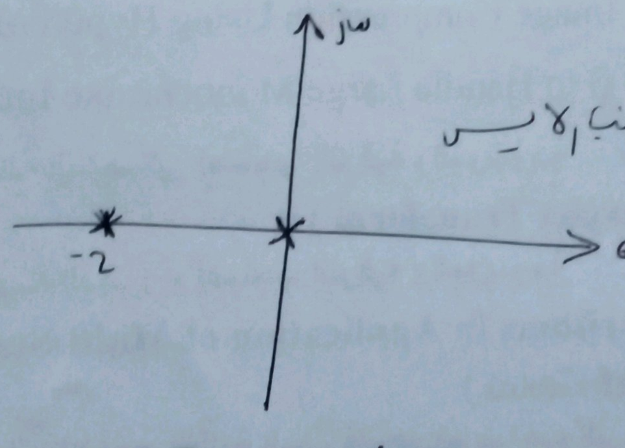
شرح تفصيلي لمحاضرة
lec-7- stability
الاستقرارية

* تعتبر الاستقرارية من الامور المهمة في انظمة السيطرة فاذا كان النظام غير مستقر فان حالة (transient + steady state) لا تتحقق.

* يتم تحديد استقرارية المنظومة عن طريقة ملاحظة مواقع جذور معادلة النظام (poles, zero's) فاذا كانت تقع بالجانب الايسر (ضمن s-plane) فان المنظومة مستقرة ، اما اذا كان احد الجذور (poles, zero's) يقع بالجانب الايمن فان المنظومة تكون غير مستقرة.

Ex: $G(s) = \dfrac{s}{s^2+4s+4} = \dfrac{s}{(s+2)^2}$

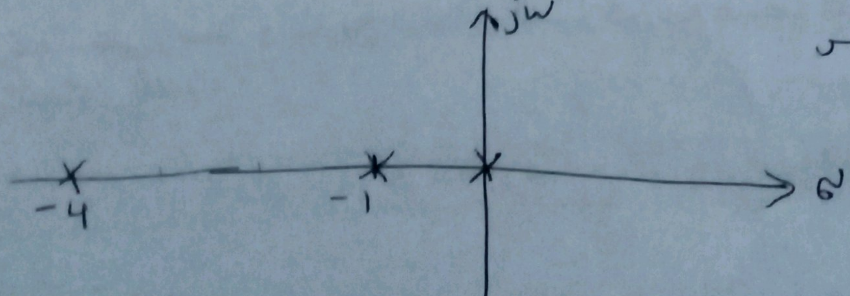
الحل: هذه المنظومة لديها one zero $s=0$
ولديها two poles $s_{1,2}=-2$



نلاحظ ان الجذور تقع بالجانب الايسر
لذا فان المنظومة مستقرة

* for $C.L.T.F = \dfrac{G}{1+GH} = \dfrac{s}{s^2+5s+4} = \dfrac{s}{(s+1)(s+4)}$

No of zero $=1$, $s=0$
No of poles $=2$, $s_1=-1$, $s_2=-4$



جميع الجذور تقع بالجانب الايسر
لذا فان C.L.T.F stable

* عملية تحديد الجذور تكون فيها صعوبة اذا كانت المنظومة ذات درجة عالية كما في المثال التالي

$$C.L.T.F = \frac{G(s)}{\underbrace{1+G(s)H(s)}} = \frac{s^2+6s+5}{s^8+2s^7+4s^6+10s^5+8s^4+3s^3+s^2+4s+1}$$

يسمى هذا الحد char/Eq.
المعادلة الخاصة بالمواصفات
(معادلة المواصفات)

* نلاحظ ان هذه المعادلة من الدرجة الثامنة والتي من الصعوبة تحديد جذورها وبالتالي لا نستطيع ان نحدد هل هذه المنظومة مستقرة او لا. لذلك فان الباحث العالم (Routh) اوجد طريقة لتحديد استقرارية اي منظومة حتى لو كانت ذات درجة عالية، حيث تعتمد هذه الطريقة على تحليل معادلة (char/Eq = 1+GH) لدالة C.L.T.F وكما موضح بالمثال التالي

Ex1: Consider the char/Eq $= 1+GH = s^4+2s^3+3s^2+4s+5=0$

الحل: يتم عمل جدول بالاعتماد على المعادلة واخذ معاملات الحدود الزوجية والفردية

s^4	1	3	5	تم تحديدها من المعادلة
s^3	2	4	0	
s^2	$a=1$	$b=5$		
s^1	$c=-6$	$d=0$		
s^0	$e=5$			

$$\underline{\underline{s^4}}+2s^3+\underline{\underline{3s^2}}+4s+\underline{\underline{5}}$$

حدود زوجية

* الصف الاول عناصره من الحدود الزوجية
* الصف الثاني عناصره من الحدود الفردية
* حدود الصف s^2 (a, b) يتم تحديدها بالشكل التالي

$$a = \frac{(2*3)-(1*4)}{2} = 1$$

$$b = \frac{(2*5)-(1*0)}{2} = 5$$

* حدود الصف s^1 يتم تحديدها بنفس الطريقة

$$c = \frac{(1*4)-(2*5)}{1} = -6$$

$$d = \frac{(1*0)-(2*0)}{1} = 0$$

بعد اكمال الجدول يتم ملاحظة عناصر العمود الاول اذا كانت جميع العناصر لها نفس الاشارة تكون المنظومة مستقرة

في هذا المثال يوجد تغييرين بالاشارة لذلك فان المنظومة غير مستقرة

عدد الجذور التي تقع بالجانب الايمن 2 بعدد مرات التغيير بالاشارة

بعض الحالات الخاصة من
طريقة Routh

① الحالة الاولى : عندما يكون المعامل الاول من اي صف (صفر) وكما في المثال التالي ويتم معالجة الحالة بفرض (رقم صغير اقل من 1 ε) يوضع بدلا من الصفر

Ex2: determine the stability of the C.L.T.F = $\dfrac{10}{s^5+2s^4+3s^3+6s^2+5s+3}$

* الحل ناقش معادلة المقام

عناصر الصف الثاني

$$1+GH = s^5+2s^4+3s^3+6s^2+5s+3=0$$

عناصر الصف الاول

s^5	1	3	5
s^4	2	5	3
s^3	$a=0$ ε	$b=\frac{7}{2}$	
s^2	~~$\frac{42\epsilon-49-6\epsilon^2}{12\epsilon-14}$~~	~~0~~	
s^2	$\frac{6\epsilon-7}{\epsilon}$	3	
s^1	$\frac{42\epsilon-49-6\epsilon^2}{12\epsilon-14}$	0	
s^0	3		

* يتم ايجاد قيم a و b

$$a=\frac{(2\times3)-6}{2}=0$$

$$b=\frac{(2\times5)-3}{2}=\frac{7}{2}$$

∵ العنصر الاول من الصف (s^3) هو صفر بينما يحتوي على عناصر ≠ صفر لذلك يتم فرض $\epsilon>0$ (تم اختيار رقم سالب او موجب) ويتم اكمال الجدول بالطريقة الاعتيادية
سوف تظهر ε=- او ε=+ اذا كانت *
نفس النتيجة وهي وجود (تغيير 2) بالاشارة
لذلك فان المنظومة unstable

② الحالة الثانية : اذا يوجد صف جميع عناصره (zeros) لذلك يتم اشتقاق المعادلة الموجودة بالصف الاعلى من الصف الصفري وكما مبين بالمثال التالي

Ex3: determine the stability of the C.L.T.F = $\dfrac{10}{s^5+7s^4+6s^3+42s^2+8s+56}$

مردود فردية

s^5	1	6	8	
s^4	~~7~~ 1	~~42~~ 6	~~56~~ 8	← ÷7
s^3	$a=0$	$b=0$	$c=0$	
s^2	d	e		
s^1	f	g		
s^0	h			

$$a=\frac{(1\times6)-(1\times6)}{1}=0$$

$$b=\frac{(1\times8)-(1\times8)}{1}=0$$

$$c=0$$

	العمود الاول			
s^5	1	6	8	
s^4	$\cancel{7}$ 1	$\cancel{42}$ 6	$\cancel{56}$ 8	$\div 7$
s^3	$a=\cancel{4}$ 1	$b=\cancel{12}$ 3	$c=0$	$\div 4$
s^2	3	8		
s^1	$\frac{1}{3}$	0		
s^0	8			

* تم اخذ معادلة الصف الثاني (s^4) والتي تكون

$$\boxed{\begin{aligned} A(s) &= s^4 + 6s^2 + 8 \\ \frac{dA(s)}{dt} &= 4s^3 + 12s \end{aligned}}$$

تم وضع الارقام بدلاً عن Zeros

$a=4$, $b=12$

* تم اكمال الجدول بالطريقة التي تم ذكرها سابقاً

* حسب اشارة عناصر العمود الاول لا يوجد تغيير بالاشارة وهذا يعني ان المنظومة مستقرة ولكن بسبب حدوث الصف الصفري فهذا يعني وجود جذور تقع ضمن Imaginary axis او تكون Complex root

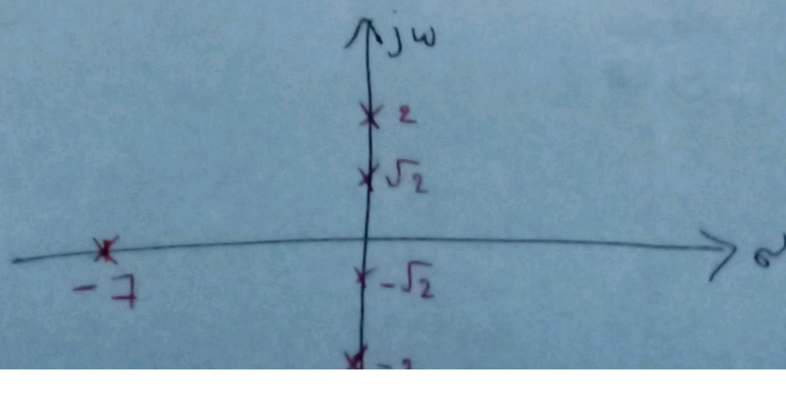
* لايجاد جذور هذه المعادلة يتم ايجادها من A(s) ومن المعادلة الرئيسية وكما يلي

$$A(s) = s^4 + 6s^2 + 8 = 0$$
$$(s^2+4)(s^2+2) = 0$$
$$s^2 = -4 \Rightarrow s_{1,2} = \mp 2j$$
$$s^2 = -2 \Rightarrow s_{3,4} = \mp \sqrt{2}j$$

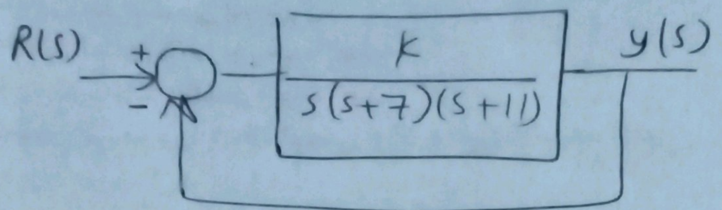
* اما باقي الجذور فيتم الحصول عليها من قسمة المعادلة الرئيسية على A(s) وكما يلي

$$\begin{array}{r|l} & s + 7 \\ \hline s^4 + 6s^2 + 8 & s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56 \\ & \mp s^5 \mp 6s^3 \mp 8s \\ \hline & 7s^4 + 42s^2 + 56 \\ & \mp 7s^4 \mp 42s^2 \mp 56 \\ \hline & 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

∴ الجذر الخامس $\boxed{s=-7}$



EX 4: Find the range K, for the system shown below that will cause the system to be stable, unstable and marginally stable find also the value of freq. for marginally stable. Assume K>0



* في هذا السؤال مطلوب ايجاد قيمة K الذي يكون فيه النظام مستقر و ايضا قيمة التردد عند K critical حرجة

الحل: يتم اولاً ايجاد معادلة C.L.T.F وبعدها اخذ معادلة المقام 1+GH لتحديد جدول Routh

$$C.L.T.F = \frac{G}{1+GH} = \frac{K}{s^3+18s^2+77s+K}$$

العمود الاول

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 77 \\ s^2 & 18 & K \\ s^1 & a=\frac{1386-K}{18} & \\ s^0 & b=K & \end{array}$$

دائماً هذا الحد يكون هنا

$$1+GH = s^3+18s^2+77s+K=0$$

عناصر فردية

$$a = \frac{(18*77)-K}{18}$$

* نلاحظ انه لايمكننا تحديد اشارة عناصر العمود الاول لوجود K الغير معروفة لذا لايمكننا ان نقول ان النظام مستقر ولكن نستطيع ايجاد قيمة K_c

* اولاً نذكر العبارة التالية (system to be stable $K>0$)

* ثم نبدا من نهاية الجدول لايجاد K و ناخذ الحد الذي يعطي +K موجبة ونهمل K اذا كانت سالبة

الحد الاخير $K>0$

الحد قبل الاخير $\frac{1386-K}{18} > 0 \Rightarrow \frac{1386-K}{18} = 0$

نجعله معادلة بدل >

$$\boxed{1386 = K_c}$$

هذا يعتبر K critical حرج

$\therefore$ range for stablitiy $(0 < K \leq 1386)$

* لايجاد التردد (ω) عندما ($Kritical = K_c$) ، ناخذ المعادلة التي قبل الصف الذي اوجدنا منه k ، في هذا السؤال يكون الصف الثاني

لذا تكون المعادلة هي

ثم تعويض $k_c = 1386$

Auxillary Eqn $= A(s) = 18s^2 + K_c = 0$

* ثم فرض $s = \omega$ وتعوض بالمعادلة لغرض ايجاد التردد

$A(\omega) = -18\omega^2 + 1386 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\omega}} = \mp 8.779$ rad/sec.

freq. of sustained oscillation

---

* في حالة المحاضرة الاخيرة يوجد مثال $H{\cdot}1$ مطلوب حله بنفس طريقة حل المثال اعلاه

* في حالة ان معادلة المنظومة اعطيت بدلالة معادلات s.s (A, B, C, D) والذي يمثل معادلة $\det(sI - A)$ فان طريقة الحل هو ايجاد المحدد (، اي انه Char/Eqn $1 + GH = \det(sI - A)$ ومنها يتم ايجاد جدول Routh

وكما في المثال التالي

Ex5: For the system given below, find out No. of poles which lie in the left half plane, in the right, and on the jw-axis

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -10 & -5 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad , y = [1 \ 0 \ 0]\, x$$

* طريقة الحل

sol $\quad 1 + GH = \det(sI - A) = s^3 - 6s^2 - 7s - 52$

ثم ايجاد المحدد

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & -7 \\ s^2 & \cancel{-6}\ -3 & \cancel{-52}\ -26 \quad \div 2 \\ s^1 & \frac{47}{3} & 0 \\ s^0 & -26 & \end{array}$$

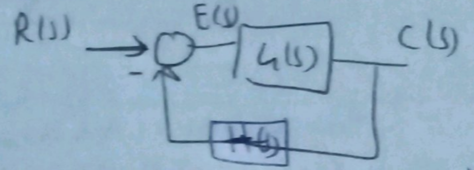
* نلاحظ من العمود الاول ان الاشارات متغيرة (مرة واحدة) وهذا يعني ان النظام غير مستقر ويوجد جذر يقع بالجانب الايمن والبقية (2 Poles) تقع بالجانب الايسر

---

* تم ملاحظة ch6 من الكتاب الذي يحتوي على اسئلة محلولة وهامة السؤال (E 6.1) و (P 6.8) و (P6.10) و (6.13) مهمة

steady state errors
اخطاء حالة الاستقرار

* في هذا الموضوع نريد ان نوجد معادلة $E_{s.s}$ عندما الادخال (step, ramp, acceleration) لذا اولاً =
نشتق المعادلة العامة $E(s)$ (هنا كدالة s لذا يختلف عن $e(t)$ بالمحاضرات السابقة)



* حسب الشكل التالي $\Leftarrow$

فان معادلة $C.L.T.F = \dfrac{G(s)}{1+GH(s)}$

وايضاً = معادلة الخطاء $E(s) \Leftarrow E(s) = R(s) - C(s)H(s)$

$$E(s) = R(s) - E(s)G(s)H(s)$$

$$E(s) + E(s)G(s)H(s) = R(s) \Longrightarrow \boxed{E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}}$$ معادلة الخطاء بدلالة s

$$E_{s.s}(s) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \boxed{\lim_{s\to 0} s\,\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}}$$ معادلة $E_{ss}(s)$ بدلالة s

---

① if input is (step) $R(s) = \frac{1}{s}$ = unit step

* اولاً = اذا كان الادخال

لذا فان معادلة $E_{s.s}(s)$

$$E_{s.s}(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{\frac{1}{s}}{1+G(s)H(s)}$$

$$= \lim_{s\to 0}\left(\cancel{s} * \frac{1}{\cancel{s}(1+G(s)H(s))}\right) = \frac{1}{1+\underbrace{\lim_{s\to 0} G(s)H(s)}_{\text{let} = k_p}} = \frac{1}{1+k_p}$$

تم ادخال s هنا على البسط والمقام وذلك ان نهاية الثابت هو نفسه لذا تم جمع المعادلة بالشكل المعطاه

* في حالة الادخال $R(s) = \frac{A}{s}$ يكون القانون النهائي هو

$$E_{s.s}(s) = \frac{A}{1+k_p}, \quad k_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s)$$

k_p → position error constant

② if ramp input (velocity i/p) $= \frac{1}{s^2}$

نقوم بنفس الخطوات السابقة (نقطة ①) لذا نحصل على

$$E_{s.s}(s) = \lim_{s\to 0}\left[\frac{s}{1+G(s)H(s)} * \frac{1}{s^2}\right] = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s(1+G(s)H(s))}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{\lim s\, G(s) H(s)}_{let\ = k_v}} = \frac{1}{k_v}$$

يسمى k_v static velocity error constant

* في حالة $R(s) = \frac{A}{s^2}$ لذلك تكون معادلة $E_{ss}(s)$ كما يلي

$$\boxed{E_{ss}(s) = \frac{A}{k_v}}$$

③ For ~~acce~~leration (parabolic) i/p $R(s) = \frac{1}{s^3}$

* بنفس الخطوات السابقة نحصل على

$$E_{ss}(s) = \lim_{s \to 0} \left[\frac{s}{1 + G(s) H(s)} * \frac{1}{s} \right]$$

$$= \frac{1}{\underbrace{\lim_{s \to 0} s^2 G(s) H(s)}_{let\ = k_a}} = \frac{1}{k_a} \rightarrow \text{static acceleration const}$$

$$\boxed{E_{s.s}(s) = \frac{A}{k_a}}$$

* في حالة الادخال $R(s) = \frac{A}{s^3}$ تكون المعادلة النهائية هي

* يوجد جدول بالمحاضرة الاولية هنا تم ملاحظة لانه يتضمن مقارنة بين حالات الادخال الثلاثة

* تم الاكتفاء بكتابة المعادلات النهائية دون ذكر الاشتقاق

EX6: For open loop of unity f/b, find static error coefficients and $E_{s.s}(s)$ for i/p $r(t) = 2 + 4t + 2t^2$

* لحل اولاً نقوم بتحويل معادلة $r(t) \rightarrow R(s)$

$$R(s) = \underbrace{\frac{2}{s}}_{step} + \underbrace{\frac{4}{s^2}}_{ramp} + \underbrace{\frac{4}{s^3}}_{acceleration}$$

$$G(s) = \frac{100}{s^2 (s+4)(s^2 + 5s + 25)}$$

* معادلة منظومة السؤال هي

* بما انه يوجد ثلاثة حدود بالادخال لذا فان $E_{ss}(s)$ المطلوب يتضمن

$$E_{s.s}(s) = E_{s.s_1}(s) + E_{s.s_2}(s) + E_{s.s_3}(s)$$

$$E_{s.s_1}(s) = \frac{A}{1+k_p} \quad , \quad k_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s)$$

$$k_p = \lim_{s\to 0} \frac{100}{s^2(s+4)(s^2+5s+25)} * 1 = \infty$$

تم تعويض zero بكل s موجودة بالمعادلة

$$E_{ss_2}(s) = \frac{A}{k_v} \quad , \quad k_v = \lim_{s\to 0} s\,G(s)H(s)$$

$$k_v = \lim_{s\to 0} s \frac{100}{s^2(s+4)(s^2+5s+25)} * 1 = \infty$$

$$E_{ss_3}(s) = \frac{A}{k_a} \quad , \quad k_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)H(s)$$

$$k_a = \lim_{s\to 0} \cancel{s^2} \frac{100}{\cancel{s^2}(s+4)(s^2+5s+25)} = \frac{100}{4*25} = 1$$

$$\therefore E_{s.s_1}(s) = \frac{A}{1+k_p} = \frac{2}{1+\infty} = 0$$

$$E_{s.s_2}(s) = \frac{A}{k_v} = \frac{4}{\infty} = 0$$

$$E_{s.s_3}(s) = \frac{A}{k_a} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\therefore \underset{\text{النهائية}}{E_{s.s}(s)} = E_{ss_1}(s) + E_{s.s_2}(s) + E_{s.s_3}(s)$$

$$= 0 + 0 + 4 = 4$$

---

* ممكن حل السؤال بالاعتماد على المعادلة الرئيسية لأي أفضل وأشمل

المعادلة العامة

$$E_{s.s}(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$R(s) = \frac{2}{s} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s^3}$$

$$= \frac{2s^2+4s+4}{s^3}$$

تعوض هنا

* بعد تعويض R(s) و G(s) بمعادلة $E_{ss}(s)$ يكون الحل بالشكل التالي .

$$E_{s.s}(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{\frac{2s^2+4s+4}{s^3}}{1 + \frac{100}{s^2(s+4)(s^2+5s+25)} * 1}$$

$$E_{s.s}(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{\frac{2s^2+4s+4}{s^3}}{\frac{s^2(s+4)(s^2+5s+25)+100}{s^2(s+4)(s^2+5s+25)}}$$

$$E_{ss}(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{2s^2+4s+4}{\cancel{s^3}} * \frac{s^2(s+4)(s^2+5s+25)}{s^2(s+4)(s^2+5s+25)+100}$$

$$= (0+0+4) * \frac{(0+4)(0+0+25)}{0[(0+4)(0+0+25)]+100}$$

$$\boxed{E_{ss}(s) = \frac{4*4*25}{100} = 4}$$

* توجد العديد من الأسئلة المحلولة في ch4 حول هذا الموضوع يرجى ملاحظتها والاستفادة منها .

* ملاحظة المنظومة التي لا تحتوي على عامل مشترك s بالمقام تسمى type 0

$$Ex1 \quad G(s) = \frac{10}{(s^3+6s^2+4s+10)}$$

لا يوجد s مشترك لذا يسمى

type 0 , third order

* المنظومة التي تحتوي على عامل مشترك $\underline{s}$ واحد تسمى type 1

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)(s+4)}$$

عامل مشترك

type1

third order

* المنظومة التي تحوي على عامل مشترك $\underline{s^2}$ ← تسمى type 2

$$G(s) = \frac{2}{s^2(s^2+2s+6)}$$

type 2, fouth order