The plane المستوي

المستوي : هو السطح الذي يمكن توصيل أي نقطتين من نقاطه بخط مستقيم و هذا الخط المستقيم يقع داخل المستوي .

يتحدد المستوي في الفراغ بمعلومية:

١. ثلاثة نقط ليست على استقامة واحدة.

٢. مستقيم ونقطة.

٣. مستقيمان متقاطعان.

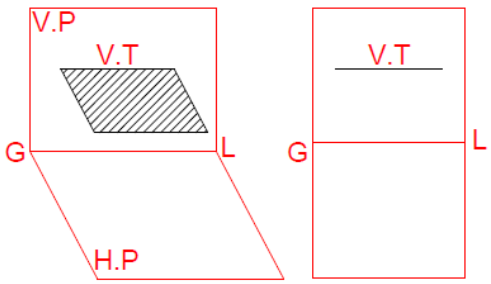
Trace of the plane أثار المستوي

أي مستوي في الفراغ توجد له علاقة بمستويين اساسيين للاسقاط بواسطة امتدادة وتقابله مع المستوي الافقي (H.P) والمستوي الراسي او العمودي (V.P) وخط تقاطع المستوي مع المستوي الافقي يسمى بالاثر الافقي (H.T) وخط تقاطع المستوي مع المستوي الراسي يسمى بالاثر الراسي (V.T) .

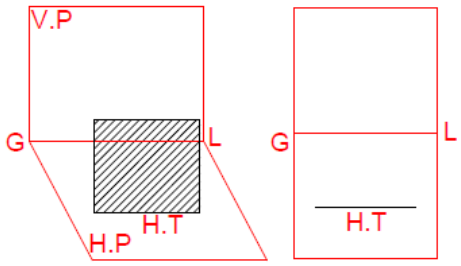
Plane situation in space اوضاع المستوي في الفراغ

يتحدد وضع المستوي في الفراغ بالنسبة الى مستوي الاسقاط .

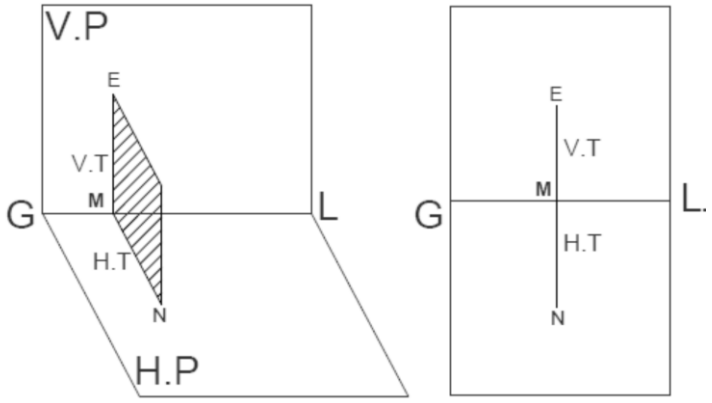
١- مستوي افقي :هو المستوي الذي يوازي المستوي الافقي وعمودي على المستوي الراسي. فمسقطه الافقي يظهر شكله الحقيقي ومسقطه الراسي يقع على الاثر الراسي (V.T) في هذه الحالة يكون له اثر راسي فقط.



٢- المستوي الراسي: يكون موازي للمستوي الراسي وعمودي على المستوي الافقي وله اثر افقي فقط (H.T) .

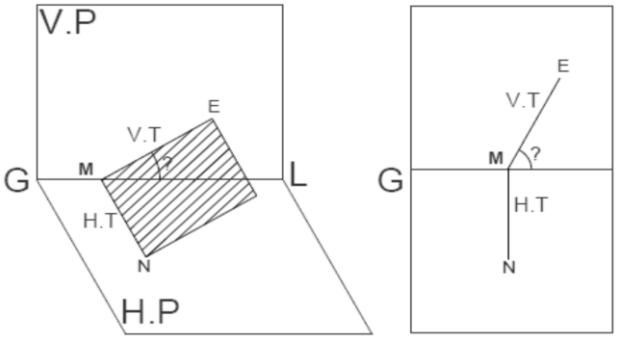


٣- المستوي الجانبي: ويكون موازي للمستوي الجانبي وعمودي على كل من المستوي الافقي والراسي وله اثر راسي واثر افقي يقعان على استقامة واحدة بالتعامد مع خط الارض.



٤- مستوي عمودي على الراسي مائل على الافقي.

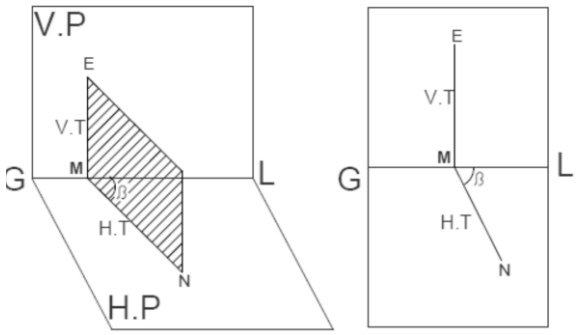
يكون المستوي مائل على المستوي الافقي وعمودي على المستوي الراسي ويميل المستوي على المستوي الافقي بزاوية (α) وفي هذه الحاله فان زاوية ميله على المستوي الافقي تمثل ميل الاثر الراسي (V,T) على خط الارض (G.L) وفي هذه الحالة يكون الاثر الافقي عمودي على خط الارض.



***ملاحظة**: أي شكل يحتوي المستوي فان مسقطه الراسي يقع على (V.T) بينما مسقطه الافقي يقع على يمين او يسار (H.T) .

٥- مستوي عمودي على المستوي الافقي مائل على المستوي الراسي

يكون المستوي مائل على المستوي الراسي وعمودي على المستوي الافقي ويميل المستوي بزاوية (β) على المستوي الراسي وفي هذه الحاله فان زاوية ميله على المستوي الراسي تمثل ميل الاثر الافقي (H,T) على خط الارض (G.L) وفي هذه الحالة يكون الاثر االراسي عمودي على خط الارض.

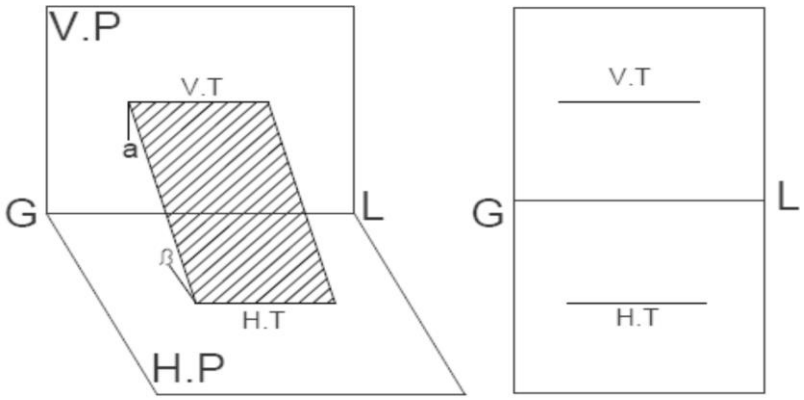


* ملاحظة : أي شكل يحتوي المستوي فان مسقطه الافقي يقع على (H.T) بينما مسقطه الراسي يقع على يمين او يسار (V.T) .

٦- المستوي الموازي لخط الارض

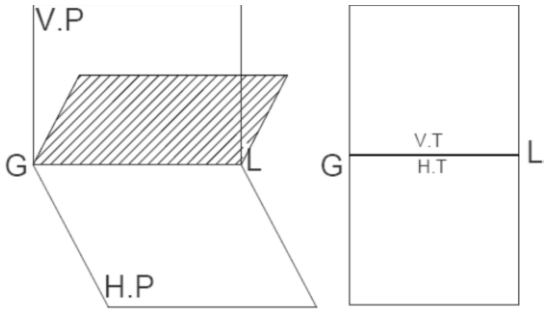
هو المستوي المائل على كل من المستوي الافقي والمستوي الراسي وعمودي على المستوي الجانبي ويكون اثري المستوي(V.T,H.T) يوازيان خط الارض.

*يكون مجموع الزاويتين (α+β) =٩٠



٧- مستوي مائل على المستوي الافقي والراسي ويمر بخط الارض

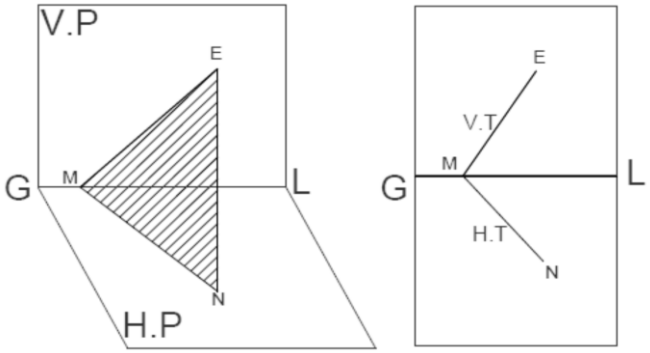
هو المستوي العمودي على المستوي الجانبي المار بخط الارض واثراه (V.T, H.T) منطبقان على خط الارض.



٨- مستوي مائل على المستوي الافقي والراسي و الجانبي

هو المستوي المائل على المستويات التلاثة وله (H.T, V.T, S.T)

*زاوية ميلان الاثر لا تمثل زاوية ميلان المستوي على مستويات الاسقاط الثلاثة



طرق تعيين اثري المستوي

١- بمعلومية زاويتي ميل اثريه على خط الارض:

يمكن تعيين اثري المستوي اذا علم زاويتي ميل اثريه على خط الارض وكذلك بعد نقطة تقاطعهما عن نقطة الاصل سواء كان البعد موجب او سالب ويكون نموذج النقطة هكذا

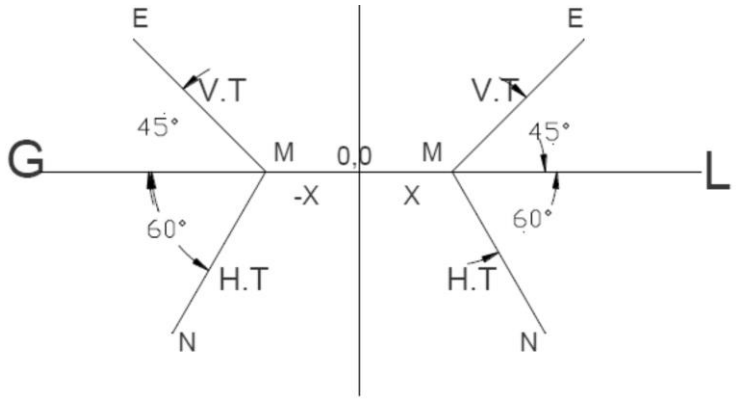
(x,<v.t,<h.t) : حيث

X : بعد نقطة تقاطع الاثرين عن نقطة الاصل.

v.t >: ميل الاثر الراسي على خط الارض (α).

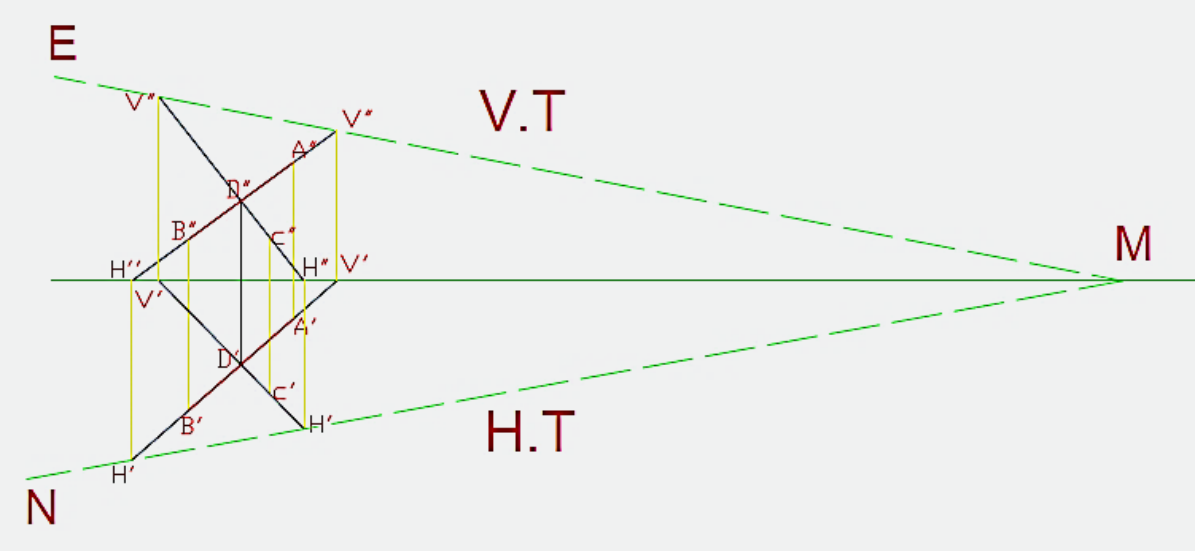
h.t >: ميل الاثر الافقي على خط الارض (β).

eg. Specify traces of the plane EMN, where (-1,45^0,60^0), (1,45^0,60^0)



٢- بمعلومية نقطة ومستقيم معلوم:

المستقيم AB في وضع عام معلوم مسقطه الافقي والراسي ونقطة مثل C معلوم مسقطها الافقي والراسي، نعين اثري المستوي بتحويلهما الى مستقيمين متقاطعين وذلك بان نصل نقطة C الى نقطة واقعة على المستقيم AB ولتكن نقطة D فيصبح عندنا المستقيم CD ،بعدها نعين الاثر الافقي والراسي للمستقيمين AB,CD نصل الاثرين الراسيين سوية للمستقيمين AB,CD فنحصل على الاثر الراسي للمستوي (V.T) والاثرين الافقيين سوية للمسقيمين AB,CD فنحصل على الاثر الافقي للمستوي (H.T) كما في الشكل التالي.

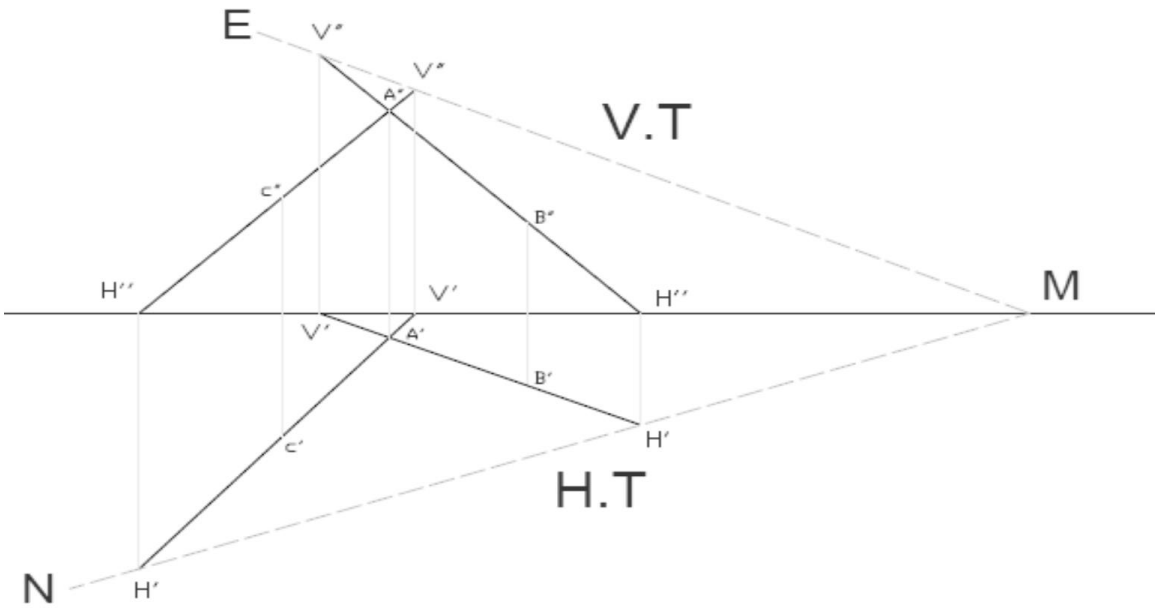


٣- بمعلومية ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة:

المفروض ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة هي A,B,C نصل النقطتين A,B ثم A,C

فنحصل على مستقيمين متقاطعين هما AC و AB.

بعدها نعين الاثر الافقي والراسي للمستقيمين AB,AC ، نصل الاثرين الراسيين سوية للمستقيم AB,AC فنحصل على الاثر الراسي للمستوي (V.T) والاثرين الافقيين سوية للمسقيمين AB,AC فنحصل على الاثر الافقي للمستوي (H.T) كما في الشكل التالي.

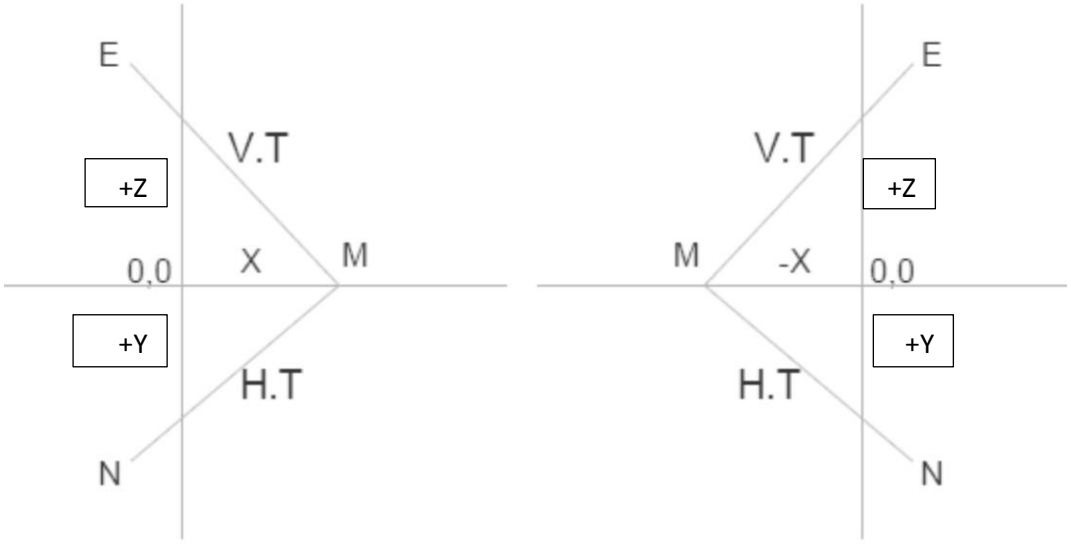


٤- بمعلومية نقطة تقابله مع المحاور الثلاثة.

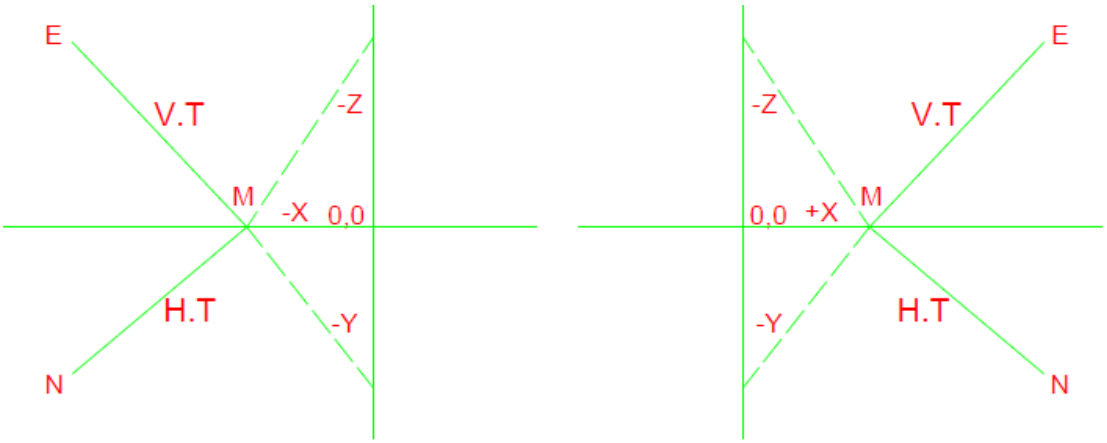
وتكون صيغة النقطة (X,Y,Z)

*اذا كانت اشارة X موجبة ناخذ النقطة M على يمين نقطة الاصل واذا كانت سالبة ناخذ M على يسار نقطة الاصل ويكون اتجاه الاثرين للمستوي عكس اتجاه الاخر.

نحدد الاحداثي الراسي Z والاحداثي الافقي Y على خط التناظر من نقطة الاصل كما في الاشكال التالية:



*حسب اشارة كل من (y,z) فان تحديدهما بالنسبة لل y تحت خط الارض و z فوق خط الارض ويكون اتجاه الاثرين للمستوي ايضا عكس اتجاهما



ايجاد الاحداثيات الناقصة للنقاط

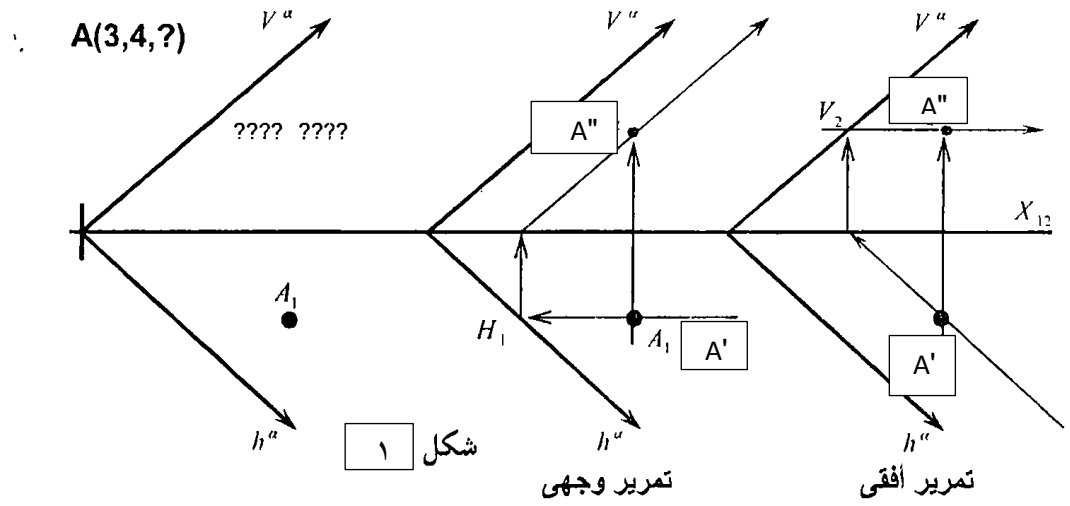
من علاقة المستقيم بالمستوي فقد عرفنا ان اي نقطة في المستوي لا يمر بها سوى مستقيم افقي واحد (على ارتفاع Z المعرف للنقطة) وكذلك مستقيم امامي (وجهي) واحد على بعد Y معرف للنقطة. وكذلك من علاقة النقطة بالمستقيم الواقعة عليه ان المسقط الافقي للنقطة يقع على المسقط الافقي للمستقيم وايضا المسقط الراسي للنقطة يقع على المسقط الراسي للمستقيم. بناءا على ذلك فانه اذا كان المسقط A′ لنقطة A يقع على مسقط افقي لمستقيم افقي h′ في المستوي فان A″ تقع على المسقط الراسي للمستقيم الافقي h″. لذلك لو ان النقطة تقع في اي مستوي وكان معلوم منها مسقط ومجهول الاخر فانه يتم عمل الاتي:-

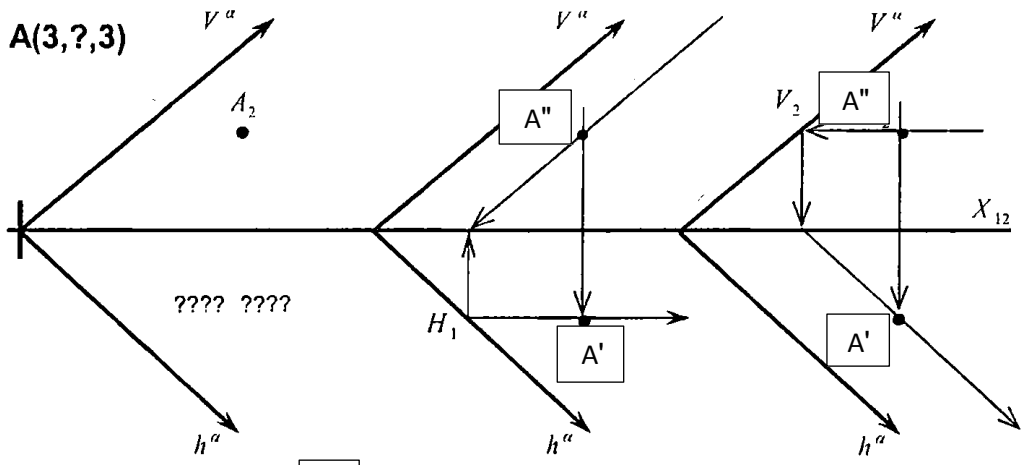
لو ان المستوي ممثل بالاثار

١- لو معلوم A′ والمجهول A″ كما بالشكل ١ (اي Y معلومة و Z مجهولة للنقطة) فانه يتم تمرير مستقيم افقي او امامي اعتمادا على اتجاه اثار المستوي المعروفة. وكذلك في شكل ٢ المعلوم A″ والمجهول A′ (Z معلومة و Y مجهولة للنقطة) يتم تمرير مستقيم افقي او امامي كما بالشكل ٢ .

٢- لو ان المجهول الاحداثي X لا بد ان يتم تمرير مستقيم افقي ومستقيم امامي معا (لان اي نقطة لا يمر بها سوى مستقيم افقي واحد ومستقيم امامي واحد) الاثنين معا عندما يتقاطعا يحددا موقع النقطة الصحيح وقيمة X.

الشكلين ١ و ٢ يوضح في الحالة الاولى كيفية استنتاج المسقط الراسي للنقطة A(3,4,?) بتمرير مستقيم افقي او امامي نتيجة لعدم وجود Z، وكذلك الحالة الثانية لنقطة A(3,?,3) المجهولة فيها Y واستخدام المستقيمات الافقية والوجهية (الراسية). وبنفس الاسلوب يتم استخدام المستقيمات الافقية والراسية اذا كان المستوي يمثل بمستقيمين سواء متقاطعين او متوازيين حيث يوضح كيفية التمرير اذا كان A″ او A′ معلوم كيف يتم استنتاج المسقط الاخر.



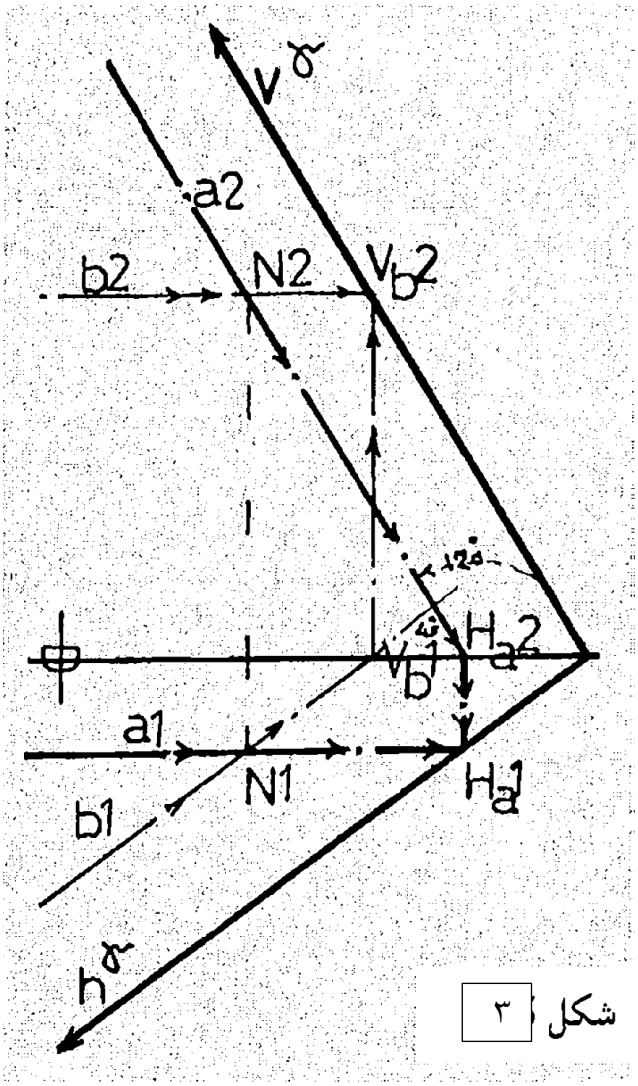


شكل ٢

eg. Specify vertical and horizontal traces of the plane that consists of the lines a & b intersects in point N(2,1,4). The line (b) is horizontal and inclined 45^0 on the front plane, while the line (a) is front and inclined 120^0 on horizontal plane?

من الحالة المعطاة نجد ان المستقيم الافقي (b) الواقع في المستوي يحدد خاصيتين : الاولى اثر المستقيم الافقي هو اثر راسي يقع على الاثر الراسي للمستوي وبالتالي هو نقطة يمكن منها رسم الاثر الراسي للمستوي ولكن ليس لدينا اتجاهه. الخاصية الثانية هي اتجاه المسقط الافقي للمستقيم الافقي h_1 هو اتجاه الاثر الافقي للمستوي وبالتالي يبقى لدينا نقطة نرسم منها اتجاه هذا الاثر كما في شكل ٣ .

وكذلك المستقيم الامامي (a) الواقع في المستوي يحدد خاصيتين : الاولى اثر المستقيم الراسي هو اثر افقي يقع على الاثر الافقي للمستوي وبالتالي هي نقطة يمكن منها رسم الاثر الافقي للمنستوي واصبح معروف اتجاهه من المستقيم الافقي وبالتالي يتم رسمه مباشرة. الخاصية الثانية هي اتجاه المسقط الراسي للمستقيم الامامي f_2 هو اتجاه الاثر الراسي للمستوي وبالتالي اتجاه الاثر الراسي يتم رسمه من الاثر الراسي للمستقيم الافقي.



شكل [٣]

<u>تمرير مستوي بالمستقيم</u>

مثال : المعلوم المستقيم m[A(9,1,4), B(5,3,1)] والمطلوب تعيين الاثرين الافقي والراسي لمستوي α يقع فيه المستقيم m بحيث يكون:-

١- α_1 موازي لخط الارض

٢- α_2 قاطع خط الارض عند X=1

٣- α_3 عمودي على π_1

٤- α_4 عمودي على π_2

eg. The given line m[A(9,1,4), B(5,3,1)] , specify vertical and horizontal traces of the plane α which consists of the given line in which:-

1- $\boldsymbol{\alpha_1}$ is parallel to the ground line.

2- $\boldsymbol{\alpha_2}$ intersects G.L. at X=1.

3- $\boldsymbol{\alpha_3}$ is perpendicular on $\boldsymbol{\pi_1}$.

4- $\boldsymbol{\alpha_4}$ is perpendicular on $\boldsymbol{\pi_2}$.

الحل: نوجد الاثر الافقي والاثر الراسي للمستقيم ثم نبدا التحليل للمطلوب وبناءا عليه نحدد وضع المستوي الذي يحتوي المستقيم .... الشكل ٤

١- $\boldsymbol{\alpha_1}$ موازي لخط الارض

المستوي الموازي لخط الارض اثاره الافقية والراسية توازي خط الارض وبذلك فقد عرفنا اتجاه الاثار للمستوي ويبقى مكان انطلاقها، ويتحدد من علاقة المستقيم الواقع في المستوي حيث ان الاثار للمستقيم تقع على الاثار للمستوي كل من مسقطه وبذلك نرسم من الاثر الراسي للمستقيم خط يوازي خط الارض ويكون هو الاثر الراسي للمستوي $\boldsymbol{V^{\alpha 1}}$ وكذلك من الاثر الافقي للمستقيم نرسم خط يوازي خط الارض ويكون هو الاثر الافقي للمستوي $\boldsymbol{h^{\alpha 1}}$. شكل ٤

٢- $\boldsymbol{\alpha_2}$ قاطع خط الارض عند X=1

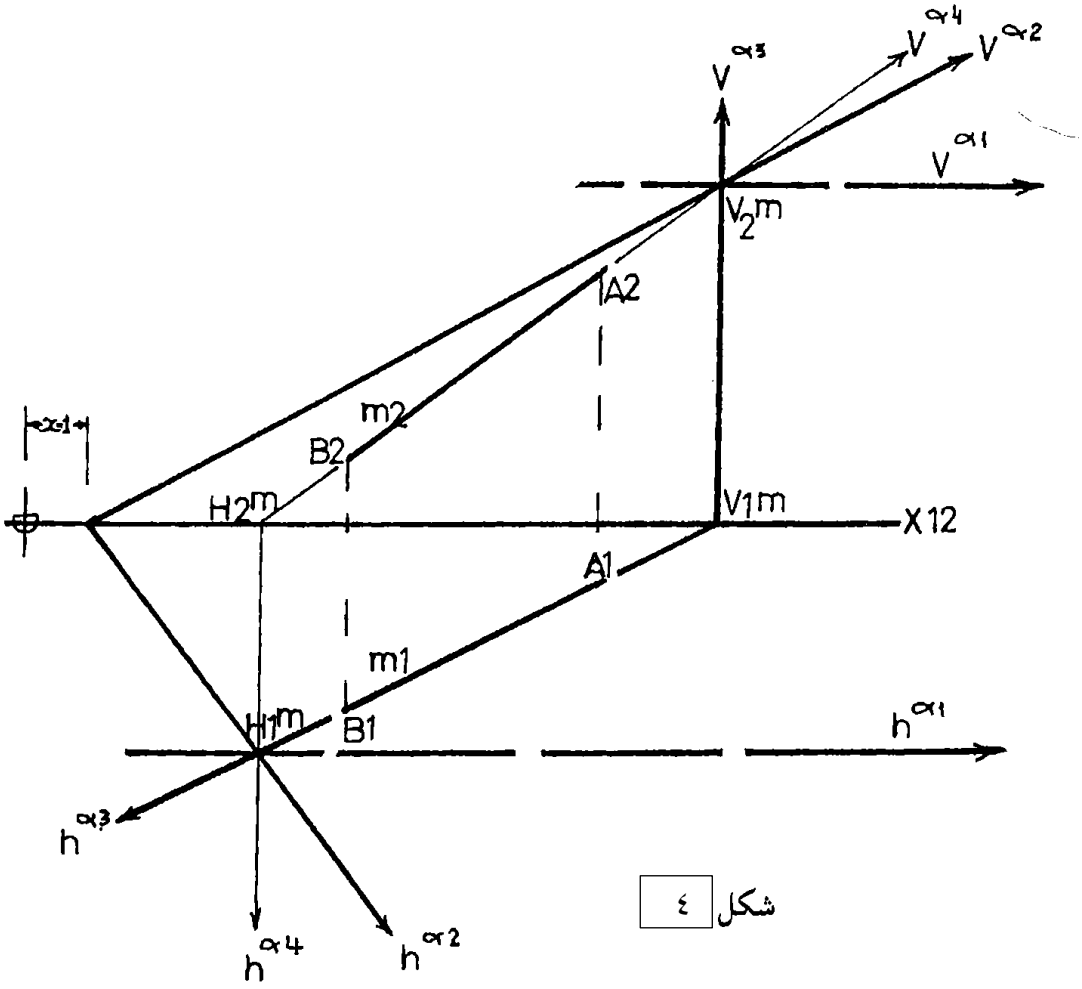
من تحديد مكان x فهي راس المستوي وبالتالي نصلها بالاثر الراسي للمستقيم فتكون هي الاثر الراسي للمستوي $\boldsymbol{V^{\alpha 2}}$ ، نصلها بالاثر الافقي للمستقيم فتكون هي الاثر الافقي للمستوي $\boldsymbol{h^{\alpha 2}}$ شكل ٤ .

٣- $\boldsymbol{\alpha_3}$ عمودي على $\boldsymbol{\pi_1}$

من مميزات المستوي العمودي على المستوي الافقي انه خطي المسقط الافقي (اي ان المسقط الافقي لاي شكل يقع في هذا المستوي يكون على هذا الخط) وبالتالي من معرفة m_1 تحدد $\boldsymbol{h^{\alpha 3}}$ وهو منطبق عليه ، نمد m_1 حتى يصل خط الارض ومنه نرسم $\boldsymbol{V^{\alpha 3}}$ عمودي على خط الارض شكل ٤.

٤- α_4 عمودي على π_2

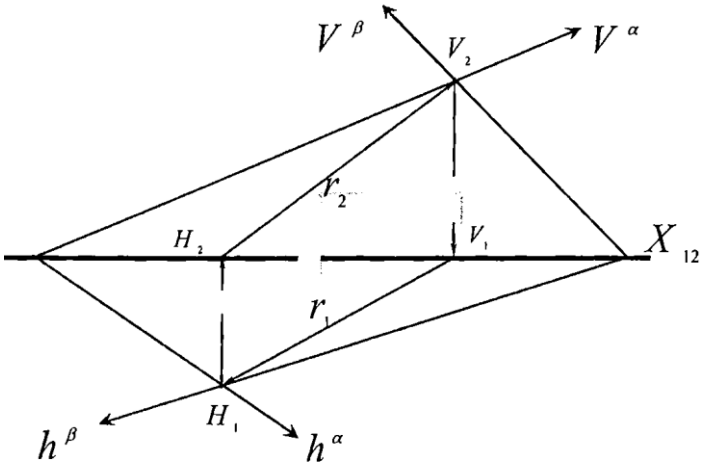
من مميزات المستوي العمودي على المستوي الراسي انه خطي المسقط الراسي (اي ان المسقط الراسي لاي شكل يقع في هذا البمستوي يكون على هذا الخط) وبالتالي من معرفة m_2 تحدد $V^{\alpha 4}$ وهو منطبق عليه، نمد m_2 حتى يصل الى خط الارض ومنه نرسم $h^{\alpha 4}$ عمودي على خط الارض . شكل ٤



شكل ٤

خط تقاطع مستويين

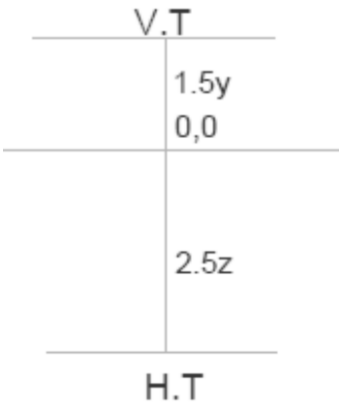
خط تقاطع المستويين ما هو الا خط واقع في كلا المستويين، ومن علاقة المستقيم الواقع في المستوي بالمستوي ان الاثر الافقي للمستقيم يقع على الاثر الافقي للمستوي وكذلك الاثر الراسي للمستقيم يقع على الاثر الراسي للمستوي. وما دام خط التقاطع يقع في كل من المستويين فان الاثر الافقي لخط التقاطع H_1 يقع على الاثر الافقي لكل من المستويين h^α و h^β وكذلك الاثر الراسي لخط التقاطع V_2 يقع على الاثر الراسي لكل من المستويين V^α و V^β . وبذلك يكون معلوم اثار خط التقاطع وعليه نطبق قاعدة معلومية الاثار ومطلوب المساقط (اسقط عمود ووصل) ونستنتج مساقط خط التقاطع r_1 و r_2..... شكل ٥



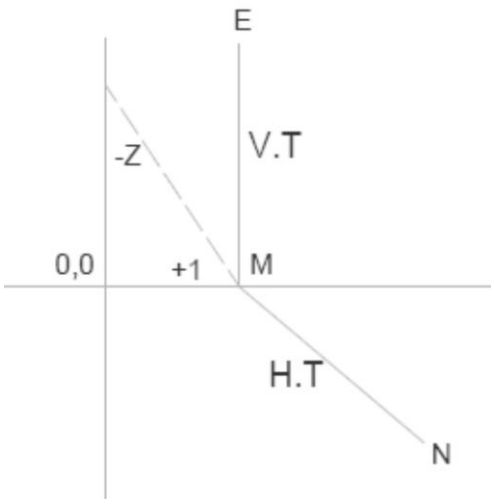
شكل ٥

امثلة

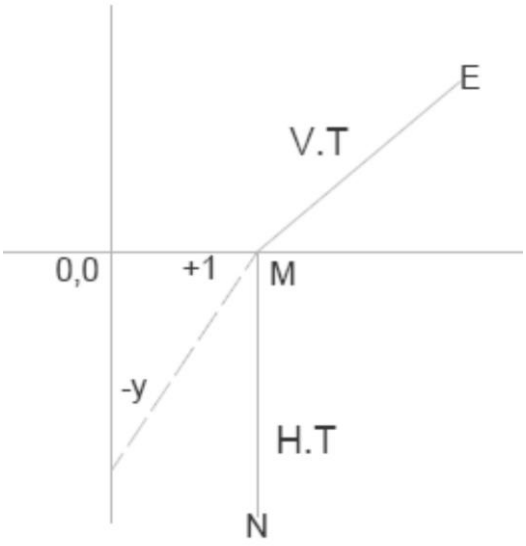
ار سم اثري المستوي (∞,2.5, 1.5)



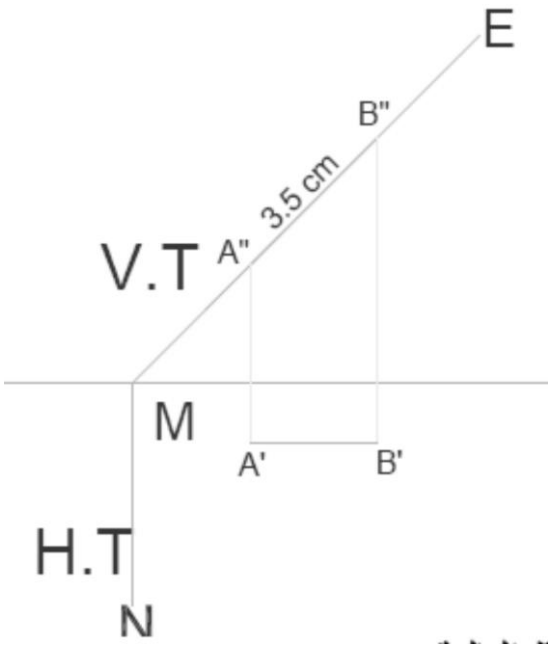
ارسم اثري المستوي (1,-1,∞)



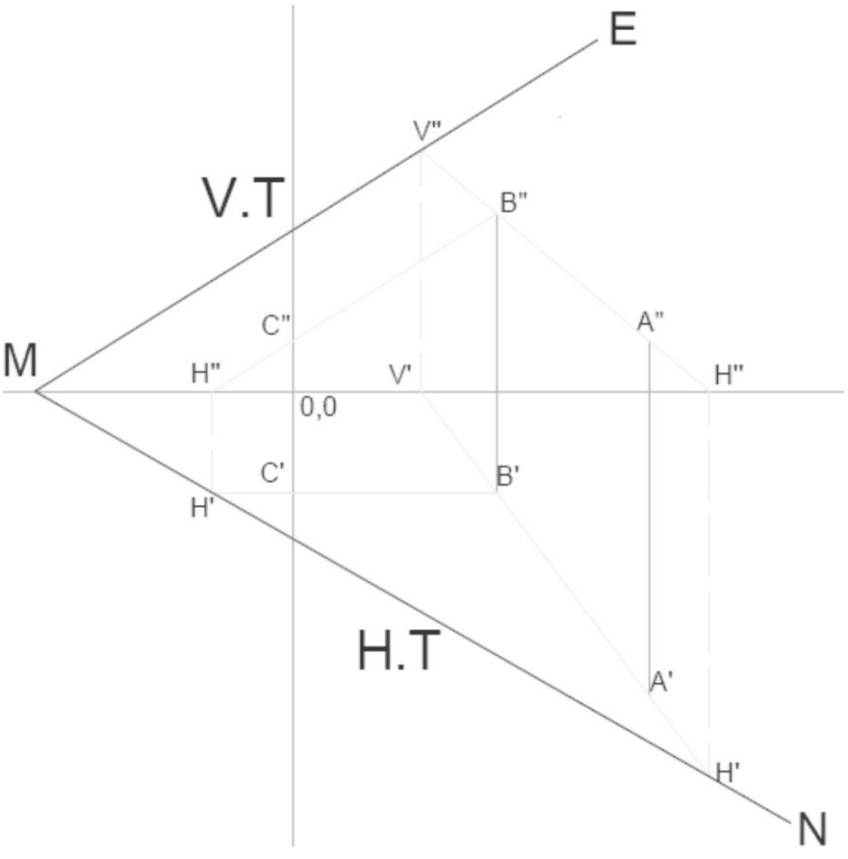
ارسم اثري المستوي (1,∞,-1)



ار سم مستوي عمودي على المستوي الراسي مائل على الافقي بزاوية ٤٥٠ ثم عين مسقطي الخط المستقيمAB الذي يحتويه اذا علمت ان A (1,2) والمستقيم يوازي المستوي الراسي وطوله الحقيقي 3.5cm

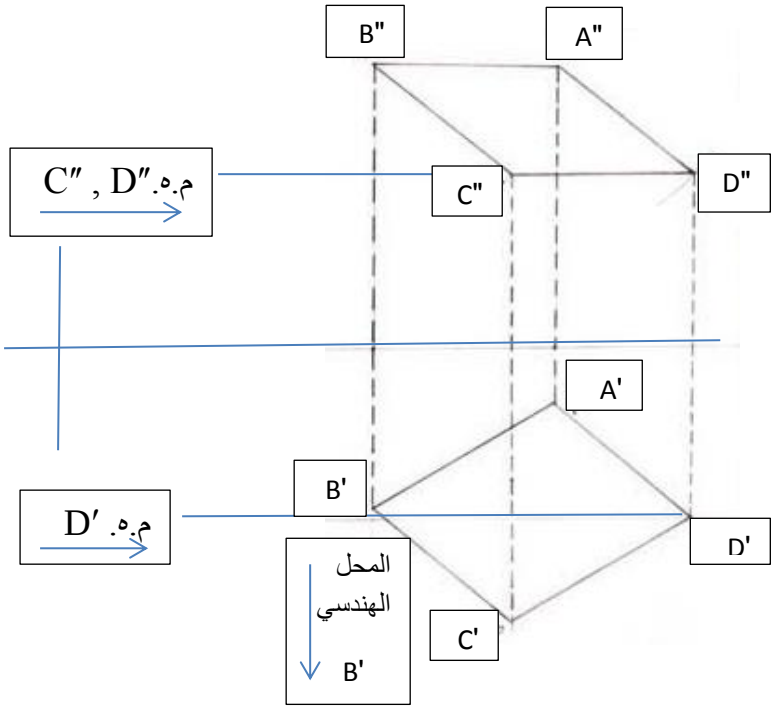


عين المستوي الذي يحوي النقاط التالية A(7,6,1), B(4,2,3.5), C(0,2,1)



Implementation the Plane

Specify the rhombus ABCD while the length of the side is 3.5 cm and parallel to the top plane, A (6, 1, 5), D (? , 3.5, 3)



من معطيات السؤال يمكن رسم A′ و A″ ، نرسم فوق خط الارض خط افقي يوازيه وبارتفاع 3cm فيمثل المحل الهندسي لنقطة D″ ونرسم خط اخر اسفل خط الارض وبارتفاع 3.5cm فيمثل المحل الهندسي لنقطة D′ .

نضع راس الفرجال في نقطة A″ وبفتحة مساوية لطول الضلع 3.5cm فيقطع الخط الافقي في نقطة D″ ، من هذه النقطة نسقط عمود فيقطع الخط الافقي المرسوم اسفل خط الارض في نقطة تمثل D′ ، نصل بين A′ و D′ فنحصل على المسقط الافقي للمستقيم AD نقيم اعمدة على هذا المسقط الافقي وبمقدار 3.5cm (طول الضلع) فنحصل على B′ و C′، نصل بين هاتين النقطتين فنحصل على المعين (Rhombus) A′B′C′D′ ونكمل باقي الرسم في المستوي الامامي فنحصل على B″ و C″.