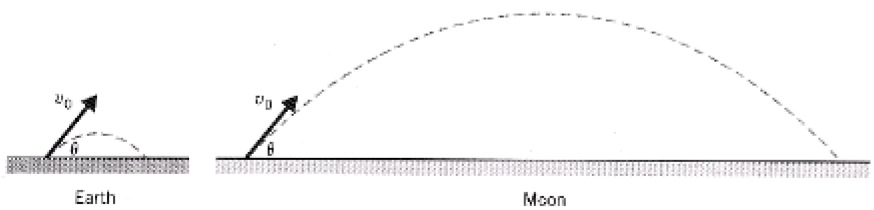
$$y = (v_o\sin\theta_o)t - 1/2\, g\, t^2$$

by substituting for the time t_1 in the above equation

$$h = (v_o\sin\theta_o)\frac{v_o \sin\theta_o}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_o \sin\theta_o}{g}\right)^2$$

$$h = \frac{v_o^2 \sin^2\theta_o}{2g}$$

من المعادلة) الأخيرة(نلاحظ أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم المتحرك في بعدين كحركة المقذوفات على عجلة الجاذبية، وعليه فإن المقذوفات على سطح القمر تأخذ مساراً ذا مدى وارتفاع أكبر منه على سطح الأرض كما في الشكل أدناه.



Example

Suppose that in the example above the object had been thrown upward at an angle of 37° to the horizontal with a velocity of 10m/s. Where would it land?

Solution

Consider the vertical motion

$v_{oy} = 6$ **m/s**

$a_y = -9.8$**m/s2**

$y = 20$**m**

To find the time of flight we can use

$$y = v_{yo}\, t - 1/2\, g\, t^2$$

since we take the top of the building is the origin the we substitute for

$y = -20$**m**

$$-20 = 6\, t - 1/2\ \ 9.8\, t^2$$

$$t = 2.73\text{s}$$

Consider the horizontal motion

$$v_x = v_{xo} = 8\text{m/s}$$

then the value of x is given by

$$x = v_x\, t = 22\text{m}$$