شرح تفصيلي لمحاضرة رقم 8

Root locus method

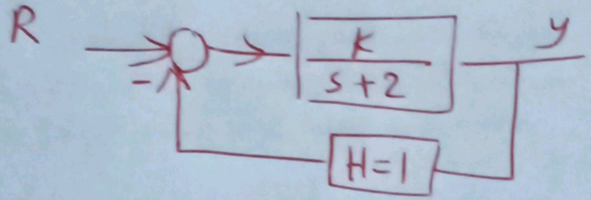
طريقة محل الجذور

* طريقة (root locus محل الجذور) هي طريقة رسم لحركة جذور معادلة plant عندما k تتغير من $(0 \longrightarrow \infty)$ لتحديد استقرارية المنظومة بعد اكمال الرسم

* هذه الطريقة تحدد استقرارية (closed loop system) بالاعتماد على معادلة الـ (open loop system)

* المثال البسيط التالي يوضح حركة الجذور عندما k تتغير من $(0 \longrightarrow \infty)$

EX1: Consider the system shown in Figure below



sol $C.L.T.F = \dfrac{G}{1+GH} = \dfrac{k}{\boxed{s+2+k}}$

* لو قمنا بعمل جدول يتضمن تعويض قيمة k بمعادلة المقام فاننا نستطيع رسم هذه الحركة

k	k=0	k=1	k=2	k=3	----	k=∞
s	-2	-3	-4	-5		-∞

بالاعتماد على هذه المعلومات نرسم حركة الجذور

$s+2+k \Rightarrow \underline{s=-2}$

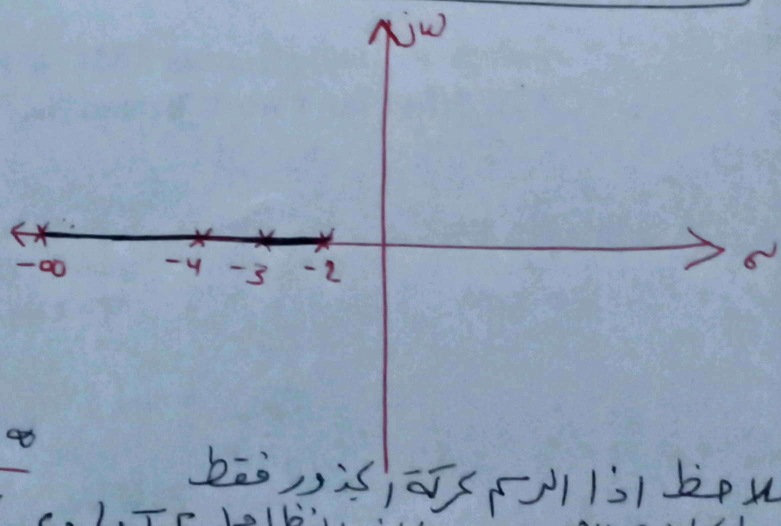
عندما $k=0$

$k=1 \Rightarrow s+2+1 \Rightarrow \underline{s=-3}$

$k=2 \Rightarrow s+2+2 \Rightarrow \underline{s=-4}$

⋮

$k=\infty \Rightarrow s+2+\infty \Rightarrow \underline{s=-\infty}$



* نلاحظ اذا الرسم لحركة الجذور فقط بالجانب الايسر فان النظام (C.L.T.F) يكون مستقر

* طريقة رسم (حركة الجذور $^{root\ locus}$) عندما $(k = 0 \to \infty)$ تتم بإعداد من الخطوات والتي سيتم توضيحها على المثال (Ex1) الموجود ضمن المحاضرة الأولية ص3

Ex1: Consider the following system $G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$, $H=1$
draw the root locus for this system.

الحل نؤكد ان طريقة (root locus) هي طريقة لتحديد استقرارية النظام C.L.T.F بالاعتماد على معادلة $(O.L.T.F = GH)$ اذا $H=1 \Leftarrow (O.L.T.F = G)$
تتضمن هذه الطريقة مجموعة من الخطوات لغرض رسم حركة جذور معادلة O.L.T.F ضمن (s-plane) وبعد اكمال الرسم نستطيع ان نحدد هل النظام (C.L.T.F) مستقر او لا. اذا الرسم يبقى بالجانب الايسر فان النظام مستقر

$$GH = \frac{k}{s(s+1)(s+2)} * 1$$

الخطوات

① No. of separate poles $n=3$
$s=0$, $s=-1$, $s=-2$
$m = 0$ (Zero لا يوجد)

① تحديد جذور معادلة O.L.T.F (Zeros و Poles) يتم فرض عدد zeros تفرض m
يتم فرض عدد poles بـ n ، بهذا السؤال
$n=3$, $m=0$ (لا يوجد zeros)

محاذيات

② determine the asymptotes
$n - m = 3 - 0 = 3$

② تحديد عدد المحاذيات والتي عددها $= n-m$
ضمن هذه النقطة يتم تحديد زوايا المحاذيات ونقطة تقاطع هذه المحاذيات ، بهذا السؤال يوجد ثلاثة محاذيات لذا يتم ايجاد ثلاثة زوايا ونقطة تقاطع لهذه الزوايا

* angle of asymptote

$$\theta_i = \frac{\mp(2i+1)\pi}{n-m}$$

i (رقم الزاوية)

$\pi = 180^\circ$

$$\theta_0 = \mp \frac{(2*0+1)\pi}{3} = \frac{\mp\pi}{3} = \mp 60^\circ$$

رقم الزاوية الاولى

$$\theta_1 = \mp \frac{(2*1+1)\pi}{3} = \frac{\mp 3\pi}{3} = \mp 180^\circ$$

رقم الزاوية الثانية

$$\theta_2 = \mp \frac{(2*2+1)\pi}{3} = \frac{\mp 5\pi}{3} = \mp 300^\circ$$

الزاوية الثالثة

* نقطة تقاطع الجاذبات يتم تحديدها بالقانون التالي *

نقطة تقاطع الجاذبات

$$\sigma = \frac{\sum real\ poles - \sum real\ zero}{n-m}$$

* في هذا القانون يتم اخذ القيم الحقيقية لـ poles والقيم الحقيقية فقط لـ zeros اي اذا كانت الجذور complex (ناخذ فقط الجزء الحقيقي منها)

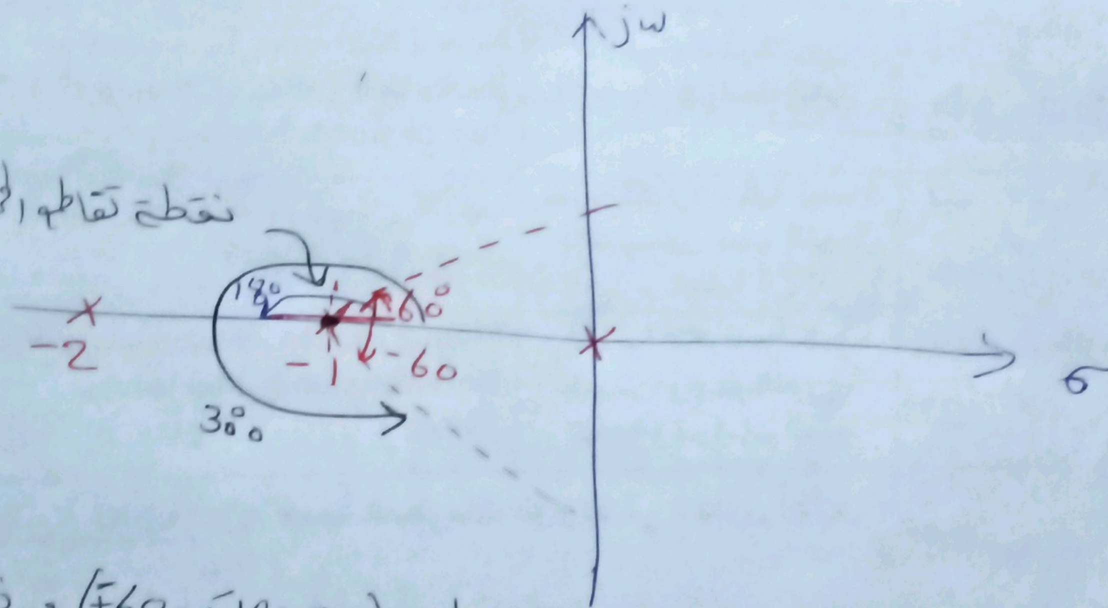
* في هذا السؤال الجذور هي حقيقية (ثلاثة Poles ولا يوجد zeros)

قيم Poles — لا يوجد zero

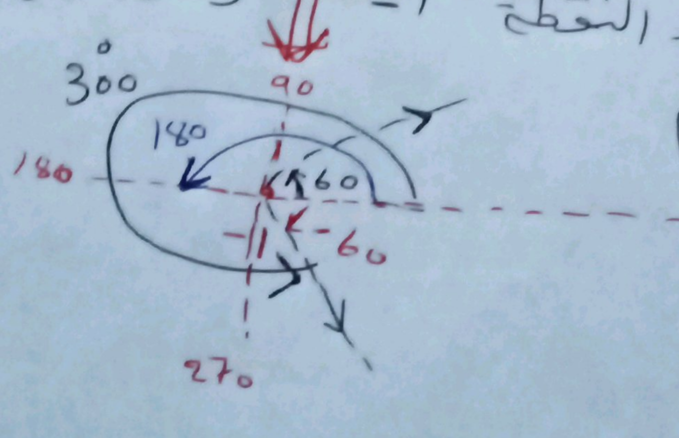
$$\sigma = \frac{(0-1-3) - 0}{3} = \underline{\underline{-1}}$$

نقطة تقاطع الجاذبات الثلاثة

* بالشكل التالي نوضح نقطة التقاطع للجاذبات (1-) و زوايا الجاذبات



* من نقطة التقاطع (1-) نحاول تحديد الزوايا (300∓ و 180∓ و 60∓) و ذلك بوضع احداثي وهمي عند النقطة 1- ونحاول وضع الزوايا



ملاحظة
$-300° = 60$
$300 = -60$

* الخطوة الثالثة لفرض الرسم هي
حساب نقاط التوقف (break points)
بالاعتماد على معادلة المقام 1+GH

③ breakaway points

$$1+GH=0$$

$$1+\frac{k}{s(s+1)(s+2)}\times 1=0 \Rightarrow \frac{s(s+1)(s+2)+k}{s(s+1)(s+2)}=0$$

$$\boxed{s^3+3s^2+2s+k=0} \Rightarrow k=-(s^3+3s^2+2s)$$

من هذه المعادلة تم ايجاد
معادلة لـ k

بعدها تم اشتقاق معادلة
k نسبة الى s

$$\frac{dk}{ds}=-(3s^2+6s+2)=0$$

يتم تحليل جذور هذه المعادلة ثم
تعويض هذه الارقام $(s_1=-1.577, s_2=-0.423)$

$$\begin{cases} s_1=-1.577 \\ s_2=-0.423 \end{cases}$$

بمعادلة $\underline{\underline{k}}$ الاصلية

$$k_1\Big|_{s=-1.577}=-((-1.577)^3+3(-1.577)^2+2(-1.577))=\boxed{-0.385}$$

سالب

$$k_1\Big|_{s=-0.423}=-[(-0.423)^3+3(-0.423)+2(-0.423)]=\boxed{0.385}$$

موجب

* ملاحظة ① نقاط التوقف (breakpoint) هي نقاط تكون بين (two Poles) متقابلة وتكون تسمى (breakaway) اما
نقاط توقف ثم مغادرة

التي تكون بين (two zero) او قريبة من (zero) فتسمى (break in)
نقاط التقاء

* ملاحظة ② نقاط (breakpoint) هي قيم الجذور $\underline{\underline{s}}$ وليس قيم $\underline{\underline{k}}$
لذا فان الجذر الذي يجعل معادلة k موجبة يكون break Point
اما الجذر الذي يجعل k سالبة (يهمل)

* في هذا السؤال الجذر (s=-0.423) يعتبر break Point (break away point)

(4) the intersection point with imaginary axis using Routh method or following step

* يتم ايجاد نقطة التقاطع مع الاحداثي الصادي (jw) وايضا $k_{crtical}$ = k قيمة الحرجة
وذلك بطريقة Routh المشروحة بالمحاضرة السابقة او يمكنا
استخدام الطريقة البسيطة التالية لايجاد باك معادلة $1+GH=0$

$$1+GH=0 \Rightarrow s^3+3s^2+2s+k=0$$

let $s=jw \xrightarrow[\text{تعوض بالمعادلة}]{} (jw)^3+3(jw)^2+2jw+k=0$

$$\boxed{-jw^3-3w^2+2jw+k=0}$$

ثم يتم فصل الحدود real عن الحدود Imaginary

$$(-3w^2+k)+(2jw-jw^3)=0+0j$$

$$(-3w^2+k)+jw(2-w^2)=0+0j$$

من هذه المعادلة يتم ايجاد التردد w و قيمة $\underline{\underline{k}}$ والتي تعتبر k critical gain

$$w(2-w^2)=0 \Rightarrow w^2=2$$

$$\boxed{w=\mp\sqrt{2}\ \text{rad/sec}}$$

ثم تعويضها ب $(-3w^2+k)$ real part

$$-3w^2+k=0 \Rightarrow -3*2+k=0 \Rightarrow \boxed{k=6}$$

critical gain والذي اي قيمة k بعده يصبح النظام غير مستقر

$\therefore$ range of k for stability is

$$\boxed{0<K\leq 6}$$

(5) angle of departure or angle of arrival

* نقطة رقم 5 حساب زاوية المغادرة (angle of departure)

في حالة وجود جذور (poles) تكون Complex poles

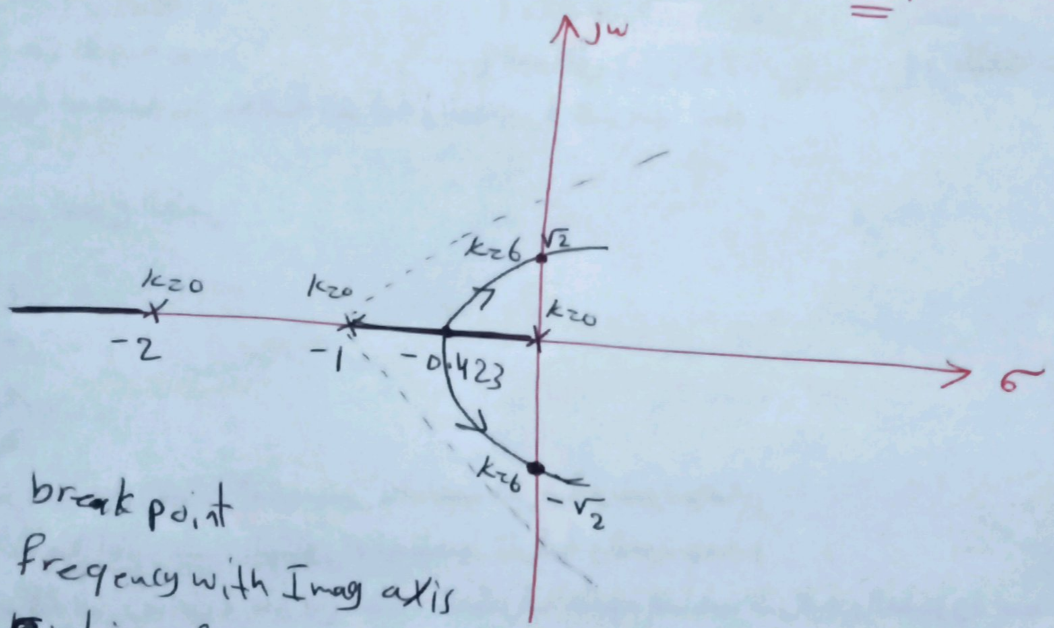
* وحساب زاوية الوصول في حالة وجود Complex Zeros

* في هذا السؤال $G(s) = \dfrac{K}{s(s+1)(s+2)}$ لا يوجد Complex poles or Complex Zeros

لذا يكون اجابة نقطة رقم 5 بالشكل التالي

(5) there is no angle of departure or angle of arrival because there is no complex (poles or Zeros)

* بعد هذه الخطوات الخمسة فان الرسم يكون بالشكل التالي



-0.423 break point

√2 frequency with Imag axis

6 Critical gain K_{cr}

EX2: (problem of 10.12) from chapter (10), sketch the root locus plot for $G(s) = \dfrac{K(s+1)}{s^2}$, H=1

* نفس الخطوات الخمسة التي تم ذكرها بالسؤال السابق يتم استخدامها لحل هذا السؤال وبالشكل التالي

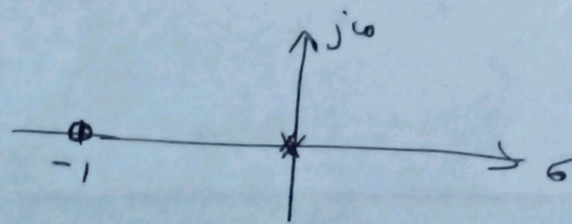
Sol

(1) No. of poles n=2

$s_{1,2} = 0$

No. of Zeros m=1

$s = -1$



② determine the asymptotes $n-m = 2-1 = 1$

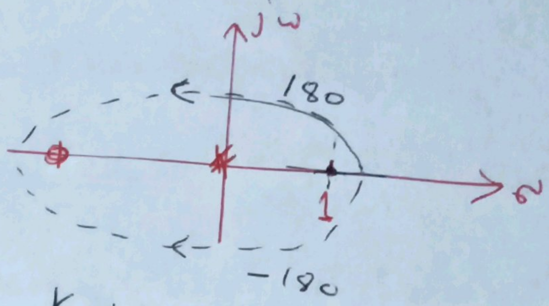
$$\sigma = \frac{\Sigma \text{ real poles} - \Sigma \text{ real zero}}{n-m}$$

$$\sigma = \frac{(0+0)-(-1)}{1} = 1$$

$$\theta_0 = \mp \frac{(2*0+1)\pi}{n-m} \qquad (2*i+1)$$

* توجد زاوية واحدة تسمى θ_0

$$= \mp \frac{\pi}{1} = \boxed{\mp\pi} = \mp 180^\circ$$



③ break point $1+GH=0$

$$1+GH=0$$

$$1 + \frac{k(s+1)}{s^2} \Rightarrow s^2 + k(s+1) = 0 \Rightarrow$$

ثم ايجاد معادلة k

$$k = -\frac{s^2}{(s+1)} \Leftarrow$$

ثم اشتقاق معادلة k نسبة لـ s وتساوي = 0

$$\frac{dk}{ds} = -\frac{[(s+1)*2s - (s^2*1)]}{(s+1)^2} = 0$$

$$= -(2s^2+2s-s^2) = 0 \Rightarrow [-s(s+2) = 0] *(-1)$$

$\begin{cases} s = 0 \\ s = -2 \end{cases}$ جذور نقوم بتعويضها بمعادلة k

$$k\big|_0 = \frac{-(0)^2}{(0+1)} = \boxed{0}$$

$$k\big|_{-2} = \frac{-[4]}{(-2+1)} = \frac{-4}{-1} = \boxed{4}$$

قيم k موجبة
لذلك فان (s=0, s=-2)
تعتبر break point

④ determine the intersection point with Imag. axis & critical gain

$$1+GH=0 \Rightarrow 1 + \frac{k(s+1)}{s^2} = 0$$

$$s^2 + k(s+1) = 0$$

let $s = jw$

$$-w^2 + kjw + k = 0$$

* تم فصل real part عن Imag. Part

$$(-w^2+k) + kjw = 0 + 0j$$

يتم مساواه جزء Imag مع zero لغرض ايجاد التردد w

ويتم مساواه جزء real مع zero لغرض ايجاد k بعد تعويض قيمة w

$$kjw = 0j \Rightarrow kw = 0 \Rightarrow \boxed{w = 0}$$

تعوض في معادلة (الجزء real part)

$$-w^2 + k = 0$$

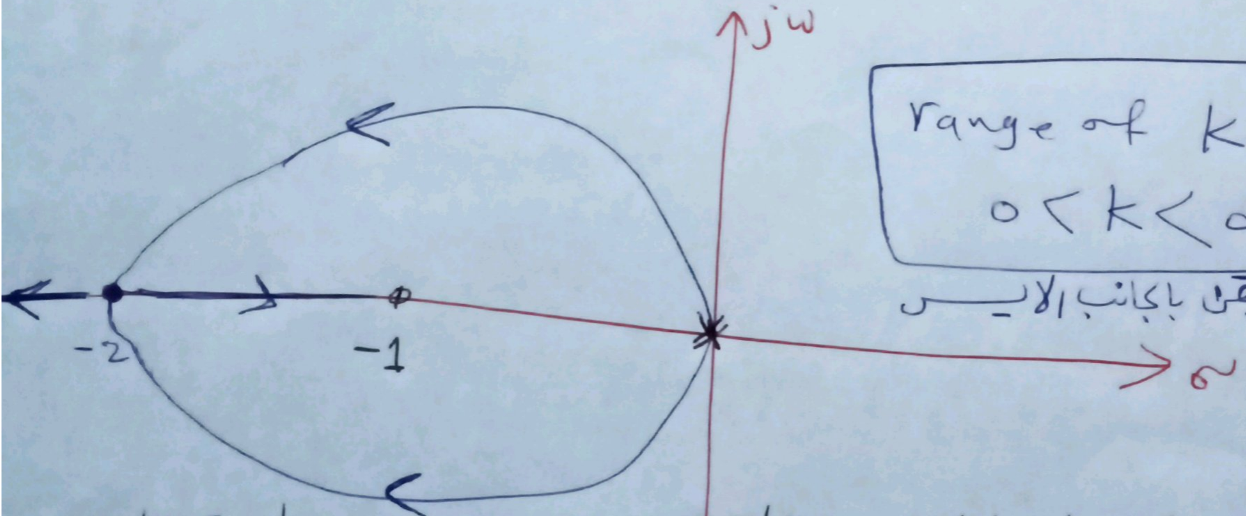
$$0 + k \Rightarrow k = 0$$

∴ نقطة التقاطع هي (نفسها التردد = 0) وقيمة $k_{cr} = 0$

(5) there is no angle of departure (مغادرة) or arrival (وصول)

لا يوجد زاوية مغادرة او زاوية وصول لانه لا يوجد جذور complex .

بعد اكمال الخطوات الخمسة يتم رسم الشكل النهائي بالشكل التالي



range of K is
$0 < k < \infty$

لان الرسم يقع بالجانب الايسر

وبما انه توجد زاوية واحدة

∓ 180 لذا يكون

الرسم بهذا الشكل

* بما انه توجد two break point $\left(\begin{matrix} s=0 \\ s=-2 \end{matrix}\right)$

لذا تكون $s=0$ (break away)

لانها بين (two poles)

وتكون $(s=-2) \Leftarrow$ break in

لانها قريبة من (zero = -1)